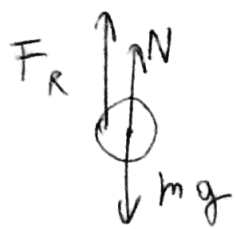


ente auxiliar #0

P11 Para que m_1 se levante, la normal debe ser 0. Del DCL: (imponiendo estática)



$$0 = F_R + N - mg$$

$$N = 0 \rightarrow F_R = K(l - l_0) = mg$$

$$\rightarrow l = l_0 + \frac{mg}{K}$$

Así, el resorte debe alcanzar un estiramiento l .

Para conocer δ usamos conservación de la energía para la masa superior:

$$E_i = mg(l_0 - \delta) + \frac{K\delta^2}{2} = \frac{1}{2}K\left(\frac{mg}{K}\right)^2 + mg\left(l_0 + \frac{mg}{K}\right) = E_f$$

$$\delta^2 - \frac{2mg}{K}\delta - \left(\frac{mg}{K}\right)^2 = 0$$
$$\rightarrow \delta = \frac{2mg}{K} \pm \sqrt{\left(\frac{mg}{K}\right)^2 + 12\left(\frac{mg}{K}\right)^2}$$

$$\delta = \frac{mg}{K} (1 \pm 2). \quad \delta = -\frac{mg}{K} \text{ es saltar m desde } l.$$

por lo tanto, $\boxed{\delta = \frac{3mg}{K}}$

b). Después de la separación la única fuerza sobre el CM es $2mg$, la gravedad.

para encontrar $H_{\max}$ nos basta encontrar la energía del sistema en este instante

$$E_{sep} = \frac{2m}{2} \frac{V_{cm}^2}{2} + 2m g Z_{cm}, \text{ con}$$

$$\vec{V}_{cm} = \frac{m \vec{V}_{inf} + m \vec{V}_{sup}}{m+m} = \frac{\vec{V}_{inf} + \vec{V}_{sup}}{2}$$

$$\text{y } Z_{cm} = \frac{m Z_{inf} + m Z_{sup}}{m+m} = \frac{Z_{inf} + Z_{sup}}{2}$$

En la separación $\vec{V}_{inf} = \vec{0}$, $Z_{inf} = 0$ y $Z_{sup} = l_0 + \frac{m g}{K}$
 Usando conservación de E para la bola superior

$$E_{comprimida} = m g (l_0 - 2\delta) + \frac{K \cdot (2\delta)^2}{2}$$

$$= \frac{m V_{sup}^2}{2} + \frac{K}{2} \left(\frac{m g}{K} \right)^2 + m g \left(l_0 + \frac{m g}{K} \right) = E_f$$

$$\rightarrow V_{sup} = g \sqrt{\frac{23m}{12K}}$$

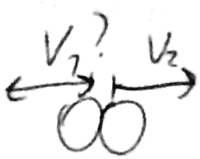
$$\therefore \vec{V}_{cm} = \frac{g}{2} \sqrt{\frac{23}{12K}}, \quad Z_{cm} = \frac{l_0 + \frac{m g}{K}}{2}$$

y para el cm, en la altura máxima

$$E_{max} = 2m g H_{max} = \cancel{2m} \cdot \left(g \cdot \frac{23m}{12K} \right) + \cancel{2m} g \left(l_0 + \frac{m g}{K} \right) - E_{sep}$$

$$\rightarrow H_{max} = \frac{m g \cdot 23}{K \cdot 24} + \frac{l_0 + \frac{m g}{K}}{2}$$

- 2). In llega abajo con velocidad $V_m = \sqrt{2gh}$ ¿
 • el momento en la dirección i se conserva pues no
 ha fuerzas externas en ese eje

→ $\vec{P} = m\sqrt{2gh} = mV_1 + 2mV_2$ (1). 

- Nota: no conocemos el signo de V_1
 • Como 2m llega a una altura $\frac{h}{5}$, tenemos que
 por conservación de la energía

$$V_2 = \sqrt{\frac{2gh}{5}} \xrightarrow{(1)} V_1 = \sqrt{2gh} - 2\sqrt{\frac{2gh}{5}}$$

$$= \sqrt{2gh} \left(1 - \frac{2\sqrt{5}}{5} \right)$$

$$\approx 0.1\sqrt{2gh} > 0$$

- Veamos como cambia la energía cinética

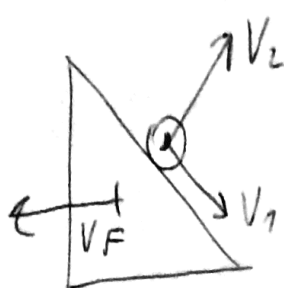
$$K_i = \frac{m(\sqrt{2gh})^2}{2} = mgh, \quad K_f = \frac{2m}{2} \left(\sqrt{\frac{2gh}{5}} \right)^2 + \frac{m}{2} \left(\sqrt{2gh} \left(1 - \frac{2\sqrt{5}}{5} \right) \right)^2$$

$$\rightarrow \Delta K = mgh \left(\frac{6 - 4\sqrt{5}}{5} \right) \approx -0.6 mgh$$

y la altura final de m la encontramos usando
 conservación de energía

$$E_i = \frac{mV_1^2}{2} = mgh_f \rightarrow h_f = h \left(\frac{1 - 4\sqrt{5}}{5} \right) \approx 0.01h$$

P3



• Como para la bolita ~~la única fuerza~~ externa es la normal, la componente tangencial ~~del~~ ^{de} la única impulso (*)

Se conserva.

