Auxiliar 3

- Conductores y Condensadores

Repaso:

- Recordar potencial eléctrico:

→ Como $\nabla \times E = 0$, podemos escribir el campo eléctrico como el gradiente de un potencial

$$\Rightarrow \quad E = -\nabla V$$

Definición!!

⇒ Cuando un campo es simple (depende de 1 sola variable) podemos integrar para saber el potencial

$$V - V_0 = \int E\, dl$$

Referencia

- Conductores: Material que permite libremente el mov de las cargas

Propiedades: - Campo nulo dentro del conductor ⇒ Equipotencial.

- Las cargas solo se acumulan en las superficies

- Para que se cumplan las propiedades anteriores el campo cerca de la superficie del conductor es perpendicular y vale $\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\hat{n}$ → Vector normal.

P1] Repasar capacitancias de los condensadores mas usuales:

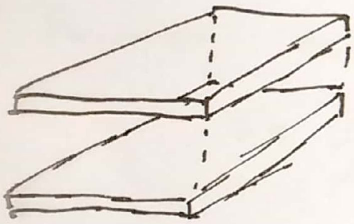
Placas paralelos, cilíndrico, Esférico

- Recordar que la definición de capacitancia es:

$$C = \frac{Q}{|\Delta V|}$$

"Cuanta carga almacena un condensador dado una cierta diferencia de potencial"

a] Placas paralelas

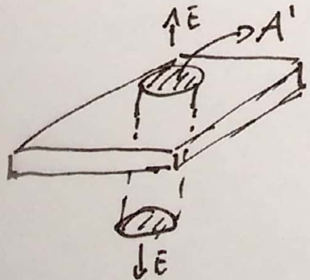


¿Como resolvemos estos problemas?

- Nos damos una carga en el condensador, Sacamos con ello el campo, luego el Potencial y luego la capacitancia (también se puede hacer al revés)

- Suponemos que cada placa tiene carga Q y $-Q$ respectivamente y que tiene un área A y están separadas por una distancia d

- Si vemos una sola placa y hacemos ley de Gauss



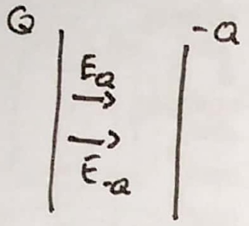
$$\oiint \vec{E}\cdot d\vec{s} = 2E\cdot A'$$

$$\frac{Q}{\varepsilon_0} = \sigma\cdot A'\cdot\frac{1}{\varepsilon_0}$$

$$2E\cancel{A'} = \frac{\sigma\cancel{A'}}{\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

- Luego como la placa de abajo tiene carga $-Q$, el campo es paralelo también, luego el campo total entre las placas es



$$\Rightarrow \quad E = 2 \cdot \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

- Sacamos el potencial integrando entre 0 y d

$$\Delta V = -\int_0^d \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\,dx = -\frac{\sigma d}{\varepsilon_0}$$

- Escribimos σ en función de Q, como es uniforme:

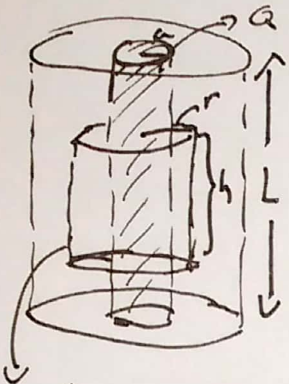
$$\sigma = \frac{Q}{A}$$

$$\Rightarrow |\Delta V| = \frac{Qd}{\varepsilon_0 A}$$

- Luego la capacitancia será:

$$C = \frac{Q}{|\Delta V|} = \frac{\cancel{Q}}{\frac{\cancel{Q}d}{\varepsilon_0 A}} = \frac{\varepsilon_0 A}{d}$$

b) <u>Cilíndrico</u> . el procedimiento es equivalente



Sup Gaussiana

- Con ley de Gauss el campo es

$$\rightarrow \oiint E \cdot ds = E \cdot \underbrace{2\pi r h}_{\text{Sup de la Superficie Gaussiana}}$$

$$\rightarrow \frac{Q}{\varepsilon_0} = \underbrace{2\pi a h}_{\text{Superficie del cilindro interno}} \cdot \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow E \cdot 2\pi r \cancel{h} = 2\pi a \cancel{h} \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow E = \frac{a\sigma}{\varepsilon_0 \cdot r}$$

