Aux #2: Ley de Gauss y un poco de potencial

Repaso: • Ley de Gauss: forma simple de calcular campos eléctricos

- 2 formas:

¡Divergencia! (Se aplica a vectores)

Diferencial: $\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ → Densidad de carga volumétrica

Integral: $\oiint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$ → Carga <u>encerrada</u>

Flujo de campo eléctrico

Importante

- ¿Para qué sirve? → Cálculo simple de $\vec{E}$ en ciertas geometrías, sabiendo la carga encerrada.

→ Geometrías: Esférica, Cilíndrica y Plana

- Pasos a seguir:

  - Intuir la forma del campo eléctrico
  - Crearse una superficie "Gaussiana" tal que el campo eléctrico sea paralelo a las paredes de la superficie
  - Así la parte izq de la forma integral de la ley de gauss es de la forma $E \cdot S_{TOT}$, de donde podemos despejar E.

• Potencial: Como el rotor de $\vec{E}$ es cero en el vacío, se puede escribir como el gradiente de un potencial

$$\vec{E} = -\nabla V \quad \text{→ Definición !!}$$

$$\Rightarrow \quad V - V_0 = -\int \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

→ El cálculo del potencial a partir de un campo eléctrico debe estar sujeto a una <u>referencia</u>, usualmente es el infinito.

P1) El campo eléctrico en una región del espacio es $\vec{E} = kr^3\hat{r}$ en coord esféricas

a) Encontrar la densidad de carga ρ.

- Usamos la ley de Gauss diferencial $\Rightarrow \nabla\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$

- La divergencia en coord esféricas es (si $\vec{A}$ es un vector de la forma $\vec{A} = A_r\hat{r} + A_\theta\hat{\theta} + A_\phi\hat{\phi}$)

$$\nabla\cdot\vec{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\,\text{sen}\theta}\frac{\partial(\text{sen}\theta A_\theta)}{\partial\theta} + \frac{1}{r\,\text{sen}\theta}\frac{\partial A_\phi}{\partial\phi}$$

- En nuestro caso solo tenemos $A_r = kr^3$

$$\Rightarrow \nabla\vec{E} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\cdot kr^3) = \frac{k}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^5) = \frac{k}{\cancel{r^2}}\cdot 5r^{\cancel{4}\,2} = 5kr^2$$

$$\Rightarrow \rho = \varepsilon_0\nabla\cdot E \quad \Rightarrow \boxed{\rho = 5k\varepsilon_0 r^2}$$

b) Encontrar la carga total encerrada en una esfera de radio R centrada en el origen

→ Veamos dos formas

- Por ley de Gauss integral: $Q = \varepsilon_0 \oint\!\!\oint \vec{E}\cdot d\vec{s}$ → $d\vec{s}$ en esféricas es $d\vec{s} = R^2\,\text{sen}\theta\, d\theta\, d\phi\,\hat{r}$

Integral no depende de r!!

$$= \varepsilon_0\iint kR^3\hat{r}\cdot R^2\,\text{sen}\theta\, d\theta\, d\phi\,\hat{r} = \varepsilon_0 k R^5 \underbrace{\iint \text{sen}\theta\, d\theta\, d\phi}_{4\pi}$$

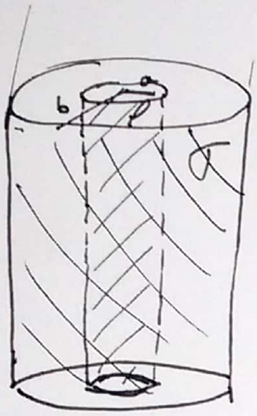
$$\Rightarrow \boxed{Q = 4\pi k\varepsilon_0 R^5}$$

- Por integración Directa: $Q = \int_V \rho\, dV$ → Elemento de volumen, $dV = r^2\,\text{sen}\theta\, dr\, d\theta\, d\phi$ en esféricas

$$= \iiint 5k\varepsilon_0\, r^2\cdot r^2\,\text{sen}\theta\, dr\, d\theta\, d\phi$$

$$= 5k\varepsilon_0 \underbrace{\iint \text{sen}\theta\, d\theta\, d\phi}_{4\pi}\ \underbrace{\int_0^R r^4\, dr}_{\frac{1}{5}R^5} \Rightarrow Q = 4\pi k\varepsilon_0 R^5 \;//$$

P2] cable coaxial: Tenemos un cable muy largo compuesto por un cilindro sólido interior de radio a, con densidad de carga volumétrica ρ y por un casquete cilíndrico de radio b con densidad superficial σ tal que el cable sea eléctricamente neutro, calcular el campo en todo el espacio

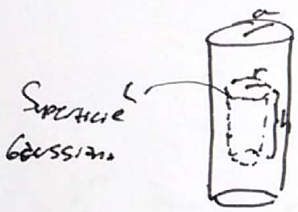


- Separamos el espacio en 3 zonas de interés

- 1^{era} zona $r < a$

Por temas de notación usamos r como coordenada cilíndrica también

→ Usamos ley de Gauss integral.



