

Aux 14

Prep Control 2

Repaso:

• Campo por definición:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{I d\vec{\ell} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$
$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{J} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV$$

• Ley de Ampere:

$$\oint \vec{B} d\vec{\ell} = \mu_0 I$$
$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$$

Generalizada:

$$\oint \vec{H} d\vec{\ell} = I_{\text{libre}}$$
$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J}_{\text{libre}} \quad \left| \quad \vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \right.$$

• Potencial vector:

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$
$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{\vec{J} dV}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

OSO: $\vec{A} \parallel \vec{J}$

Momento magnético:

$$\vec{m} = \oint \vec{r}' \times I d\vec{\ell}$$
$$\vec{m} = \frac{1}{2} \iiint \vec{r}' \times \vec{J} dV$$

Torque magnético: $\vec{\tau} = \vec{m} \times \vec{B}$

• Medios materiales:

Corrientes de Magnetización:

$$\vec{K}_m = \vec{M} \times \hat{n} |_{\text{borde}}$$
$$\vec{J}_m = \vec{\nabla} \times \vec{M}$$

Condiciones de borde:

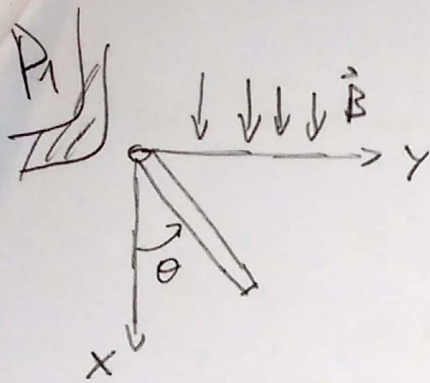
$$B_{1n} = B_{2n}$$

$$\hat{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \vec{K}_{\text{libre}}$$

fen

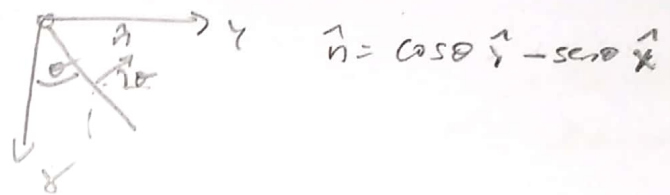
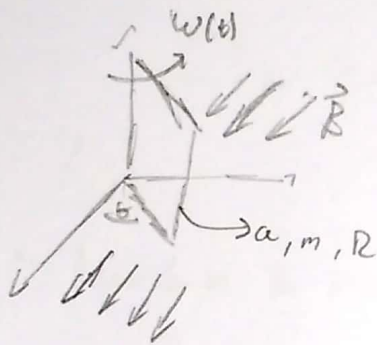
• Ley de Faraday:

$$\mathcal{E} = - \frac{d\Phi}{dt}$$
$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$



→ Calcular la velocidad angular de la espira en función del ángulo

- Primero nos interesa saber el flujo, cuando la espira tiene un ángulo θ , la normal a la superficie apunta



- Luego el flujo, si el campo es uniforme, será

$$\Phi = A \hat{n} \cdot \vec{B} = a^2 \cdot (\cos \theta \hat{y} - \sin \theta \hat{x}) \cdot B_0 \hat{y} = -B_0 a^2 \sin \theta$$

- Luego la fem inducida que siente la espira será

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = +B_0 a^2 \cos \theta \dot{\theta}$$

- Usamos la ley de Ohm, para conectar la fem con la corriente

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} \Rightarrow I = \frac{B_0 a^2 \cos \theta \dot{\theta}}{R}$$

- Por qué nos interesa esto?, con la corriente tenemos el momento magnético de la espira

$$\begin{aligned} \vec{m} &= I \cdot \vec{S} \quad \vec{S} = A \hat{n} \\ &= \frac{B_0 a^2 \cos \theta \dot{\theta}}{R} a^2 (-\sin \theta \hat{x} + \cos \theta \hat{y}) \end{aligned}$$