- Sacamos el potencial

$$\Delta V = \int_a^b \frac{a\sigma}{\varepsilon_0} \cdot \frac{dr}{r} = \frac{a\sigma}{\varepsilon_0} \cdot \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

Pero

$$\sigma = \frac{Q}{2\pi a \cdot L}$$

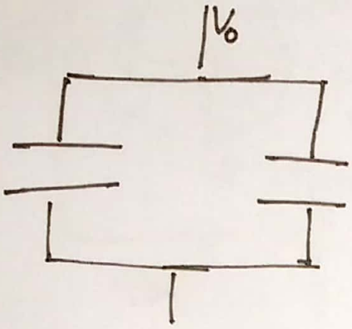
- Luego la capacitancia es

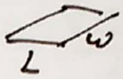
$$C = \frac{Q}{|\Delta V|} = \frac{\cancel{Q}}{\frac{\cancel{a} \cdot \cancel{Q}}{2\pi \cancel{a} L \varepsilon_0} \ln\left(\frac{b}{a}\right)} \Rightarrow C = \frac{2\pi L \varepsilon_0}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}$$

c) <u>Estérico</u> <u>Propuesto</u> :)

P2

- Tenemos inicialmente dos condensadores conectados en paralelo



- Cada placa tiene dimensiones  y están separadas por una distancia d

- Luego cada condensador tendrá una capacitancia

$$C_0 = \frac{\varepsilon_0 \overbrace{A}^{\text{Área}}}{d} = \frac{\varepsilon_0 w L}{d}$$

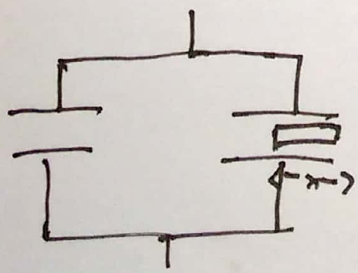
- Como los condensadores estan en paralelo la capacitancia equivalente es: $C_{eq}^{\parallel} = \sum_i C_i$

$$\Rightarrow C_{eq}^{0} = \frac{2\varepsilon_0 w L}{d}$$

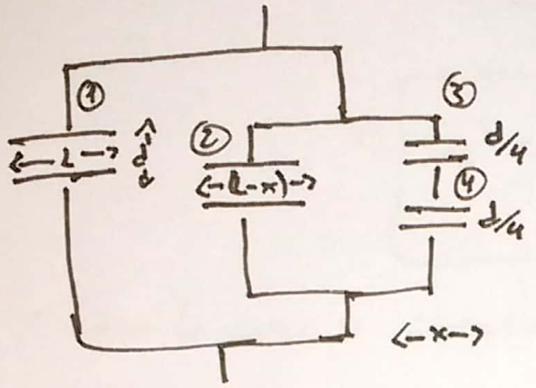
- Calculamos la carga inicial

$$Q_0 = C_{eq}^{0} \cdot V_0 \Rightarrow \boxed{Q_0 = \frac{2\varepsilon_0 w L}{d} V_0}$$

- Luego introducimos un conductor al condensador del lado derecho



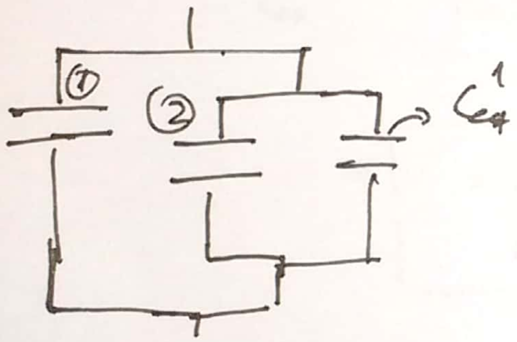
Podemos interpretar este circuito con un circuito equivalente, con distintos condensadores (otras dimensiones)



