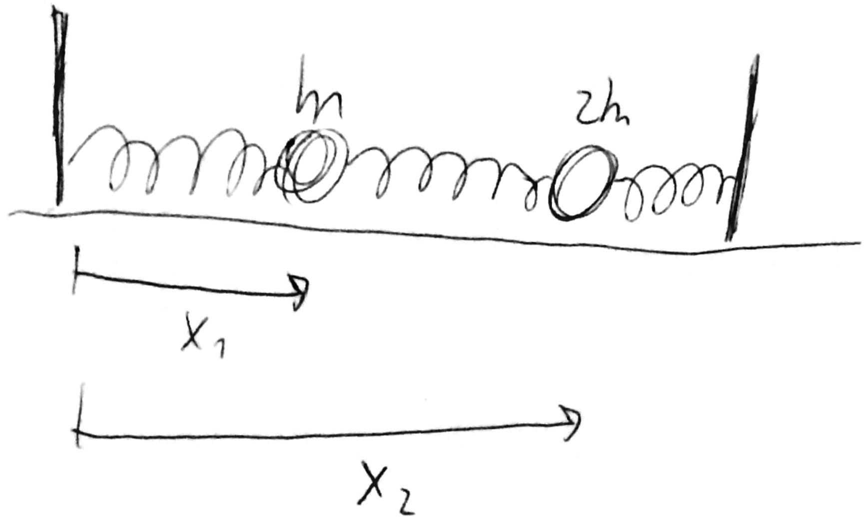


$$T = \frac{m\dot{x}_1^2}{2} + \frac{2m\dot{x}_2^2}{2} \quad , \quad V = \frac{k}{2}(x_1 - l_0)^2 + \frac{k}{2}(x_2 - x_1 - l_0)^2 + \frac{k}{2}(3l_0 - x_2 - l_0)^2$$

- Recordemos que en el equilibrio, el gradiente del potencial es nulo ($\vec{F}_{neta} = 0$)

$$\frac{\partial V}{\partial x_1} = k(x_1^* - l_0) - k(x_2^* - x_1^* - l_0) = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial x_2} = k(x_2^* - x_1^* - l_0) - k(2l_0 - x_2^*) = 0$$

$$\rightarrow x_2^* = 2l_0 \quad , \quad x_1^* = l_0 \text{ (tiene sentido)}$$

- Cambiamos la coordenada a la desviación del equilibrio

$$q_1 = x_1 - l_0$$

$$q_2 = x_2 - 2l_0$$

$$\rightarrow K = \frac{m\dot{f}_1^2}{2} + \frac{2m\dot{f}_2^2}{2} \quad , \quad V = \frac{K}{2}f_1^2 + \frac{K}{2}(f_2 - f_1)^2 + \frac{Kf_2^2}{2}$$

Nota: Los términos lineales en V siempre se van al hacer este cambio de coordenadas. Podemos ignorar las constantes.

$$\therefore \mathcal{L} = \frac{1}{2}\left(m\dot{f}_1^2 + 2m\dot{f}_2^2\right) - \frac{1}{2}\left(Kf_1^2 + K(f_2 - f_1)^2 + Kf_2^2\right)$$

- es posible escribir T y V como formas cuadráticas, haciendo aproximaciones de segundo orden. En este caso no es necesario pues nada es de orden superior a 2.

- el plan es entonces escribir

$$L = \frac{1}{2}\dot{\vec{f}}^{\,t}\,\mathbb{T}\,\dot{\vec{f}} - \frac{1}{2}\vec{f}^{\,t}\,\mathbb{V}\,\vec{f}$$

- $$\frac{1}{2}\left(m\dot{f}_1^2 + 2m\dot{f}_2^2\right) = \frac{1}{2}\left[\dot{f}_1(m\dot{f}_1 + 0\cdot\dot{f}_2) + \dot{f}_2(0\cdot\dot{f}_1 + 2m\dot{f}_2)\right] = \frac{1}{2}\dot{\vec{f}}^{\,t}\overbrace{\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & 2m \end{bmatrix}}^{\mathbb{T}}\dot{\vec{f}}$$

- $$\frac{1}{2}\left(Kf_1^2 + Kf_2^2 - 2Kf_1f_2 + Kf_1^2 + Kf_2^2\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(2Kf_1^2 - 2Kf_1f_2 + 2Kf_2^2\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left[f_1(2Kf_1 - Kf_2) + f_2(-Kf_1 + 2Kf_2)\right] = \frac{1}{2}\vec{f}^{\,t}\overbrace{\begin{bmatrix} 2K & -K \\ -K & 2K \end{bmatrix}}^{\mathbb{V}}\vec{f}$$

- la idea es factorizar para que la matriz sea fácil de encontrar.

