



## Ejercicio #4 - Mecánica Lagrangiana

FI2001-1 - Verano - 17 de enero del 2018

Profesor: Claudio Romero - Auxiliar: Esteban Rodríguez<sup>1</sup> - Ayudante: Miguel Sepúlveda  
*Departamento de Física, Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas, Universidad de Chile*

**P1.** Considere una masa  $M$  libre de deslizarse en un plano inclinado caracterizado por un ángulo  $\beta$ . Un péndulo de largo  $l$  y masa  $m$  cuelga de la masa  $M$ , tal como se muestra en la figura. Determine las ecuaciones de movimiento.

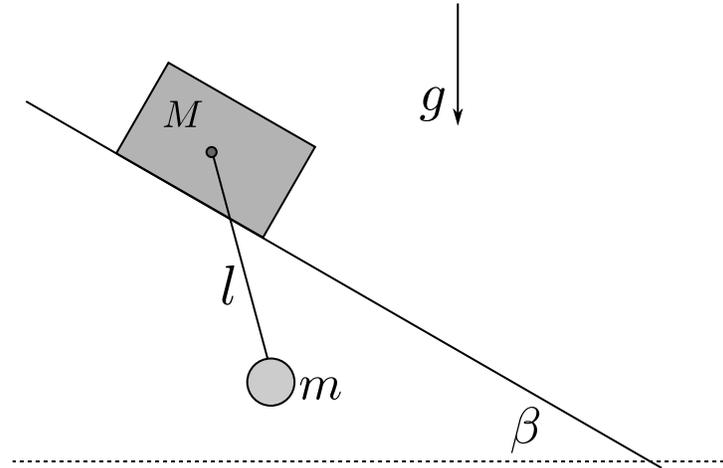
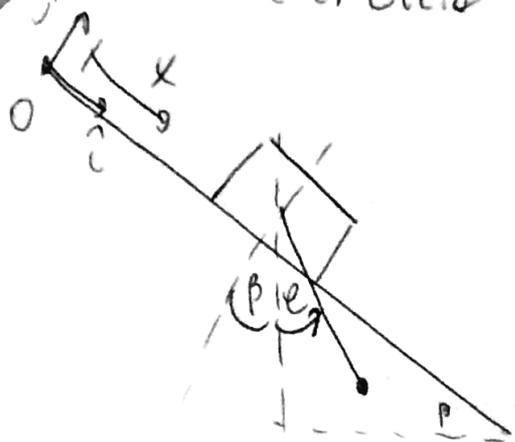


Figura 1: Problema 1

**Observación:** indique claramente los grados de libertad que usará. No son únicos, su respuesta dependerá de su elección.

<sup>1</sup>esteban.rodriguez.m@ing.uchile.cl

Parte ejercicio #4



• 2 grados de libertad,  $\theta$  y  $x$

$$\vec{r}_m = x \hat{i} + l (\sin(\beta + \theta) \hat{i} - \cos(\beta + \theta) \hat{j})$$

$$\vec{v}_m = (\dot{x} + l \cos(\beta + \theta) \dot{\theta}) \hat{i} + l \sin(\beta + \theta) \dot{\theta} \hat{j}$$

$$\vec{r}_m = x \hat{i}, \quad \vec{v}_m = \dot{x} \hat{i}$$

$$T = \frac{M}{2} \dot{x}^2 + \frac{m}{2} ((\dot{x} + l \cos(\beta + \theta) \dot{\theta})^2 + (l \sin(\beta + \theta) \dot{\theta})^2)$$

$$= \frac{M}{2} \dot{x}^2 + \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + 2\dot{x}l \cos(\beta + \theta) \dot{\theta} + l^2 \dot{\theta}^2)$$

$$V = -M g x \sin \beta - m g (x \sin \beta + l \cos \theta)$$



$$\therefore \mathcal{L} = \frac{M}{2} \dot{x}^2 + \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + 2\dot{x}l \cos(\beta + \theta) \dot{\theta} + l^2 \dot{\theta}^2) + M g x \sin \beta + m g (x \sin \beta + l \cos \theta)$$

X

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = M \dot{x} + m \dot{x} + m \dot{\theta} l \cos(\beta + \theta)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = M g \sin \beta + m g \sin \beta$$

$$\therefore M \ddot{x} + m \ddot{x} + m \ddot{\theta} l \cos(\beta + \theta) - m \dot{\theta}^2 l \sin(\beta + \theta) - (M g + m g) \sin \beta = 0$$

$$\rightarrow (M + m) \ddot{x} + m l \cos(\beta + \theta) \ddot{\theta} - m l \sin(\beta + \theta) \dot{\theta}^2 - (M g + m g) \sin \beta = 0$$

e)

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = m \dot{x} l \cos(\theta + \varphi) + ml^2 \dot{\varphi}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = -m \dot{x} \dot{\varphi} l \sin(\theta + \varphi) - m g l \sin \theta$$

$$\rightarrow m l (\ddot{x} \cos(\theta + \varphi) - \dot{x} \sin(\theta + \varphi) \dot{\varphi}) + ml^2 \ddot{\varphi} + m \dot{x} \dot{\varphi} l \sin(\theta + \varphi) + m g l \sin \theta = 0$$

$$\rightarrow m l \cos(\theta + \varphi) \ddot{x} + ml^2 \ddot{\varphi} + m g l \sin \theta = 0$$