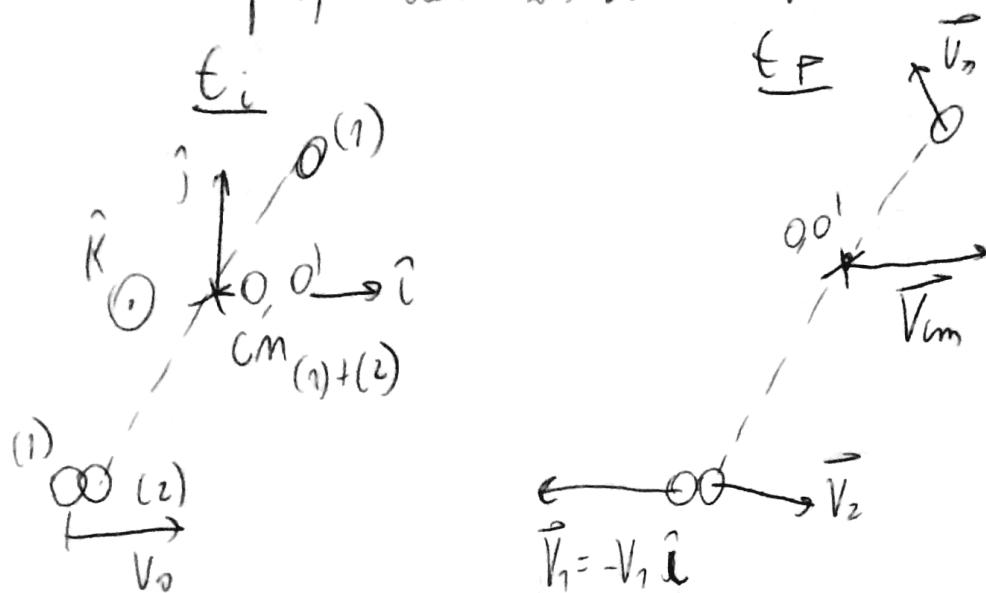


ente auxiliar #10

P1] la idea es usar conservación de $\vec{L} \equiv \gamma \vec{P}$,
además de prop. del sólido rígido.



- O' fijo al CM, no rote. O inercial
- No conocemos la dirección de $\vec{V}_2$ y $\vec{V}_3$
- Pero sabemos que c/r a O' ~~no se mueve~~ su movimiento es puramente rotacional (es rígido)

$$\vec{V}_2 = \vec{V}_{cm} + \vec{V}_2' = \vec{V}_{cm} + \vec{\omega} \times \vec{r}_2'$$

$$\vec{V}_3 = \vec{V}_{cm} + \vec{\omega} \times \vec{r}_3'$$

- Como los brazos son iguales, $\vec{r}_3' = \frac{L}{2} (\cos(\frac{\pi}{4}) \vec{i} + \sin(\frac{\pi}{4}) \vec{j})$

$$= \frac{L}{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} (\vec{i} + \vec{j}) \right)$$

$$= \frac{\sqrt{2}L}{4} (\vec{i} + \vec{j})$$

$$\text{y } \vec{r}_2' = -\frac{\sqrt{2}L}{4} (\vec{i} + \vec{j})$$

$$\vec{V}_2 = \vec{V}_{cm} + \vec{\omega} \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{4} L (\hat{i} + \hat{j}) \right) \quad (1)$$

$$\vec{V}_3 = \vec{V}_{cm} + \vec{\omega} \times \left(\frac{\sqrt{3}}{4} L (\hat{i} + \hat{j}) \right) \quad (2)$$

• Conservación de $\vec{L}$:

$$\begin{aligned} \vec{L}_0 &= \sum_i \vec{r}_i \times m_i \vec{V}_i = -\frac{\sqrt{3}}{4} L m (\hat{i} + \hat{j}) \times V_0 \hat{i} \quad (\text{pues } \vec{r}_1 = \vec{r}_2 = \vec{r}_3) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} L m V_0 \hat{k} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{L}_0^f &= \vec{r}_1 \times m(-V_1 \hat{i}) + \vec{r}_2 \times m \vec{V}_2 + \vec{r}_3 \times m \vec{V}_3 \\ &= -\frac{\sqrt{3}}{4} L m V_1 \hat{k} - \frac{\sqrt{3}}{4} L m (\hat{i} + \hat{j}) \times \vec{V}_2 + \frac{\sqrt{3}}{4} L m (\hat{i} + \hat{j}) \times \vec{V}_3 \quad (3) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} L m V_0 \hat{k} \end{aligned}$$