$$\rightarrow V_1 = V \sin \alpha = \frac{V}{2}$$

• además, para el sistema $M + m$, el momento horizontal se conserva, pues no hay fuerza externa en ese eje

$$\begin{aligned} \rightarrow 0 &= -M V_F + m (V_2 \sin \alpha + V_1 \cos \alpha) \\ &= -M V_F + m \left(\frac{V_2}{2} + V_1 \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \quad (1) \end{aligned}$$

y por conservación de K (es elástico)

$$m V^2 = M \frac{V_F^2}{2} + \frac{m}{2} (V_1^2 + V_2^2) \quad (2)$$

(1)+(2) tal como sea: $V_F = \frac{2\sqrt{3}m}{m+4M} V$, $V_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} V \left(\frac{4M-m}{4M+m} \right)$

(*) La gravedad no hace impulso, pues este está definido por $F \Delta t$. Pero como en una colisión $\Delta t \rightarrow 0$, y $F = mg = \text{cte}$, entonces el impulso es nulo.

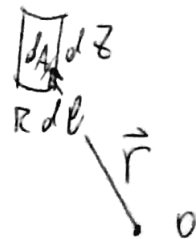
$$I \equiv \int_t^{t+\Delta t} F dt = \int_t^{t+\Delta t} mg dt = mg \Delta t \rightarrow 0$$

4] (a) Primero encontramos dm , $\vec{r}$ y los límites de integración

$$dm = \sigma dA = \sigma R d\ell dz$$

$$\vec{r} = R(\cos\ell \hat{i} + \sin\ell \hat{j}) + z\hat{k}$$

$$\ell \in [0, \pi], z \in [0, H]$$



así,

$$M = \int_V dm = \int_0^H \int_0^\pi \sigma_0 (\sin\ell + 1) R d\ell dz$$

$$= H \sigma_0 R (\pi + 2)$$

$$\text{y } \vec{R} = \frac{1}{M} \int_V \vec{r} dm$$

$$= \frac{1}{M} \int_0^H \int_0^\pi (R(\cos\ell \hat{i} + \sin\ell \hat{j}) + z\hat{k}) \sigma_0 (\sin\ell + 1) R d\ell dz$$

$$= \frac{R^2 \sigma_0}{M} \int_0^H \int_0^\pi \left(\frac{\sin 2\ell}{2} + \cos\ell \right) \hat{i} + \left(\frac{1 - \cos 2\ell}{2} + \sin\ell \right) \hat{j} + \frac{z}{R} (\sin\ell + 1) \hat{k} d\ell dz$$

$$= \frac{R^2 \sigma_0 H}{M} \left[\left(\frac{\pi}{2} + 2 \right) \hat{j} + \frac{H}{2R} (\pi + 2) \hat{k} \right]$$

$$= R \left(\frac{\pi}{2} + 2 \right) \hat{j} + \frac{H}{2} (\pi + 2) \hat{k}$$

c) $dm = \sigma dA = \sigma dx dy$ (z te)

$x \in [0, a], y \in [0, b]$

$\vec{F} = x\hat{i} + y\hat{j}$

$M = \int_0^b \int_0^a \sigma \frac{xy}{ab} dx dy = \sigma \frac{ab}{4}$

$\vec{R} = \frac{1}{M} \int_0^b \int_0^a (x\hat{i} + y\hat{j}) \sigma \frac{xy}{ab} dx dy$

$= \frac{1}{M} \int_0^b \int_0^a \frac{x^2y}{ab} \hat{i} + \frac{xy^2}{ab} \hat{j} dx dy$

$= \frac{\sigma ab}{6M} (a\hat{i} + b\hat{j}) = \frac{2}{3} (a\hat{i} + b\hat{j})$

P5]

Considerar que la gota tiene masa de gotas muy pequeñas suspendidas. Considerar una cantidad dm de estas gotas

$\vec{p}(t) = VM, \vec{p}(t+\Delta t) = (r+dr)(M+dm)$

$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{p}(t+\Delta t) - \vec{p}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{VM + Vdm + Mdr - dVdm - VM}{\Delta t}$

$\vec{p} = V \frac{dm}{dt} + M \frac{dr}{dt} + 0$

$= VM + m\dot{r} = Mg$

$$\rightarrow \dot{V} = g - K V^2 \rightarrow \frac{\dot{V}}{g - K V^2} = 1 \int_0^{V(t)} \frac{dV}{g - K V^2} \int_0^t dt$$

$$\int_0^{V(t)} \frac{dV}{g - K V^2} = t \rightarrow \int_0^{V(t)} \frac{1}{2\sqrt{gK}} \left(\frac{1}{\sqrt{g} - \sqrt{K} V} + \frac{1}{\sqrt{g} + \sqrt{K} V} \right) dV = t$$

$$\rightarrow \frac{1}{2\sqrt{gK}} \ln \left(\frac{\sqrt{g} + \sqrt{K} V}{\sqrt{g} - \sqrt{K} V} \right) = t$$

$$\rightarrow \frac{\sqrt{g} + \sqrt{K} V}{\sqrt{g} - \sqrt{K} V} = e^{2\sqrt{gK} t}$$

$$\rightarrow V(t) = \sqrt{\frac{g}{K}} \left(\frac{e^{2\sqrt{gK} t} - 1}{e^{2\sqrt{gK} t} + 1} \right) = \sqrt{\frac{g}{K}} \tanh(\sqrt{gK} t)$$

$$\text{On } t \rightarrow \infty, \quad V(t \rightarrow \infty) = \sqrt{\frac{g}{K}} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{e^{2\sqrt{gK} t} - 1}{e^{2\sqrt{gK} t} + 1}$$

$$= \sqrt{\frac{g}{K}}$$