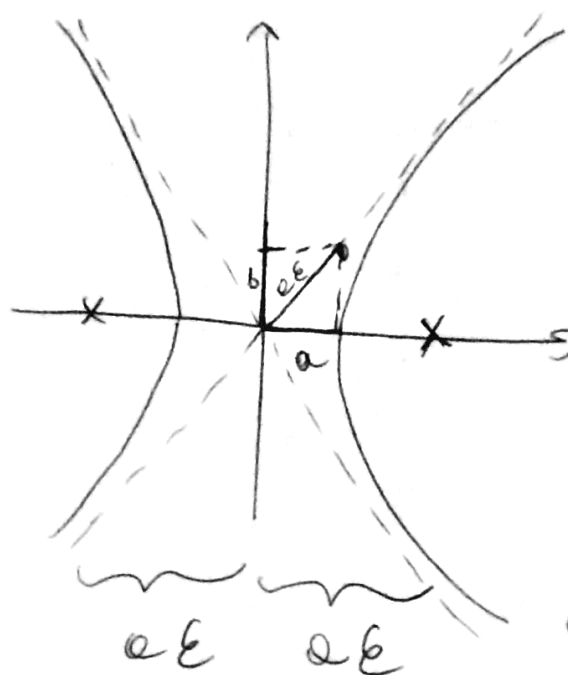


Punto aux 7

P1 e) • Notamos que la órbita de la nave

es una hipérbola donde
sus asíntotas son perpendiculares

$$\rightarrow a = b$$



$$e^2 + b^2 = e^2 E^2 \rightarrow 2e^2 = e^2 E^2$$

$$\rightarrow E = \sqrt{2}$$

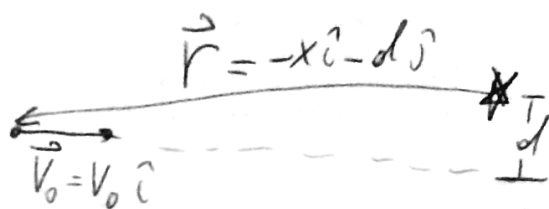
$$E = \sqrt{1 + \frac{2El^2}{mK^2}} \rightarrow 1 = \frac{2El^2}{mK^2}$$

E? $E = \frac{mV_0^2}{2}$, constante

l? $\vec{l} = m \vec{r} \times \vec{v}$

$$= m(-x\hat{i} - d\hat{j}) \times (V_0\hat{i})$$

$$= m d V_0$$



• x es auxiliar, no lo
conocemos y no nos interesa

$$\rightarrow \frac{1}{2} = \underbrace{\left(\frac{mV_0^2}{2}\right)}_E \underbrace{(m d V_0)}_l \cdot \frac{1}{mK^2} = \frac{m^2 d^2}{2K^2} \cdot V_0^4$$

$$E \quad l \rightarrow V_0^4 = \frac{K^2}{m^2 d^2} \rightarrow \boxed{V_0^2 = \frac{K}{m d}}$$

b) en la distancia mínima

$$E = \frac{m \dot{r}^2}{2} + \frac{d^2}{2m r_m^2} - \frac{K}{r_m} = \frac{m v_0^2}{2} \quad (E \text{ de})$$

$= 0$
(extremo)

$$\rightarrow \frac{(m d v_0)^2}{2m r_m^2} - \frac{K}{r_m} = \frac{m}{2} \cdot \left(\frac{K}{m d} \right)^2$$