Donde usando las mismas definiciones anteriores

$$C_3 = C_4 = \frac{\varepsilon_0 \overbrace{w x}^{\text{Nueva Area}}}{\underbrace{d/4}_{\text{Nuevo Ancho}}} = \frac{4 \varepsilon_0 w x}{d}$$

- Juntamos ③ y ④ y el circuito queda

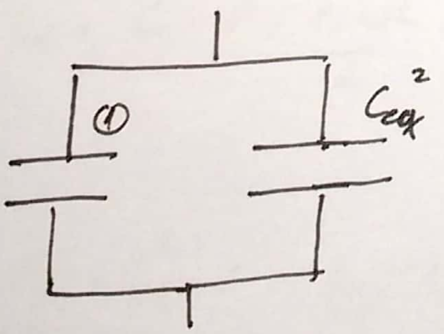


- Donde, como C_3 y C_4 están en serie

$$\left(C_{eq}^1\right)^{-1} = \frac{1}{C_3} + \frac{1}{C_4} = \frac{2}{C_3}$$

$$\Rightarrow \quad C_{eq}^1 = \frac{C_3}{2} = \frac{2 \varepsilon_0 w x}{d}$$

- Volvemos a juntar ② y $C_{eq}^{①}$



- Donde sumamos en paralelo

$$C_{eq}^2 = C_2 + C_{eq}^1$$

$$= \frac{\varepsilon_0 w}{d}(L - x) + \frac{\varepsilon_0 w\, 2x}{d}$$

$$\boxed{C_{eq}^2 = \frac{\varepsilon_0 w}{d}(x + L)}$$

Calculamos la capacitancia equivalente final

$$C_{eq}^{f} = C_1 + C_{eq}^{2} = \frac{\varepsilon_0 w L}{d} + \frac{\varepsilon_0 w}{d}(x+L)$$

$$\Rightarrow \boxed{C_{eq}^{f} = \frac{\varepsilon_0 w}{d}(x+2L)}$$

- Como la carga se conserva, el potencial asociado a esta capacitancia es:

Reemplazamos

$$V' = \frac{Q_0}{C_{eq}^{f}} = \frac{Q_0 \cdot d}{\varepsilon_0 w (x+2L)} = \frac{2\cancel{\varepsilon_0 w} L V_0}{\cancel{d}} \cdot \frac{\cancel{d}}{\cancel{\varepsilon_0 w}(x+2L)}$$

$$\Rightarrow \boxed{V' = \frac{2LV_0}{(x+2L)}}$$

- Como los condensadores estan en paralelo comparten el potencial V', luego es directo sacar las cargas de cada condensador

$$Q_1 = C_1 \cdot V' = \frac{\varepsilon_0 w L}{d} \cdot \frac{2LV_0}{(2L+x)} \Rightarrow \boxed{Q_1 = \frac{2\varepsilon_0 w V_0 L^2}{d(2L+x)}}$$

$$Q_2 = C_{eq}^{2} \cdot V' = \frac{\varepsilon_0 w}{d}(x+L) \cdot \frac{2LV_0}{(x+2L)} = \frac{2LV_0\varepsilon_0 w}{d}\frac{(x+L)}{(x+2L)}$$

$$= \frac{2LV_0\varepsilon_0 w}{d}\frac{[x+L+L-L]}{x+2L} \Rightarrow \boxed{Q_2 = \frac{2LV_0\varepsilon_0 w}{d}\left[1 - \frac{L}{x+2L}\right]}$$

P4) Una esfera de radio a se carga con pot V_0 y se aísla, luego se conecta a tierra a través de un condensador con capacitancia C (Tierra => $V=0$)

a) Calcular el potencial final de la esfera / carga de la esfera / y carga del condensador