• luego con el momento magnético tenemos el torque magnético

$$\begin{aligned}\vec{\tau} &= \vec{m} \times \vec{B}_0 \quad ; \quad \vec{B}_0 = B_0 \hat{x} \\ &= \frac{B_0^2 a^4 \cos \theta \dot{\theta}}{R} \left(-\sin \theta \left(\hat{x} \times \hat{x} \right) + \cos \theta \left(\hat{z} \times \hat{x} \right) \right) \\ \Rightarrow \vec{\tau} &= -\frac{B_0^2 a^4 \cos^2 \theta \dot{\theta}}{R} \hat{y}\end{aligned}$$

• Recordando de mecánica, la ecuación de torque es $\vec{\tau} = \dot{\vec{L}}$ Derivada del Momento angular

• Donde el momento angular es de la forma:

$$\vec{L} = I \dot{\theta} \hat{n} \quad \text{Momento de inercia}$$

Hint: En este caso

$$I = \frac{5ma^2}{12}$$

$$\Rightarrow \dot{\vec{L}} = \frac{5ma^2}{12} \ddot{\theta} \hat{n}$$

• Igualamos con el torque:

$$\frac{5ma^2}{12} \ddot{\theta} = -\frac{B_0^2 a^4 \cos^2 \theta \dot{\theta}}{R}$$

Usamos el truco de mecánica

$$\ddot{\theta} = \frac{d\dot{\theta}}{d\theta} \dot{\theta}$$

$$\Rightarrow \frac{d\dot{\theta}}{d\theta} = -\frac{12B_0^2 a^2 \cos^2 \theta}{5Rm}$$

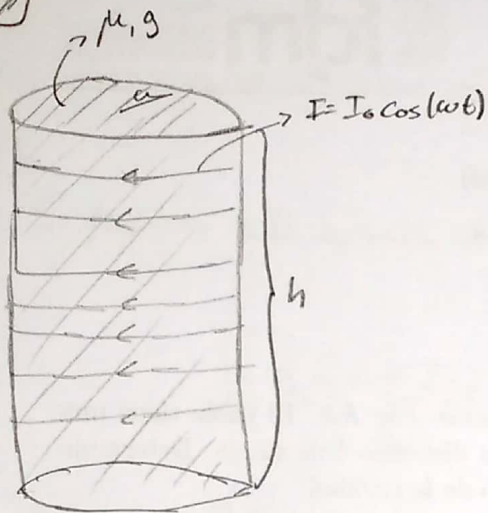
$$\Rightarrow d\dot{\theta} = -\frac{12B_0^2 a^2 \cos^2 \theta}{5Rm} d\theta \quad / \quad \int_0^\theta$$

$$\Rightarrow \dot{\theta}(\theta) - \dot{\theta}(0) = -\frac{12B_0^2 a^2}{5Rm} \int_0^\theta \cos^2 \theta d\theta$$

• Using primitives $\int \cos^2 \theta d\theta = \frac{1}{2} \left(\theta + \frac{1}{2} \sin(2\theta) \right)$

$$\Rightarrow \dot{\theta}(\theta) = \omega_r \frac{6 B_0^2 a^2}{5 R_m} \left(\theta + \frac{\sin(2\theta)}{2} \right)$$

P_2
 $\frac{1}{\mu}$



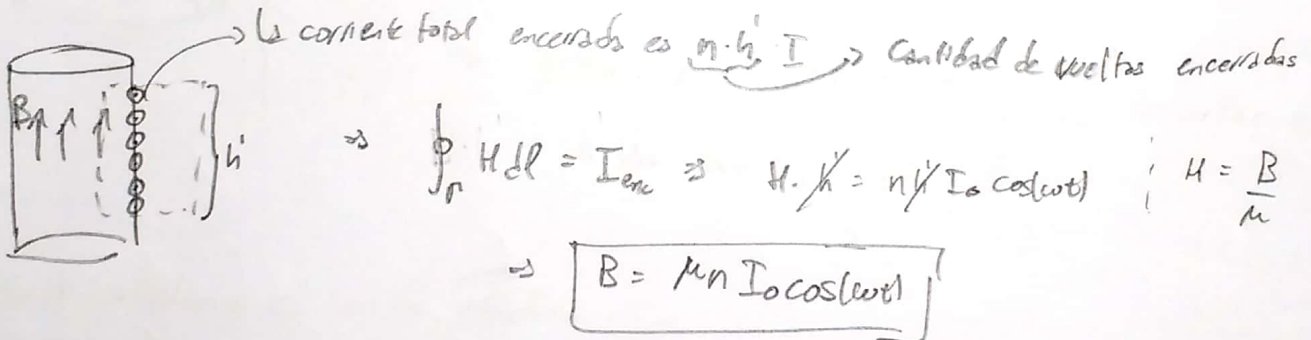
→ Calcular el flujo del campo magnético a través de una circunferencia de radio ρ en a . Obtener la fem inducida y el campo eléctrico dentro de la bobina