$$\rightarrow r_m^2 + 2d r_m - d^2 = 0$$

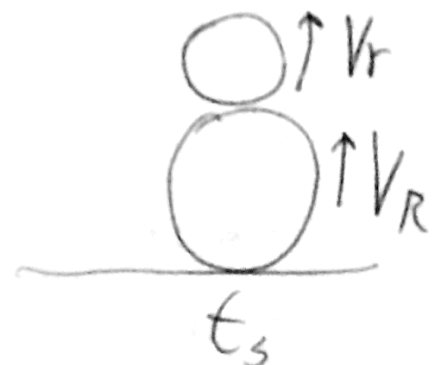
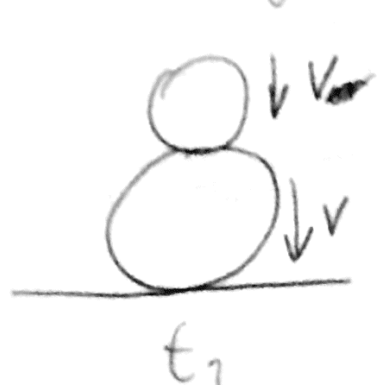
$$\rightarrow r_m = d(-1 \pm \sqrt{2})$$

$$r_m > 0 \rightarrow r_m = d(\sqrt{2} - 1)$$

Como la única fuerza es la gravedad de la estrella

$$\|F\| = \frac{K}{r_m^2} = \frac{K}{d^2(\sqrt{2}-1)^2}$$

2) • hay 2 colisiones, vamos a tomar 3 tiempos $H \gg R \gg r$



- en t_1 , en continuidad usando conservación de la energía que ambas pelotas caen a velocidad

$$V = \sqrt{2gH} \text{ (aproximadamente)}$$

- la primera colisión es de la bola R con el suelo

$$P_{R+\text{suelo}}(t_1) = -VM, \quad P_{R+\text{suelo}}(t_2) = V'M$$

Conservación del momento $\rightarrow V' = -V$

- la segunda es de R con r

$$P_{R+r}(t_2) = -mV + MV, \quad P_{R+r}(t_3) = V_r m + M V_R$$

$$K_{R+r}(t_2) = \frac{V^2(m+M)}{2}, \quad K_{R+r}(t_3) = \frac{V_r^2 m}{2} + \frac{V_R^2 M}{2}$$

no fue elástica $\rightarrow$

$$P_{R+r}(t_0) = P_{R+r}(t_1)$$

$$y \quad N_{R+r}(t_0) = N_{R+r}(t_1)$$

$$\rightarrow V(M-m) = V_r m + V_R M \quad (1)$$

$$\frac{V^2(m+M)}{2} = \frac{V_r^2 m}{2} + \frac{V_R^2 M}{2} \quad (2)$$

$$(1) \rightarrow V_R = \frac{(M-m)}{m} V - \frac{m}{M} V$$

$$(2) \rightarrow (m+M)V^2 = mV_r^2 + \left[\frac{1}{M^2} \left((M-m)^2 V^2 - 2m(M-m)VV_r + m^2 V_r^2 \right) \right] M$$

$$\rightarrow V_r^2 m \left(1 + \frac{m}{M} \right) - 2m \left(1 - \frac{m}{M} \right) VV_r + \frac{V^2}{M} \left[M^2 - 2mM + \frac{m^2}{M} - M^2 - mM \right] = 0$$

$$\rightarrow V_r^2 m \left(1 + \frac{m}{M} \right) - 2m \left(1 - \frac{m}{M} \right) VV_r + V^2 m \left(\frac{m}{M} - 3 \right) = 0$$

$$m \ll M \rightarrow \frac{m}{M} \ll 1 \rightarrow V_r^2 m - 2m VV_r + V^2 m (-3) = 0$$

$$\rightarrow V_r^2 - 2VV_r - 3V^2 = 0$$

$$\rightarrow V_r = V(1 \pm 2), V \text{ es la velocidad anterior}$$

$$\text{guerra la otra} \rightarrow V_r = 3V \rightarrow H_f \sim 9H$$

(Se hicieron muchas simplificaciones)

P3

e) Usar es f3rtil; r3s3r d3m3s

$$\vec{R}_{cm} = \frac{\int_V \vec{r} dm}{\int_V dm}$$

$$\int_V dm \leftarrow M \quad r \sin \theta d\phi$$



- Necesitamos calcular 2 integrales. Primero, usar d3m3s los diferenciales de masa

$$\begin{aligned} dm &= \rho dV = \rho r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi \\ &= r^3 \sin \theta dr d\theta d\phi \end{aligned}$$