• Conservación de $\vec{P}$, con vide mirar (2)+(3) ~~obteniendo~~ obteniendo con (1)

$$\begin{aligned} m V_0 \hat{i} &= -m V_1 \hat{i} + \vec{V}_2 m + \vec{V}_3 m \\ &= -m V_1 \hat{i} + \vec{V}_{cm} \cdot 2m \end{aligned}$$

$$\rightarrow \vec{V}_{cm} = \left(\frac{V_0 + V_1}{2} \right) \hat{i} \quad (4)$$

• Conservación de E:

$$m V_0^2 = m V_1^2 + m V_2^2 + m V_3^2 = m V_1^2 + 2m V_{cm}^2 + \frac{\vec{\omega}^T \vec{I}_{cm} \vec{\omega}}{2}$$

$$\bullet (\hat{1} + 3) \times (WR \times \vec{r}_1) = \frac{\sqrt{3}}{2} LWK$$

$$\therefore -V_1 \hat{K} + \left(\frac{V_0 + V_1}{2} \right) \hat{K} + \frac{\sqrt{3}}{2} LW \hat{K} - \left(\frac{V_0 + V_1}{2} \right) \hat{K} + \frac{\sqrt{3}}{2} LW \hat{K} \\ = V_0 \hat{K}$$

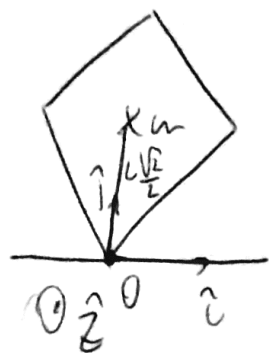
$$\rightarrow -V_1 + \sqrt{3} LW = V_0$$

$$\rightarrow V_1 = \sqrt{3} LW - V_0$$

$$[LW] = \left[\frac{\text{m} \cdot \text{m}}{\text{s}} \right] \checkmark$$

$$\therefore W = \frac{1}{3L^2} (\sqrt{3} LW) (\sqrt{3} LW - V_0)$$

e) el punto de contacto esté en reposo. Conviene usar conservación de la energía, y un sist. de referencia con origen en el punto de contacto.



$$E_i = Mg \frac{L}{2} = \frac{MgL}{2} + \frac{\vec{\omega}^T I_P \vec{\omega}}{2} = E_f$$

Como $\vec{\omega} = \omega \hat{R}$, paralelo a un eje principal del cuadrado, se tiene que

$$I_P \vec{\omega} = I_{zz} \omega \hat{R}$$

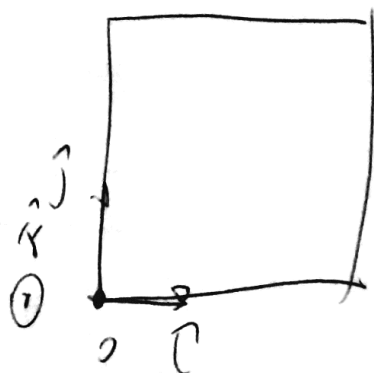
$$\therefore E_i = Mg \frac{L}{2} = \frac{MgL}{2} + \frac{I_{zz} \omega^2}{2} \quad (1)$$

• Calcular $I_{zz} = I_{33}$ cuando el cuadrado está a punto de chocar con el suelo

$$I_{33} = \int (r^2 \delta_{33} - r_{30} r_{30}) dm$$

$$= \int_0^L \int_0^L \int_0^L (x^2 + y^2) \underbrace{\frac{M}{L^3}}_P dx dy dz$$

$$= \frac{2ML^2}{3}$$



$$MgL \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{MgL}{2} + \frac{2ML^2}{3} \cdot \frac{\omega^2}{2}$$

$$\rightarrow \omega^2 = \frac{3g}{2L} (\sqrt{2} - 1) //$$

b) Como en X la fuerza neta es 0, (Solo hay gravedad y normal) $\dot{X}_{cm} = 0$

