

Aux 6

Corrientes eléctricas

Rebato

→ Densidad de corriente (Vector !!)

→ velocidad de las cargas

→ Definición formal (no se ocupa tanto): $\vec{J} = \rho \vec{v}$

→ Usualmente se liga con la intensidad de corriente (Escalar!)

$$\boxed{I = \iint \vec{J} \cdot d\vec{S}} : \text{flujo de corriente en un área dada.}$$

→ Tenemos también la ec de continuidad para las cargas en un circuito

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{J} = 0}$$

→ Podemos conectar la densidad de corriente con el campo eléctrico para ciertos materiales:

$$\boxed{\vec{J} = \sigma \vec{E}}$$

Ley de Ohm

σ puede llamarse ∇ también

→ En estado estacionario también hay condiciones de borde para $\vec{J}$ en una interfaz de distintas conductividades.

$$\vec{J}_{1n} = \vec{J}_{2n}$$

; Densidades de corrientes ~~continuas~~ ^{normales} son continuas

→ Recordar que para campos tangenciales

$$E_{1t} = E_{2t}$$

P1) $\rightarrow$ La atmósfera tiene conductividad: $\sigma(z) = \sigma_0 \left(3 + \frac{z^2}{3}\right)$; Con z altura.
Además el campo en la tierra es $-E_0 \hat{k}$

$\rightarrow$ Tenemos un modelo de atmósfera como una capa conductora paralela a la superficie una distancia h . Entre esa capa y la tierra está la atmósfera. El radio de la tierra es R_T

a) $E(z), V(z)$?

• Partimos diciendo que en estado estacionario $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$, por lo que la ecuación de continuidad es:

$$\nabla \cdot \vec{J} = 0$$

• Además el medio se rige por la ley de Ohm, por lo que $\vec{J} = \sigma \vec{E}$

$$\Rightarrow \nabla(\sigma E) = 0$$

• Por simetría hacemos que E depende únicamente de la altura.

$$\Rightarrow \nabla(\sigma E) = \frac{d}{dz}(\sigma(z) E(z)) = 0$$

Derivada igual a cero $\Rightarrow \sigma(z) E(z) = C$ $\xrightarrow{\text{Constante}}$

• Calculamos la constante porque sabemos $E(0) = E_0$

$$\Rightarrow C = \sigma(0) E_0 = 3\sigma_0 E_0$$

• Luego el campo será

$$E = \frac{3\sigma_0 E_0}{\sigma(z)} = -\frac{3E_0}{\left(3 + \frac{z^2}{3}\right)} //$$

- Integrando para saber el potencial

$$V(z) - V_0 = \int_0^z \frac{3E_0}{(3 + \frac{z^2}{3})} dz = 9E_0 \int_0^z \frac{dz}{(3^2 + z^2)} \quad \left| \quad \text{Pero} \quad \int \frac{dx}{(a^2 + x^2)} = \frac{\text{Arctg}(\frac{x}{a})}{a} \right.$$

$$= 9E_0 \frac{\text{Arctg}(\frac{z}{3})}{3} \Big|_0^z = 3E_0 \text{Arctg}(\frac{z}{3}) //$$

b) Corriente total entre la capa conductora y la tierra

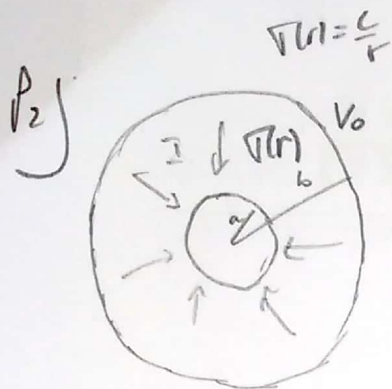
- Ya sabemos la densidad de corriente

$$\vec{J} = \sigma E = \frac{\sigma \cdot 3V_0 E_0}{\sigma} = 3V_0 E_0$$

- Luego

$$I = \iint \vec{J} \cdot d\vec{s} \quad \begin{array}{l} \nearrow \text{Constante} \\ \nearrow \text{Superficie de la tierra} \end{array} = J \cdot S_r$$