→ Como el cable es muy largo, intuimos que este será radial, o

$$\vec{E}(r) = E(r)\,\hat{r}$$

→ Por lo que las tapas no afectan y luego la ley de Gauss es de la forma

$$\iint \vec{E}\cdot d\vec{S} = E(r)\cdot A_{\text{manto del cilindro}} = E(r)\cdot \underbrace{2\pi r\cdot h}_{\text{Area del manto de Cilindro}}$$

→ ¿Cuánto vale el lado derecho?

→ Mucho ojo con que necesitamos la carga total encerrada en la superficie gaussiana

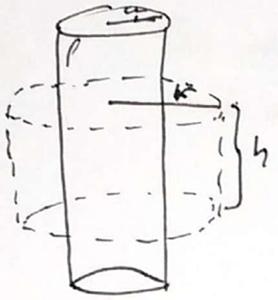
$$\Rightarrow \frac{Q}{\varepsilon_0} = \underbrace{\pi r^2\cdot h}_{\text{Volumen de un cilindro}}\cdot \rho \cdot \frac{1}{\varepsilon_0}$$

→ Igualamos

$$\Rightarrow E(r)\cdot \cancel{2\pi} r \cancel{h} = \frac{\cancel{\pi} r^{\cancel{2}} \cancel{h}\,\rho}{\varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{\vec{E}(r) = \frac{\rho r}{2\varepsilon_0}\,\hat{r}} \quad \text{Si } r < a$$

- 2da Zona $a < r < b$

→ Hacemos los mismos supuestos que la zona interior sólo cambia la carga encerrada



$$\Rightarrow \iint \vec{E} \cdot d\vec{S} = E(r) \cdot 2\pi r h$$

$$\Rightarrow \frac{Q}{\varepsilon_0} = \underbrace{\pi a^2 h}_{\text{Volumen del Cilindro "completo" de altura } h} \cdot \rho \cdot \frac{1}{\varepsilon_0}$$

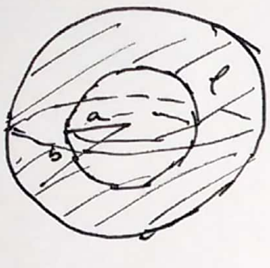
$$\Rightarrow E(r) \cdot 2\pi r \cancel{h} = \frac{\pi a^2 \cancel{h} \rho}{\varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{\vec{E}(r) = \frac{a^2 \rho}{2\varepsilon_0 r} \hat{r}} \quad a < r < b$$

- 3ra Zona $r > b$

→ Como el cable es ~~neto~~ de carga nula, el campo es cero

$$\therefore \boxed{\vec{E} = 0} \quad r > b$$

P3] Considerar la distribución volumétrica: $\rho(r) = \frac{k}{r^2}$ si $a<r<b$, encontrar el campo en todo el espacio:



-> Para resolver este problema ~~...~~ tratamos de reescribir esta distribución usando el principio de superposición

$\rho_1(r) = \frac{k}{r^2} \quad 0<r<b$

$\rho_2(r) = -\frac{k}{r^2} \quad 0<r<a$

$\Rightarrow \rho(r) = \rho_1(r) + \rho_2(r)$

-> Con estas distribuciones, podemos sacar los campos fácilmente usando el principio de superposición y una densidad de carga genérica

$\rho'(r) = \frac{k'}{r^2} \quad 0<r<R$

• Dentro de la Esfera, usamos la ley de Gauss

$\rightarrow \iint \vec{E}(r)\, d\vec{S} = E(r)\cdot \underbrace{4\pi r^2}_{\text{Area de la Superficie Gaussiana}}$

OJO!!