Como inicialmente $\dot{X}_{cm} = 0$, $\rightarrow \dot{X}_{cm} = 0, \forall t$

• Como no hay punto fijo, usamos el CM para expresar T :

$$T = \frac{M V_{cm}^2}{2} + \frac{\vec{\omega} I_{cm} \vec{\omega}}{2}$$

Pero de la misma manera que antes, tenemos que

$$\vec{\omega} I_{cm} \vec{\omega} = I_{cm}^{zz} \omega^2$$

• I_{cm}^{zz} es el momento de inercia c/r al CM,

Pero como ya tenemos I_p^{zz} , usamos Steiner:

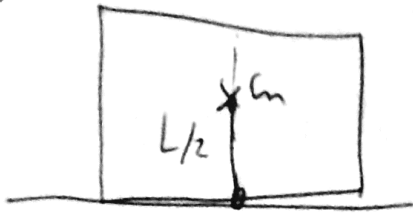
$$I_{cm}^{33} = I_p^{33} + M(R_p^2 \delta_{33} - R_p^3 \cdot R_p^3)$$

$$= I_p^{33} - M\left(\frac{\sqrt{2}}{2}L\right)^2$$

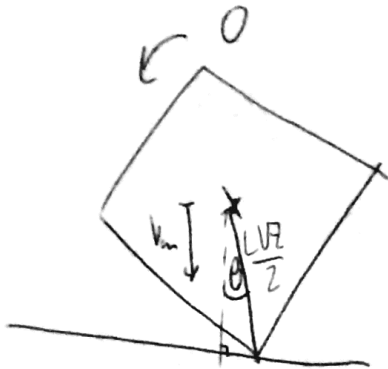
entonces

$$E_i = MgL \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{MgL\sqrt{2}}{2} \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) + \frac{M V_{cm}^2}{2} + I_{cm}^{zz} \omega^2$$

• Del dibujo se, tenemos que



$$\vec{V}_{cm} = + \frac{L\sqrt{2}}{2} \dot{\theta} \cos \theta \hat{j}$$



$$\rightarrow \vec{V}_{cm} = - \frac{L\sqrt{2}}{2} \dot{\theta} \sin \theta \hat{i}$$

$$\rightarrow V_{cm}^2 = \frac{L^2}{2} \sin^2 \theta \dot{\theta}^2$$

$$\rightarrow M g L \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} M g L \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{M}{2} \frac{L^2 \sin^2 \theta \omega^2}{2} + \left(I_p^{ss} - \frac{ML^2}{2} \right) \frac{\omega^2}{2}$$

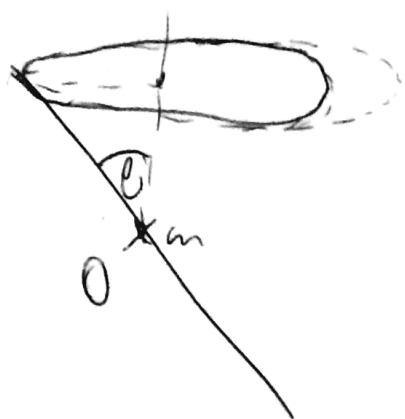
$$\rightarrow M g L \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{L}{2} M g + \frac{M L^2 \sin^2 \theta \omega^2}{4} + \frac{M L^2 \omega^2}{6}$$

$$\rightarrow g L \sqrt{2} - g L = \omega^2 \left(\frac{L^2 \sin^2 \theta}{2} + \frac{L^2}{6} \right)$$

$$\rightarrow g L (\sqrt{2} - 1) = \omega^2 \cdot \frac{5}{12} \quad \theta = \pi/4$$

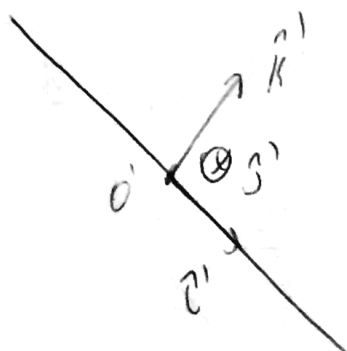
$$\rightarrow \omega^2 = \frac{12}{5} (\sqrt{2} - 1) g L$$

P3)