$$= 3V_0 E_0 \cdot 4\pi R_T^2 \Rightarrow \boxed{I = 12\pi V_0 E_0 R_T^2}$$



→ Si la esfera exterior está a un potencial V_0 y fluye una corriente total I radialmente entre los conductores, calcular:

a) $V(r)$, b) Densidades de carga c) Resistencia y potencia disipada

a) • Como nos dan dato es I , usamos la definición de la intensidad de corriente

Hacemos el supuesto que $\vec{J} = J(r) \hat{r}$

$$I = \iint \vec{J} \cdot d\vec{s}$$

$$= J \cdot S_{\text{sup}}$$

$$= J \cdot 4\pi r^2 \Rightarrow \boxed{\vec{J} = \frac{I}{4\pi r^2} \hat{r}}$$

• Luego usamos la ley de Ohm para ligar J y E

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} \Rightarrow \vec{E} = \frac{\vec{J}}{\sigma} = \frac{\frac{I}{4\pi r^2} \hat{r}}{\frac{c}{4\pi \epsilon}} \Rightarrow \boxed{\vec{E} = \frac{I}{4\pi \epsilon r} \hat{r}}$$

• Luego calculamos el potencial

$$\Delta V = V(b) - V(r) = - \int_r^b E dr$$

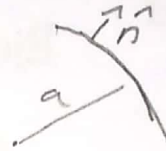
$$\Rightarrow V_0 - V(r) = - \frac{I}{4\pi \epsilon} \int_r^b \frac{dr}{r} = \frac{I}{4\pi \epsilon} \ln\left(\frac{b}{r}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{V(r) = V_0 + \frac{I}{4\pi \epsilon} \ln\left(\frac{b}{r}\right)}$$

b) • Debemos calcular ∇ en los conductores y P en el medio

• Para ∇a usamos condición del conductor

$$\nabla a = \vec{E} \Big|_{r=a} \hat{n} \epsilon_0 = \frac{\pm \epsilon_0}{4\pi c a} "$$



• Calculamos P con la ley de Gauss

$$P = \epsilon_0 \nabla \cdot \vec{E} = \epsilon_0 \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 E) = \frac{\epsilon_0}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\pm}{4\pi c r} \right) = \frac{\epsilon_0 F}{4\pi c r^2}$$

• No es directo saber ∇b ya que la esfera está a un potencial V_0

• Como la esfera está a un potencial V_0 la carga total que debe albergar para esto debe ser igual a:

$$Q_{tot} = V_0 4\pi \epsilon_0 b$$

• Luego la carga se conserva, o sea

$$Q_{tot} = Q_a + Q_{vol} + Q_b$$

• Donde cada término es

$$Q_a = 4\pi a^2 \nabla a = \frac{I a \epsilon_0}{c}$$

$$Q_{vol} = \iiint P dV = \frac{\epsilon_0 F}{4\pi c} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_a^b \frac{1}{r^2} r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi$$

dV en esféricas

$$= \frac{\epsilon_0 I}{4\pi c} \underbrace{\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta d\phi}_{4\pi} \underbrace{\int_a^b dr}_{b-a} = \frac{\epsilon_0 I}{c} (b-a)$$

• Luego Q_b es

$$Q_b = Q_{tot} - Q_a - Q_{vol} = V_0 4\pi \epsilon_0 b - \frac{I a \epsilon_0}{c} - \frac{I \epsilon_0}{c} (b-a) = V_0 4\pi \epsilon_0 b - \frac{I \epsilon_0 b}{c}$$

• Como la densidad es uniforme

$$\nabla_b = \frac{Q_b}{4\pi b^2} = \frac{\cancel{b}(4\pi\epsilon_0 V_0 - \frac{I\epsilon_0}{c})}{4\pi b^2} = \frac{\epsilon_0 V_0}{b} - \frac{I}{4\pi c b} //$$

c) • Usamos la ley de Ohm escalon

$$\Delta V = IR \Rightarrow R = \frac{\Delta V}{I} \quad \begin{matrix} \rightarrow \Delta V = V_0 - V(a) \\ = -\frac{I}{4\pi c} \ln\left(\frac{a}{b}\right) \end{matrix}$$

