Aux # 12.

Magnetostática en medios materiales

- Introducimos el vector magnetización (como polarización en electrostática)

$$\vec{M} \quad \ddot{o}$$

- Luego si un material está magnetizado hay corrientes de magnetización

$$\vec{K}_m = \vec{M} \times \hat{n} \quad ; \quad \text{Corrientes superficiales}$$

$$\vec{J}_m = \nabla \times \vec{M} \quad ; \quad \text{Corrientes volumétricas}$$

- Entonces ahora diferenciamos 2 tipos de corrientes → Libres / → Magnetización

- Introducimos el vector $\vec{H}$

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}$$

; El vector $\vec{H}$ "mira" las corrientes libres

- Luego sale la ley de Ampere generalizada.

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}_{libre} \iff \oint \vec{H}\, d\vec{l} = I_{libre}$$

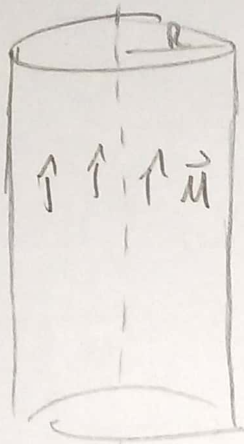
- Para medios bacanes, podemos relacionar $\vec{B}$ y $\vec{H}$ $\Rightarrow$ $\vec{B} = \mu \vec{H}$

- Condiciones de borde para la interfaz

$$B_{1n} = B_{2n}$$

$$\hat{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \vec{K}_{libre}$$

P1



a) Calcular las corrientes de magnetización

$\vec{M} = Kr\hat{z}$

• $\vec{J} = \nabla \times \vec{M}$

• El rotor en cilíndricas tiene la forma

$$\nabla\times\vec{A} = \frac{1}{r}\left[\left(\frac{\partial A_z}{\partial\phi} - \frac{\partial(rA_\phi)}{\partial z}\right)\hat{r} + r\left(\frac{\partial A_r}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial r}\right)\hat{\phi} + \left(\frac{\partial(rA_\phi)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial\phi}\right)\hat{k}\right]$$

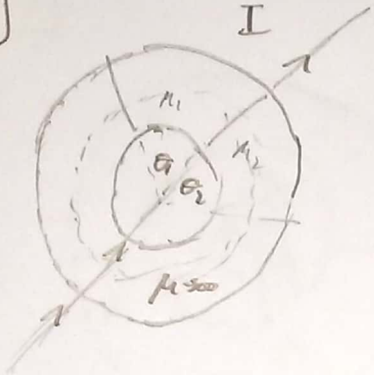
• En nuestro caso solo tomamos A_z ya que $\vec{M}$ va en $\hat{z}$

$$\Rightarrow \nabla\times\vec{M} = \frac{1}{\cancel{r}}\left(\cancel{\frac{\partial(Kr)}{\partial\phi}}^{\,0}\hat{r} - \cancel{r}\,\frac{\partial(Kr)}{\partial r}\hat{\phi}\right) = -K\hat{\phi} \Rightarrow \boxed{\vec{J} = -K\hat{\phi}}$$

• Luego $\vec{K} = \vec{M}\times\hat{n}\Big|_{borde}$ en nuestro caso $\hat{n} = \hat{r}$

$$\Rightarrow \vec{K} = \vec{M}\times\hat{n} = KR\,\hat{z}\times\hat{r} = KR\,\hat{\phi} \Rightarrow \boxed{\vec{K}_n = KR\,\hat{\phi}}$$

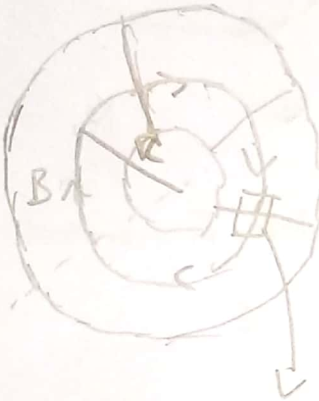
P2



→ Calcular $\vec{H}$ y $\vec{B}$ para cada material

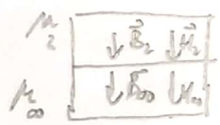
- Usamos ley de Ampere generalizada, suponiendo que el campo dentro del toroide es igual en su centro

$$\oint H\,dl = I_{libre}$$



$$\Rightarrow \oint H\,dl = \boxed{H_1\theta_1 R + H_2\theta_2 R + H_\infty(2\pi - \theta_1 - \theta_2) = I}$$