→ Calcular la corriente total

→ Calcular las corrientes de magnetización

• En general cuando las cosas varían salen todos los campos

• Calculamos primero el campo magnético usando ley de amper generalizada



• Ahora calculamos el flujo en una circunferencia de radio ρ



• Como $\vec{B}$ es constante en el espacio el flujo es campo por área

$$\Phi_p = \vec{B} \cdot \vec{A} = \mu n I_0 \cos \omega t \pi \rho^2 \Rightarrow \boxed{\Phi_p = \mu n I_0 \pi \rho^2 \cos(\omega t)}$$

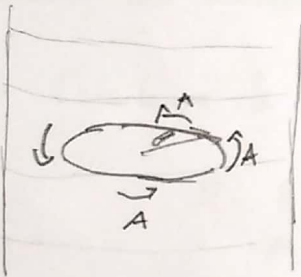
• Luego la fem inducida es $\mathcal{E} = - \dot{\Phi}_p$

$$\Rightarrow \boxed{\mathcal{E} = \mu n I_0 \pi \rho^2 \omega \sin(\omega t)}$$

- Cómo sacamos el campo eléctrico a partir de todo esto? , Usamos que $E = -\frac{\partial A}{\partial t}$
- Si partimos de la definición de potencial vector $B = \nabla \times A$ e integramos en una superficie

$$\iint \vec{B} \cdot d\vec{S} = \oint_r A \cdot d\vec{l} \Rightarrow \Phi = \oint_r \vec{A} \cdot d\vec{l}$$

- Si hacemos el supuesto de que $A \parallel \hat{z}$, o sea $\vec{A} = A \hat{\theta}$, usamos el mismo circuito de radio ρ



$$\Rightarrow \oint_r A \cdot d\vec{l} = \underbrace{2\pi\rho A}_{\text{Perímetro}} = \Phi_r \quad \rightarrow \text{reemplazamos}$$

$$\Rightarrow 2\pi\rho A = \mu_0 n I_0 \rho \cos(\omega t) \quad \rightarrow \text{Perímetro radial}$$

$$\Rightarrow \vec{A} = \frac{\mu_0 n I_0 \rho \cos(\omega t)}{2} \hat{\theta}$$

- Ahora calculamos el campo eléctrico

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \Rightarrow \boxed{\vec{E} = \frac{\mu_0 n I_0 \rho \omega \sin(\omega t)}{2} \hat{\theta}}$$

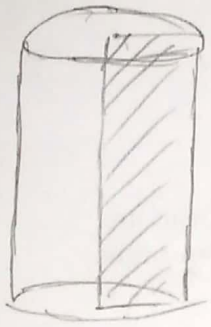
→ Calcular la corriente total

- El campo eléctrico genera una corriente, si usamos la ley de Ohm

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} \Rightarrow \boxed{\vec{J} = \frac{\mu_0 g n I_0 \rho \omega \sin(\omega t)}{2} \hat{\theta}}$$

- Luego la corriente total es el flujo de la densidad de corriente $I = \iint \vec{J} \cdot d\vec{S}$

- ¿Qué superficie usamos? como $\vec{S}$ es en $\hat{\theta}$ necesitamos una superficie paralela, tomamos un rectángulo



$$I = \int_0^h \int_0^a \frac{\mu_0 n I_0 \omega \sin(\omega t)}{2} \hat{\theta} \rho \cdot d\vec{S}$$