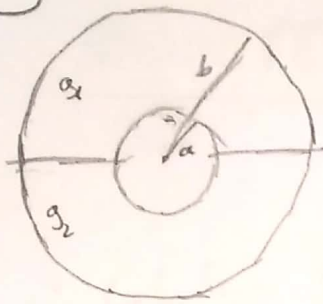
$$\Rightarrow \boxed{R = \frac{\ln\left(\frac{a}{b}\right)}{4\pi c}}$$

• Lo mismo para la potencia disipada

$$VI = P \Rightarrow P = \frac{I}{4\pi c} \ln\left(\frac{a}{b}\right) \cdot I$$

$$\Rightarrow \boxed{P = \frac{I^2}{4\pi c} \ln\left(\frac{a}{b}\right)}$$

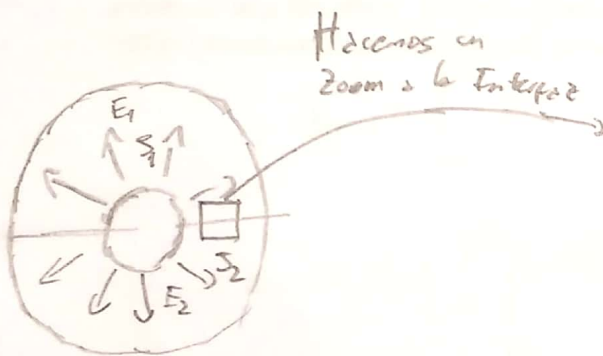
P3



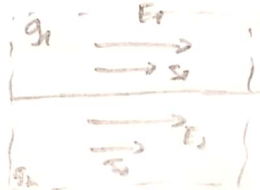
→ Calcular la resistencia equivalente

• Debemos encontrar ΔV e I para hacer $R = \frac{V}{I}$

• En estricto rigor cada medio tendría diferentes campos y corrientes



Hacemos un zoom a la Interfaz



Cerca de la interfaz los campos son tangenciales, por lo que se cumple la condición de borde

$E_1 = E_2$, cerca de la interfaz

• Pero como habíamos supuesto que E_1 era el mismo en la mitad de arriba y E_2 para abajo

$\Rightarrow E_1 = E_2 = E$; En la zona interior.

• Supongamos que en el conductor interno hay una carga Q (no está distribuida uniformemente)

Ley de Gauss $\Rightarrow E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}$

• luego calculamos la diferencia de potencial.

$$\Delta V = - \int_b^a E \cdot dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{1}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)$$

• Para calcular I necesitamos S en cada medio, donde

$$\vec{S}_1 = g_1 \vec{E} = \frac{g_1 Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}, \quad \vec{S}_2 = g_2 \vec{E} = \frac{g_2 Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}$$

• Calculamos $I = \int_S \vec{S} \cdot d\vec{S}$

$$I = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} S(\theta) \hat{r} \cdot r^2 \sin\theta d\theta d\phi \quad \left\{ \begin{array}{l} S(\theta) \text{ está definida por partes} \\ S = S_1(\theta) \text{ si } \theta \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ S = S_2(\theta) \text{ si } \theta \in [\frac{\pi}{2}, \pi] \end{array} \right.$$

$$= 2\pi r^2 \int_0^\pi S(\theta) \sin\theta d\theta$$

$$= 2\pi r^2 \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} S_1(\theta) \sin\theta d\theta + \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi S_2 \sin\theta d\theta \right]$$

$$= 2\pi r^2 \left[S_1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta d\theta + S_2 \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \sin\theta d\theta \right]$$

$$= 2\pi r^2 [S_1 + S_2]$$

$$\Rightarrow I = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} [g_1 + g_2] \Rightarrow \boxed{I = \frac{Q}{2\epsilon_0} (g_1 + g_2)}$$

• Finalmente usamos la ley de Ohm

$$V = \frac{\Delta V}{I} = \frac{\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)}{\frac{Q}{2\epsilon_0} (g_1 + g_2)} = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) \cdot \frac{1}{(g_1 + g_2)} //$$