- Usando condiciones de borde, los campos en cada interfaz son normales



$$\Rightarrow \boxed{B_1 = B_2 = B_\infty = B}$$

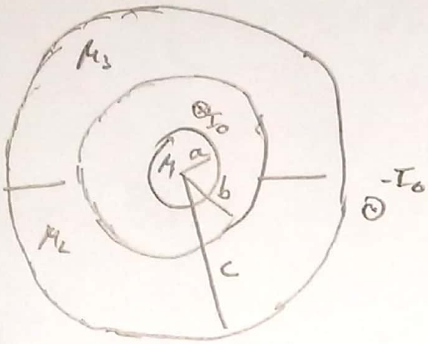
- Como los medios son ideales $H = \dfrac{B}{\mu}$

$$\Rightarrow H_\infty = \frac{B}{\mu_\infty} = 0 \;;\; H_1 = \frac{B}{\mu_1} \;,\; H_2 = \frac{B}{\mu_2}$$

; Reemplazamos y despejamos B.

$$\Rightarrow \frac{B\theta_1 R}{\mu_1} + \frac{B\theta_2 R}{\mu_2} = I \Rightarrow \boxed{B = \frac{I\mu_1\mu_2}{R(\theta_1\mu_2 + \theta_2\mu_1)}}$$

P3



a) $I(r)$?

• Acá I_0 es la corriente total que lleva, debemos encontrar una densidad de corriente

• Suponemos una densidad de corriente homogenea tal que:

$$I(r<a) = J_1 \pi r^2$$

• Sacamos J_1 evaluando en el borde

$$I_0 = \pi a^2 J_1 \Rightarrow J_1 = \frac{I_0}{\pi a^2}$$

$$\Rightarrow I(r<a) = \frac{I_0 \cancel{\pi} r^2}{\cancel{\pi} a^2} \Rightarrow \boxed{I(r<a) = \frac{I_0 r^2}{a^2}}$$

• $a<r<b$ $\boxed{I(r) = I_0}$

• Para $b<r<c$ hacemos lo mismo suponemos que hay una densidad de corriente J_2 y la conectamos con la corriente total

$$\Rightarrow -I_0 = J_2 \pi (c^2 - b^2) \Rightarrow J_2 = \frac{-I_0}{\pi (c^2-b^2)}$$

• Luego las corrientes se suman

$$I(b<r<c) = I_0 + J_2 \pi (r^2 - b^2)$$

$$\Rightarrow \boxed{I(b<r<c) = I_0 \left(1 - \frac{(r^2-b^2)}{c^2-b^2}\right)}$$

. Luego para $r > c$ es lógico ver que

$$\boxed{I(r>c) = I_0 - I_0 = 0}$$

b) $H(r)$ y $B(r)$?

• Para $r<b$, donde no hay interfaz, es más o menos sencillo

$\underline{r<a}$

$$2\pi r H = I_{enc}$$
$$= I(r<a)$$
$$\Rightarrow H(r<a) = \frac{I_0 r^2}{2\pi r a^2} \Rightarrow \boxed{H(r<a) = \frac{I_0 r}{2\pi a^2}\hat{\theta}}$$

$H = \frac{B}{\mu}$

$$\Rightarrow \boxed{B(r<a) = \frac{I_0 r \mu_0}{2\pi a^2}\hat{\theta}}$$

$\underline{a<r<b}$

$$2\pi r H = I_0 \Rightarrow \boxed{H(a<r<b) = \frac{I_0}{2\pi r}\hat{\theta}}$$

$$\Rightarrow \boxed{B(a<r<b) = \frac{I_0 \mu_0}{2\pi r}\hat{\theta}}$$

$\underline{b<r<c}$ Usamos ley de ampere generalizada.

$$\oint H dl = \pi r H_2 + \pi r H_3 = I_0\left(1 - \frac{r^2-b^2}{c^2-b^2}\right) = I_{enc} = I(b<r<c)$$

• Usando condiciones de borde, como los campos son normales a la interfaz

$$B_1 = B_2 = B$$

$$\Rightarrow \quad \pi r \left(\frac{B}{\mu_2} + \frac{B}{\mu_3} \right) = I_0 \left(1 - \frac{(r^2 - b^2)}{(c^2 - b^2)} \right)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{B(b < r < c) = \frac{I_0}{\pi r \left(\frac{1}{\mu_2} + \frac{1}{\mu_3} \right)} \left(1 - \frac{(r^2 - b^2)}{(c^2 - b^2)} \right)}$$

• Para $r > c$ no hay corrientes encerradas

$$\Rightarrow \quad \vec{B} = \vec{H} = 0$$