- Podemos encontrar I_0 para un sistema de referencias cuyas vectores base coinciden con los ejes principales de la barra: (No inercial)

- la matriz I_0 será diagonal



$$I_{11} = \int (r^2 \delta_{11} - r_1 \cdot r_1) dm$$

$$= \int_{-L/2}^{L/2} (r^2 - r^2) dm = 0$$

$$\vec{r} = r \hat{i}'$$

$$I_{22} = \int_{-L/2}^{L/2} (r^2 - 0) dm = \int_{-L/2}^{L/2} r^2 \cdot \lambda dx$$

$$= \lambda \cdot \left. \frac{r^3}{3} \right|_{-L/2}^{L/2} = \frac{\lambda}{3} \left(\frac{L^3}{8} + \frac{L^3}{8} \right) = \frac{L^3 \lambda}{12}$$

$$\text{Pero } \lambda = \frac{M}{L} \rightarrow I_{22} = \frac{ML^2}{4}$$

$$\text{Ejes Perpendiculares / Simetría} \rightarrow I_{33} = \frac{ML^2}{12}$$

ASÍ,

$$\vec{L}_0 = \frac{ML^2}{42} (w_1' \hat{j}' + w_2' \hat{i}') = \text{constante en } 0'$$

donde w_1' y w_2' son las componentes en $\hat{j}'$ y $\hat{i}'$

- el torque neto se desprende del DCL:



$$\begin{aligned} \vec{\tau}_0 &= \left(-\frac{L}{2} \hat{i}'\right) \times (N \sin \theta \hat{k}' - N \cos \theta \hat{j}') \\ &= +\frac{1}{2} \sin \theta N \hat{j}' \end{aligned}$$

para $N = mg \rightarrow \vec{\tau}_0 = \frac{1}{2} \sin \theta mg \hat{j}'$

- Recordemos

$$\left(\frac{d\vec{L}_0}{dt}\right)_{SRI} = \left(\frac{d\vec{L}_0}{dt}\right)_{SRNI} + \vec{\omega}_{SIS} \times \vec{L}_0 = \vec{\tau}_0$$

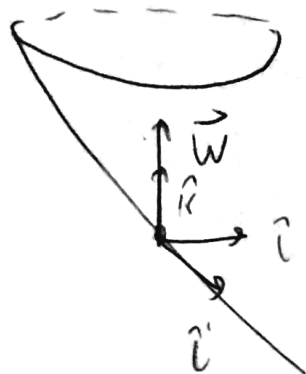
Como $\vec{L}_0 = 0$ en el SRNI, la derivada es nula

además, $\vec{\omega}_{SIS} = \vec{\omega}$, pues es rotatorio con el sólido.

$$\begin{aligned} \vec{\omega} \times \vec{L}_0 &= \frac{ML^2}{42} \begin{pmatrix} w_1' \hat{i}' + w_2' \hat{j}' + w_3' \hat{k}' \\ w_2' \hat{j}' + w_3' \hat{k}' \end{pmatrix} \\ &= \frac{ML^2}{42} (-w_1' w_2' \hat{j} + w_1' w_2' \hat{k}) \end{aligned}$$

$$\therefore -\frac{ML^2}{4} \omega_1' \omega_3' = \frac{1}{2} \sin \theta \sin \theta$$

$$\omega_1' \omega_3' = 0 \rightarrow \omega_3' = 0, \text{ pues } \omega_1' \neq 0$$



Pero $\vec{W} = W \hat{K}$, en un sistema
O inercial. debemos encontrar $\hat{K}$
en términos de O' , para encontrar
 ω_1' y ω_3' en términos de W .



$$\hat{K} = \hat{K}' \sin \theta + (-\hat{i}') \cos \theta$$

$$\therefore \omega_1' = -\cos \theta \cdot W$$

$$\omega_3' = W \sin \theta$$

$$\rightarrow \frac{ML^2}{12} W^2 \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{2} \sin \theta \sin \theta$$

$$\rightarrow W^2 = \frac{6 \cancel{L} \cdot \cancel{M} \cdot \cancel{L}}{\cancel{M} \cancel{L}^2} \cdot \frac{1}{\cos \theta}$$

$$W^2 = \frac{6g}{L \cos \theta}$$