- Primero tenemos que saber la carga inicial de la esfera, como sabemos el radio de la esfera y que fue cargada inicialmente con V_0, como el conductor es equipotencial, luego

$$V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a} \Rightarrow \boxed{Q_i = 4\pi\varepsilon_0 a V_0}$$

- Cuando conectamos la esfera al condensador, cambia la carga y el potencial de la esfera. Si Q_{esf} es la carga de la esfera y Q_c carga del condensador, por conservación de la carga:

$$Q_i = Q_{esf} + Q_c \qquad (I)$$

- Además el condensador y la esfera comparten potencial, luego se cumple

$$Q_c = C \cdot V \qquad (II)$$

$$Q_{esf} = 4\pi\varepsilon_0 a V \qquad (III)$$

- Tenemos 3 ecuaciones [(I), (II), (III)] y 3 incógnitas [V, Q_c, Q_{est}]

Podemos resolver:

→ Reemplazando (II), (III) en (I)

$$\Rightarrow Q_i = C \cdot V + 4\pi \varepsilon_0 a V$$

$$\Rightarrow V = \frac{Q_i}{C + 4\pi\varepsilon_0 a} = \frac{4\pi\varepsilon_0 a V}{C + 4\pi\varepsilon_0 a} \Rightarrow \boxed{V = \frac{4\pi\varepsilon_0 a V}{C + 4\pi\varepsilon_0 a}}$$

→ Reemplazamos V en (II) y (III)

$$\Rightarrow \boxed{Q_c = \frac{4\pi\varepsilon_0 a C V_0}{C + 4\pi\varepsilon_0 a}}$$

$$\Rightarrow \boxed{Q_{est} = \frac{(4\pi\varepsilon_0)^2 V_0}{C + 4\pi\varepsilon_0 a}}$$

b) - Debemos hacer balance de energías

Energía inicial → $E_i = \frac{1}{2} \frac{Q_i^2}{4\pi\varepsilon_0 a}$

Recordar que ~~[illegible]~~ la energía de una esfera con carga Q y radio R es

$$U = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 a}$$

Energía final → $E_f = \frac{1}{2} \frac{Q_{est}^2}{4\pi\varepsilon_0 a} + \frac{1}{2} \frac{Q_c^2}{C}$

Esfera Condensador

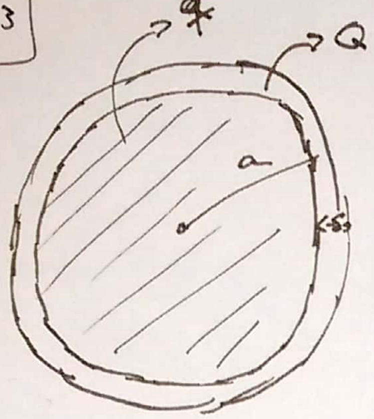
Recordar que para los condensadores

$$U = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} C V^2 = \frac{1}{2} Q V$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta E = E_f - E_i}$$ //

Scanned by CamScanner

P3



a) • Sabemos que dentro el campo es

$$E(r) = k\left(\frac{r}{a}\right)^4 \hat{r}$$

• Usamos la ley de Gauss para calcular la densidad de carga.

$$\Rightarrow \nabla E = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Como E solo va en $\hat{r}$ usamos la divergencia en esféricas

Como $\nabla \cdot = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 \cdot)$

$$\Rightarrow \frac{\rho}{\varepsilon_0} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \cdot \frac{k \cdot r^4}{a^4}\right) = \frac{k}{a^4}\cdot\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial}{\partial r}(r^6) = \frac{k}{a^4}\cdot 6\frac{r^5}{r^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\rho = \frac{6k\varepsilon_0}{a^4}\cdot r^3}$$

• Para saber K, usamos que dentro del cascarón hay una carga q.