Usando las ecuaciones de euler lagrange, y proponiendo una solución del tipo $\vec{q} = c e^{iwt} \vec{a}$, se llega a que $\vec{a}$ (los factores escalares) debe cumplir

$$(\mathbb{V} - w^2 \mathbb{T}) \vec{a} = 0$$

y esto solo es posible si w es tal que

$$\det(\mathbb{V} - w^2 \mathbb{T}) = 0$$

$$\rightarrow \det \begin{bmatrix} 2K - w^2 m & -K \\ -K & 2K - w^2 2m \end{bmatrix} = 0$$

$$\rightarrow (2K - w^2 m)(2K - 2m w^2) - K^2 = 0$$

$$\rightarrow w^4 - \frac{3K}{m} w^2 + \frac{3K^2}{2m^2} = 0$$

$$\rightarrow w_1^2 = \frac{(3+\sqrt{3})}{2} \frac{K}{m} \quad ; \quad w_2^2 = \frac{(3-\sqrt{3})}{2} \frac{K}{m}$$

las que son las frecuencias propias de oscilación

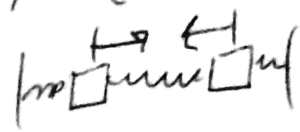
c) Los vectores propios de $\mathbb{V} - w^2 \mathbb{T}$, $\vec{a}$, nos dicen cuales son los modos normales de oscilación

$\underline{w_1}$

$$(\mathbb{V} - w_1^2 \mathbb{T}) \vec{a} = 0 \rightarrow (-m w_1^2 + 2K) a_1 - K a_2 = 0$$

$$\rightarrow \left(-m \frac{(3+\sqrt{3})}{2} \frac{K}{m} + 2K\right) a_1 - K a_2 = 0$$

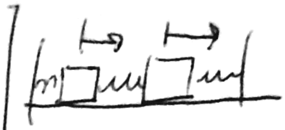
$\rightarrow \left[2-\frac{(3+\sqrt{3})}{2}\right] a_1 = a_2 \rightarrow \frac{(1-\sqrt{3})}{2} X_1 = X_2$



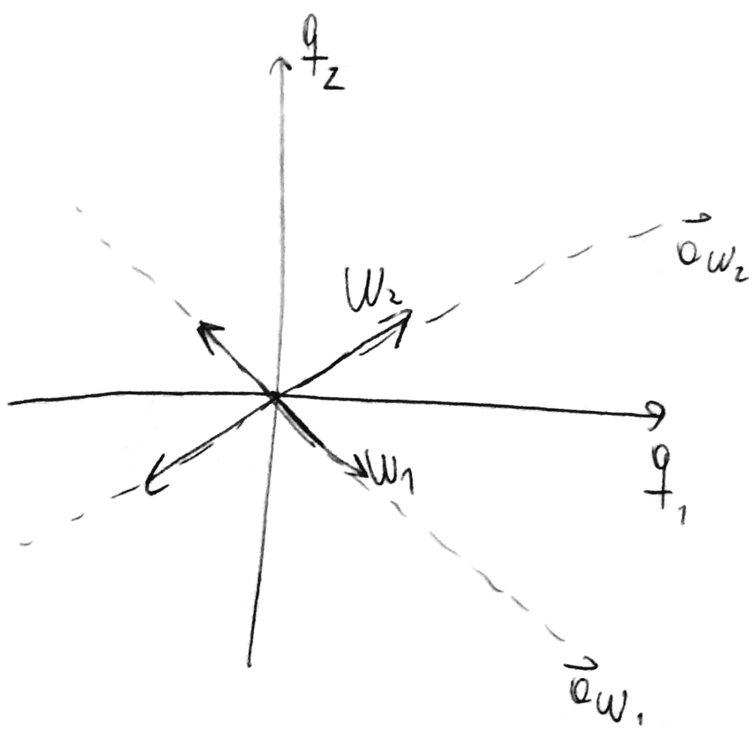
$\rightarrow \vec{a}_{w_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1-\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$, cual quier múltiplo sirve

