Auxiliar 1: Subsucesiones y continuidad

Diciembre de 2017

P1. Sea $a \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ y $b \in \mathbb{R}$. COnsideremos la fucnión $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen}((1-a)x)}{x} & \text{si } x < 0 \\ b(x-a)^2 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{\operatorname{sen}(a(x-1))}{\ln(x)} & \text{si } 1 < x \end{cases}$$

- **(a)** Estudie la continuidad de f en los itnervalos $(-\infty, 0), (0, 1)$ y $(1, \infty)$
- **(b)** Encuentre a y b tales que la función sea continua en 0
- **(c)** Encuentre a y b tales que la función sea continua en 1
- **(d)** Finalmente, encuentre a y b tales que la función sea continua

P2. Demuestre que $f(x) = x^2 + 3$ es continua mediante la definición $\varepsilon - \delta$

P3. Considere la siguiente sucesión definida por recurrencia:

$$s_n = \begin{cases} n s_{n-1} & \text{si } n \text{ impar} \\ \operatorname{sen}(n) s_{n-2} & \text{si } n \text{ par} \end{cases}$$

Con condiciones iniciales $s_0 = s_1 = 1$. Demuestre que s_n tiene una sucsucesión convergente

P4. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua y (x_n) una sucesión tal que $f(x_n) \to \bar{y}$. demuestre que $\exists \bar{x} \in [a, b]$ tal que $f(\bar{x}) = \bar{y}$

P5. Sea x_n una sucesión tal que sus subsucesiones x_{2n}, x_{2n+1} y x_{3n} son convergentes. Muestre que x_n es convergente

P6.
- **(a)** Sea una función $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ una función que para todo $x, y \in \mathbb{R}^+$ satisface $f(xy) = f(x) + f(y)$. Demuestre que si f es continua en 1, entonces lo es en todo su dominio.
- **(b)** Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función Lipschitz, es decir, existe un $L > 0$ tal que para todo $x, y \in \mathbb{R}$ se verifica:

  $$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$$

  Demuestre que f es continua
- **(c)** Suponga que f y g son dos funciones tal que g es continua en 0, $g(0) = 0$ y $|f(x)| \leq |g(x)|$. Demuestre que f es continua en 0

P7. Considere una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua, con un mínimo global único en el punto x_0 y que satisface que $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = +\infty$.

Sea x_n una sucesión que cumple $\forall n \in \mathbb{N}, f(x_n) \leq f(x_0) + \frac{1}{n}$ se pide:

(a) Prueba que si la sucesión tiene alguna subsucesión convergente, entonces dicho límite necesariamente es x_0

(b) Pruebe que x_n tiene al menos una subsucesión convergente.