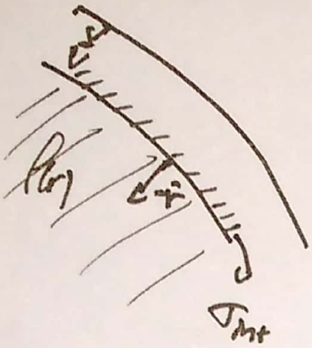
$$\Rightarrow q = \iiint \rho(r)\,dV = \iiint \frac{6k\varepsilon_0}{a^4}\cdot r^3 \cdot r^2 \operatorname{sen}\theta\, dr\, d\theta\, d\phi$$

$$= \frac{6k\varepsilon_0}{a^4}\cdot \underbrace{\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \operatorname{sen}\theta\, d\theta\, d\phi}_{4\pi} \cdot \underbrace{\int_0^a r^5\,dr}_{\frac{a^6}{6}}$$

$$\Rightarrow q = 4\pi k\varepsilon_0 a^2 \Rightarrow k = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a^2}$$

$$\therefore \Rightarrow \boxed{\rho = \frac{6}{4\pi a^6} q r^3}$$

b) • Por propiedades de los conductores la densidad de carga en la sup interna debe ser igual a $\sigma_{int} = \varepsilon_0 E|_{borde}$



$$\Rightarrow E|_{borde} = \frac{\sigma_{int}}{\varepsilon_0} \cdot \hat{n}$$

Como $\vec{E} = \frac{K}{a^4} r^4 \hat{r}$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a^6} r^4 \hat{r}$$

$$\Rightarrow E|_{borde} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a^{\cancel{6}}} \cdot \cancel{a^4} \hat{r} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a^2} \hat{r}$$

$\Rightarrow$

$$\Rightarrow \sigma_{int} = \varepsilon_0 \, E|_{borde} \cdot \hat{n} \qquad ; \quad \hat{n} = -\hat{r}$$

$$= \cancel{\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{4\pi \cancel{\varepsilon_0} a^2} \cdot \underbrace{\cancel{(\hat{r} \cdot -\hat{r})}}_{-1}$$

$$\boxed{\sigma_{int} = \frac{-q}{4\pi a^2}}$$

• Para calcular la densidad de carga superficial exterior, usamos la conservación de la carga, ya que sabemos que en el casquete la carga total es Q

$$\Rightarrow Q = \sigma_{int} \cdot A_{int} + \sigma_{ext} \cdot A_{ext}$$

$$= \sigma_{int} \cdot 4\pi a^2 + \sigma_{ext} \cdot 4\pi (a+\delta)^2$$

$$\Rightarrow Q = \frac{-q}{\cancel{4\pi a^2}} \cdot \cancel{4\pi a^2} + \sigma_{ext} \cdot 4\pi (a+\delta)^2$$

$$\Rightarrow \boxed{\sigma_{ext} = \frac{Q+q}{4\pi (a+\delta)^2}}$$

c) Calculamos el potencial ya que sabemos los campos
Por ley de gauss

$\underline{r<a}$ $\quad E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a^6} r^4 \hat{r}$

$\underline{r>a}$ $\quad E = \frac{q+Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \hat{r}$ → Carga encerrada.

• Integramos

$\underline{r>a}$ $\quad V(r) = -\int_{\infty}^{r} E \cdot dr = -\int_{\infty}^{r} \frac{q+Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} dr$

$$\boxed{V(r) = \frac{q+Q}{4\pi\varepsilon_0 r}}$$

Despreciando δ

$\underline{r>a}$

$$V(r) = -\int_{\infty}^{a} E\, dr - \int_{a}^{r} E\, dr = \frac{q+Q}{4\pi\varepsilon_0 a} - \int_{a}^{r} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a^6} r^4 dr$$

$$\boxed{V(r) = \frac{q+Q}{4\pi\varepsilon_0 a} - \frac{q}{20\pi\varepsilon_0 a^6}\left[r^5 - a^5\right]}$$