$\underline{W_2}$

$(\mathbb{V} - W_2^2 \mathbb{T})\, \vec{a}_{w_2} = 0 \rightarrow \vec{a}_{w_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1+\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$

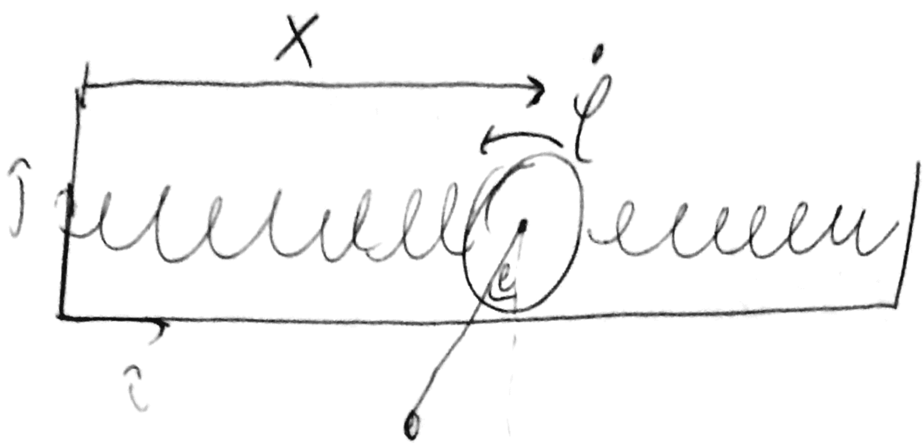


- este resultado significa que el sistema oscilará en las direcciones $\vec{a}_{w_1}$ y $\vec{a}_{w_2}$ con frecuencias W_1 y W_2, respectivamente.



- $\vec{q}$ es la suma de múltiplos de $\vec{a}_{w_1}$ y $\vec{a}_{w_2}$ que oscilan.

do P2



- 3 Coordenadas: X, el desplazamiento, φ, la variación angular del sólido y θ, el ángulo del péndulo.

- Rodar sin resbalar $\rightarrow \dot x = a\dot\varphi$

$$T_{Disco} = \frac{I_{cm}\dot\varphi^2}{2} + \frac{mV_{cm}^2}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{m\cancel{a^2}}{2}\frac{\dot x^2}{\cancel{a^2}} + \frac{m\dot x^2}{2}$$

$$\vec r_m = (x - l\sin\theta)\hat i - l\cos\theta\,\hat j$$

$$\vec V_m = (\dot x - l\dot\theta\cos\theta)\hat i + l\dot\theta\sin\theta\,\hat j$$

$$T_{pend} = \frac{m}{2}\left(\dot x - 2l\dot x\dot\theta\cos\theta + l^2\dot\theta^2\right)$$

$$\therefore T = \frac{3M\dot{x}^2}{4} + \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 - 2l\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta + l^2\dot{\theta}^2\right)$$

$$V = \frac{K}{2}\left((x-R/2)^2 + (R-x-R/2)^2\right) - mgl\cos\theta$$

$$= K(x-R/2)^2 - mgl\cos\theta$$

En el eq., $\nabla V = 0$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 2K(\bar{x}-R/2) = 0 \rightarrow \bar{x} = R/2$$

$$\frac{\partial V}{\partial \theta} = -mgl\sin\theta = 0 \rightarrow \bar{\theta} = 0$$

Hacemos el cambio $y = x - R/2$, con $\dot{y} = \dot{x}$

En pequeñas oscilaciones

$$T = \frac{3M\cancel{\dot{y}}^2}{4} + \frac{m}{2}\left(\cancel{\dot{y}}^2 - 2l\cancel{\dot{y}}\dot{\theta}\underbrace{\left(1-\frac{\theta^2}{2}\right)}_{\sim\cos\theta} + l^2\dot{\theta}^2\right)$$

$$= \frac{3M\cancel{\dot{y}}^2}{4} + \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 - 2l\cancel{\dot{y}}\dot{\theta} + \cancel{2l\dot{y}\dot{\theta}\frac{\theta^2}{2}} + l^2\dot{\theta}^2\right)$$