En este caso $d\vec{S} = \rho d\rho dz \hat{\theta}$

$$= \frac{\mu_0 n I_0 \omega \sin(\omega t)}{2} \int_0^h \int_0^a \rho d\rho dz \Rightarrow I = \frac{\mu_0 n I_0 \omega \sin(\omega t) h a^2}{4}$$

→ Calcular las corrientes de magnetización

- Calculamos la magnetización usando con la definición de $\vec{H}$

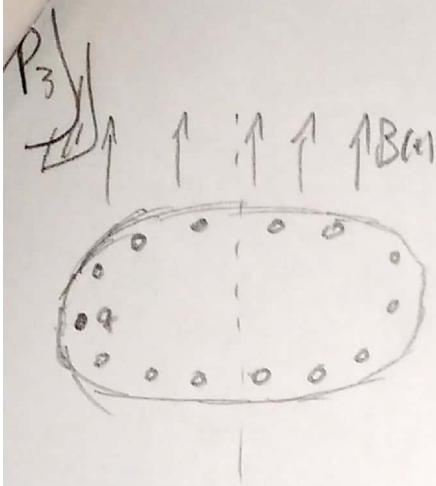
$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \Rightarrow \vec{M} = \frac{\mu - \mu_0}{\mu \mu_0} \vec{B} \Rightarrow \boxed{\vec{M} = \frac{(\mu - \mu_0) n I_0 \cos(\omega t)}{\mu_0} \hat{u}}$$

- Luego las corrientes son

$$\vec{J}_m = \nabla \times \vec{M} = 0 \quad ; \quad M \text{ es invariante en el espacio}$$

$$\vec{K}_m = \vec{M} \times \hat{n}$$

↗ Borde del cilindro $\vec{K}_m = \vec{M} \times \hat{r} = \frac{(\mu - \mu_0) n I_0 \cos(\omega t)}{\mu_0} \hat{\theta}$
 ↘ Tapas $\vec{K}_m = \vec{M} \times \hat{k} = 0$



→ Encontrar el campo eléctrico inducido como función de $\frac{dB}{dt}$

→ Calcular la velocidad angular final del disco

• Si partimos de la ec de Maxwell y la integramos en la superficie

$$\nabla \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \bigg/ \iint dS$$

Integramos en la superficie de un disco de radio r

$$\Rightarrow \oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = - \frac{\partial B}{\partial t} \cdot S \Rightarrow \vec{E} \cdot 2\pi r \hat{\theta} = - \frac{\partial B}{\partial t} \cdot \pi r^2 \Rightarrow \boxed{\vec{E} = - \left(\frac{\partial B}{\partial t} \right) \frac{r}{2} \hat{\theta}}$$

• Para calcular la velocidad angular usamos la ec de torque normal para una carga

$$\tau = \vec{r} \times \vec{F} = a \hat{r} \times (F_q + F_E + F_L)$$

Fuerza de las
otras cargas
(Apunta en $\hat{r}$)

Fuerza del
campo inducido

Fuerza de Lorentz
del campo

$$\vec{F} = q \vec{v} \times \vec{B}$$

$$= a \hat{r} \times \left(-q \left(\frac{\partial B}{\partial t} \right) \frac{r}{2} \hat{\theta} + q \overbrace{r \omega \hat{\theta} \times B \hat{z}}^{\vec{v}} \right)$$

$$= a \hat{r} \times \left(-q \left(\frac{\partial B}{\partial t} \right) \frac{r}{2} \hat{\theta} + q r \omega B \hat{r} \right)$$

$$= - \frac{a^2 q}{2} \left(\frac{\partial B}{\partial t} \right) \hat{z}$$

pero $\tau = I \vec{\omega}$ Mom de inercia

$$\Rightarrow \vec{\omega} = - \frac{a^2 q}{2I} \frac{\partial B}{\partial t} \quad \bigg/ \int dt \Rightarrow \boxed{\omega(t) - \omega_0 = - \frac{q a^2}{2I} (B - B(0))}$$