$\Rightarrow \frac{Q}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0}\iiint \frac{k}{\cancel{r^2}}\cdot\cancel{r^2}\sin\theta\, dr\, d\theta\, d\phi = \frac{k}{\varepsilon_0}\underbrace{\iint \sin\theta\, d\theta\, d\phi}_{4\pi}\int_0^r dr$

$= \frac{4\pi k r}{\varepsilon_0}$

$\Rightarrow E\cdot \cancel{4\pi r^2} = \frac{\cancel{4\pi} k' \cancel{r}}{\varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{\vec{E} = \frac{k'}{\varepsilon_0 r}\hat{r}}$

• Fuera de la esfera es equivalente:

$$\rightarrow \iint \vec{E}\cdot d\vec{s} = E(r)\cdot 4\pi r^2$$

0.50

$$\rightarrow \frac{Q}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0}\iiint \frac{k'}{\cancel{r^2}}\cancel{r^2}\,\mathrm{sen}\,\theta\, dr\, d\theta\, d\phi = \frac{k'}{\varepsilon_0}\underbrace{\iint \mathrm{sen}\,\theta\, d\theta\, d\phi}_{4\pi}\int_0^R dr = \frac{4\pi k' R}{\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow E(r)\cdot 4\pi r^2 = \frac{4\pi k' R}{\varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{\vec{E}(r) = \frac{k' R}{\varepsilon_0 r^2}\,\hat{r}}$$

• Con esto tenemos los campos para ρ_1 y ρ_2

$$\Rightarrow \vec{E}_1^{in} = \frac{k}{\varepsilon_0 r}\,\hat{r} \quad 0 \leq r \leq b \quad , \quad \vec{E}_1^{out} = \frac{kb}{\varepsilon_0 r^2}\,\hat{r} \quad b < r$$

$$\Rightarrow \vec{E}_2^{in} = -\frac{k}{\varepsilon_0 r}\,\hat{r} \quad 0 \leq r \leq a \quad , \quad \vec{E}_2^{out} = -\frac{ka}{\varepsilon_0 r^2}\,\hat{r} \quad a < r$$

• Luego las distintas zonas serán una superposición de estos campos

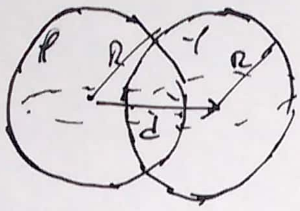
$$\Rightarrow \text{Si } r < a \qquad E_{tot} = E_1^{in} + E_2^{in} = \frac{k}{\varepsilon_0 r} + \frac{(-k)}{\varepsilon_0 r} = 0 \Rightarrow E_{tot} = 0$$

$$\Rightarrow \text{Si } a < r < b \qquad E_{tot} = E_1^{in} + E_2^{out} = \frac{k}{\varepsilon_0 r} + \frac{(-k)a}{\varepsilon_0 r^2} \Rightarrow \vec{E}_{tot} = \frac{k}{\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r} - \frac{a}{r^2}\right)\hat{r}$$

$$\Rightarrow \text{Si } b < r$$

$$E_{tot} = E_1^{out} + E_2^{out} = \frac{kb}{\varepsilon_0 r^2} + \frac{(-k)a}{\varepsilon_0 r^2} \Rightarrow E_{tot} = \frac{k}{\varepsilon_0 r^2}(b-a)$$

4) Tenemos dos esferas intersectadas, Mostrar que el campo en su intersección es constante



- Usando ley de Gauss calculamos el campo de una esfera cargada de radio R

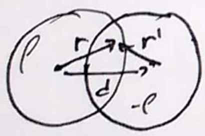
r≤R]

$$E\cdot 4\pi r^2 = \frac{4}{3}\pi r^3 \cdot \frac{\rho}{\varepsilon_0} \Rightarrow \vec{E} = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}\hat{r} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\vec{r}$$

r>R]

$$E\cdot 4\pi r^2 = \frac{4}{3}\pi R^3 \cdot \frac{\rho}{\varepsilon_0} \Rightarrow \vec{E} = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2}\hat{r}$$ //

- Ahora si tomamos un punto P en la intersección



- El campo en P que produce ρ será

$$E_1 = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\vec{r}$$

- El campo en P que produce −ρ será

$$E_2 = \frac{-\rho}{3\varepsilon_0}\vec{r}\,'$$

Distintos!

- Usando el principio de superposición $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\left(\vec{r} - \vec{r}\,'\right)$

- Usamos la identidad vectorial $\vec{r} = \vec{d} + \vec{r}\,' \Rightarrow \vec{r}\,' = \vec{r} - \vec{d}$, reemplazamos

$$\Rightarrow \vec{E} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\left(\cancel{\vec{r}} - \cancel{\vec{r}} + \vec{d}\right) \Rightarrow \boxed{E = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\vec{d}}$$ //

Con $\vec{d}$ vector constante