$O(\varepsilon^3)$

orden superior

$$V = K\cancel{y}^2 - mgl\left(1 - \cancel{\cos\theta}\,\frac{\theta^2}{2}\right)$$

$$\text{“}=\text{”}\ Ky^2 + mgl\,\frac{\theta^2}{2}\ \text{(ignoramos las constantes)}$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left[\frac{3m}{2}\dot{y}^2 + m\dot{y}^2 - 2m\,l\,\dot{y}\,\dot{\theta} + m\,l^2\dot{\theta}^2\right] - \frac{1}{2}\left[2Ky^2 + mgl\,\theta^2\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\begin{array}{l} \dot{y}\left(\left(\frac{3m}{2}+m\right)\dot{y} - m\,l\,\dot{\theta}\right) \\ \dot{\theta}\left(-m\,l\,\dot{y} + m\,l^2\dot{\theta}\right)\end{array}\right]$$

$$-\frac{1}{2}\left[\begin{array}{l} y\left(2Ky + 0\cdot\theta\right) \\ +\,\theta\left(0\cdot y + mgl\,\theta\right)\end{array}\right]$$

$2m = M$

$\longrightarrow$ $\mathbb{T} = \begin{bmatrix} 4m & -ml \\ -ml & ml^2 \end{bmatrix}$, $\mathbb{V} = \begin{bmatrix} 2K & 0 \\ 0 & mgl \end{bmatrix}$

$2mg = KL$

buscamos ω t.q.

$$\det(-\omega^2\mathbb{T} + \mathbb{V}) = 0$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} 2K - \omega^2 4m & ml\omega^2 \\ ml\omega^2 & -ml^2\omega^2 + mgl \end{bmatrix}\right) = 0$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} 4m\left(-\omega^2 + \frac{K}{2m}\right) & ml\omega^2 \\ ml\omega^2 & ml^2\left(-\omega^2 + g/l\right) \end{bmatrix}\right) = 0$$

$$\rightarrow\; 4m^2l^2\left(\frac{g}{l} - \omega^2\right)^2 - m^2l^2\omega^4 = 0$$

$$\rightarrow\; \omega^4 = 4\left(\frac{g}{l} - \omega^2\right)^2$$

$$\rightarrow\; \omega^2 = \pm\, 2\left(\frac{g}{l} - \omega^2\right)$$

$\rightarrow \quad \omega_1^2 = \frac{2g}{3l} \quad , \quad \omega_2^2 = \frac{2g}{l}$

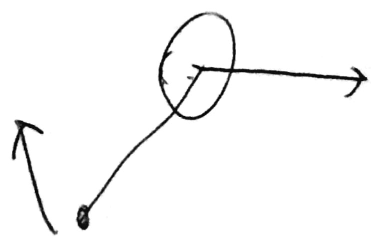
b) buscamos los vectores propios

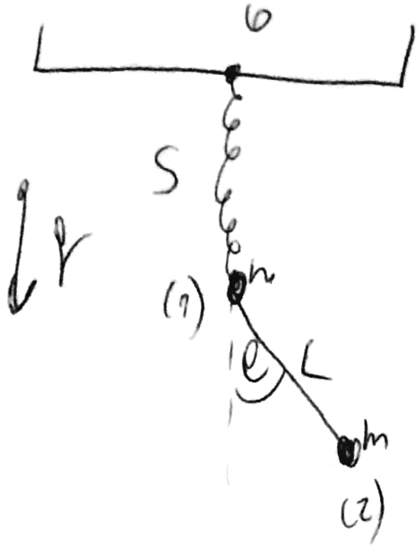
$\underline{\omega_1}$

$$\begin{bmatrix} 4m\left(\frac{g}{l} - \frac{2g}{3l}\right) & ml\,\frac{2g}{3l} \\ ml\,\frac{2g}{3l} & ml^2\left(-\frac{2g}{3l} + \frac{g}{l}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \theta_1 = -\frac{l}{2}\theta_2 \rightarrow \hat{e}_1 = \begin{bmatrix} -l/2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Análogamente $\hat{e}_2 = \begin{bmatrix} l/2 \\ 1 \end{bmatrix}$





a) $V = \frac{K(S-l_0)^2}{2} - mgS - mg(S + L\cos\theta)$

$\left.\frac{\partial V}{\partial S}\right|_{S_{eq}} = 0 \rightarrow S_{eq} = \frac{2mg}{K} + l_0$

$\left.\frac{\partial V}{\partial \theta}\right|_{\theta_{eq}} = 0 \rightarrow \theta_{eq} = 0$

b) buscamos el lagrangiano $(T+V)$

$\vec{r}_1 = -S\hat{j} \rightarrow \dot{\vec{r}}_1 = -\dot{S}\hat{j}$

$\vec{r}_2 = -S\hat{j} + L(\sin\theta\,\hat{i} - \cos\theta\,\hat{j})$

$\rightarrow \vec{V}_2 = -\dot{S}\hat{j} + L\dot{\theta}(\cos\theta\,\hat{i} + \sin\theta\,\hat{j})$

$\therefore T = \frac{m\dot{S}^2}{2} + \frac{m}{2}\left((L\dot{\theta}\cos\theta)^2 + (L\dot{\theta}\sin\theta - \dot{S})^2\right)$

Con el cambio usual $\xi = S - \frac{2mg}{K} - l_0$

$T = \frac{m\dot{\xi}^2}{2} + \frac{m}{2}\left(L^2\dot{\theta}^2\cos^2\theta + L^2\dot{\theta}^2\sin^2\theta - 2L\dot{\theta}\dot{\xi}\sin\theta + \dot{\xi}^2\right)$

$= \frac{m}{2}\left(2\dot{\xi}^2 + L^2\dot{\theta}^2 - 2L\dot{\theta}\dot{\xi}\sin\theta\right)$

Aproximando a segundo orden:

$$T = \frac{1}{2}\left(2m\,\dot{q}^2 + mL^2\dot{\theta}^2 \cancel{- 2L\dot{\theta}\dot{q}\theta}\right)$$

orden superior

$$\rightarrow \mathbb{T} = \begin{bmatrix} 2m & 0 \\ 0 & mL^2 \end{bmatrix}$$

$$V = \frac{K}{2}(S - l_0)^2 - mgS - mg(S + L\cos\theta)$$

$$q = S - \frac{2mg}{K} - l_0$$

$$\rightarrow V = \frac{K}{2}\left(q + \frac{2mg}{K}\right)^2 - 2mg\left(q + \frac{2mg}{K} - l_0\right) - mgL\cos\theta$$

$$\text{“}=\text{”}\ \frac{K}{2}q_1^2 - mgL\cos\theta$$ (se expandió y No se tomaron en cuenta las constantes

$$= \frac{Kq_1^2}{2} - mgL\left(1 - \frac{\theta^2}{2}\right)$$ (aprox de 2do orden)

$$\text{“}=\text{”}\ \frac{Kq_1^2}{2} + \frac{mgL\theta^2}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\left(Kq_1^2 + mgL\theta^2\right) \rightarrow \mathbb{V} = \begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & mgL \end{bmatrix}$$

buscamos w tq $\det(\mathbb{V} - w^2\mathbb{T}) = 0$

$$\det\begin{pmatrix} K - w^2 2m & 0 \\ 0 & -mw^2L^2 + mgL \end{pmatrix} = 0 \rightarrow \begin{matrix} w_1^2 = \dfrac{K}{2m} \\ w_2^2 = \dfrac{g}{L} \end{matrix}$$

P3

ω_1 buscamos los modos:

$$\begin{bmatrix} K-\left(\frac{K}{2m}\right)\cdot 2m & 0 \\ 0 & -mL^2\left(\frac{K}{2m}\right)+mgL\end{bmatrix}\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2\end{bmatrix} = \vec{0}$$

$$\to \left(m\frac{K}{2m}L^2+mgL\right)e_2 = 0 \to e_2 = 0$$

y e_1 es libre:

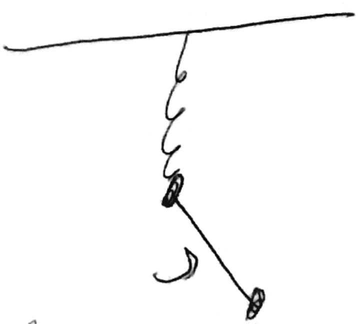
$$\hat{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ω_2

$$\begin{bmatrix} K-2m\omega_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2\end{bmatrix} = \vec{0}$$

$\to e_2$ libre, $e_1 = 0$

$$\hat{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$



- $\mathbb{V}-\omega^2\mathbb{T}$ es diagonal por que elegimos una base que es "representante" de los modos normales