Usar dV pues estamos integrando en el Volumen

- Determinar los l3mites de integraci3n

$$r \in [0, R], \theta \in [0, \pi], \phi \in [0, 2\pi]$$

- y finalmente, el vector posici3n en cartesianas

$$\vec{r} = r\hat{r} = r(\cos \phi \hat{i} + \sin \phi \hat{j}) \sin \theta + r \cos \theta \hat{k}$$

$$\rightarrow \int_V dm = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^R r^3 \sin \theta dr d\theta d\phi$$

$$= \frac{\pi R^4}{2} (1 - \cos \alpha)$$

$$\circ \int_V \vec{r} \, dm = \int_0^{2\pi} \int_0^{\alpha} \int_0^R r (\cos \phi \hat{i} + \sin \phi \hat{j}) (\sin \theta + R \cos \theta) \cdot r^3 \sin \theta \, dr \, d\theta \, d\phi$$

$$= \frac{R^4}{5} \int_0^{2\pi} \int_0^{\alpha} \cos \phi \sin^2 \theta \hat{i} + \sin \phi \sin^2 \theta \hat{j} + \sin \theta \cos \theta R \hat{k} \, d\phi \, d\theta$$

dominio cuadrado

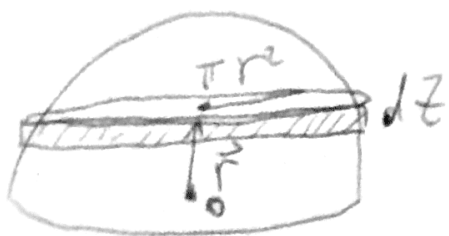
$$\int_0^{2\pi} \cos \phi \, d\phi = \int_0^{2\pi} \sin \phi \, d\phi = 0 \Rightarrow \int_V \vec{r} \, dm = \frac{R^5}{5} \int_0^{\alpha} R \sin \theta \cos \theta \, d\theta$$

$$= \frac{\pi R^5}{5} \int_0^{\alpha} R \sin 2\theta \, d\theta = \frac{\pi R^5}{5} \left(-\frac{\cos 2\theta}{2} \right) \Big|_0^{\alpha} R = \frac{\pi R^5}{10} (1 - \cos 2\alpha)$$

$$\therefore R = \frac{\frac{\pi R^5}{10} (1 - \cos 2\alpha) R^2}{\frac{\pi R^4}{2} (1 - \cos \alpha)} = \frac{R}{5} \left(\frac{1 - \cos 2\alpha}{1 - \cos \alpha} \right) R$$

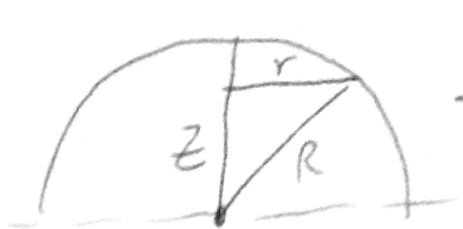
Note: Por Simetría, era obvio que $R_x = R_y = 0$
 bastaba buscar R_z .

- b) • Buscamos R_z , pues por simetría $R_x = R_y = 0$
- Una vez entendamos los elementos de masa dm , podremos crear huesitos propios dm y reducir las dimensiones del problema
 - en este caso, como tenemos simetría radial en todo el objeto, podemos pensar las porciones de esfera como sigue:



$$dm = \overbrace{\pi r^2 dz}^{dV} \cdot \underset{\text{densidad}}{P}$$

Pero notemos que r varía, depende de z



$$\rightarrow r^2 = R^2 - z^2$$

$$\rightarrow dm = P \pi (R^2 - z^2) dz$$

y con $\vec{r} = z \hat{z}$, pues vamos sumando verticalmente

• los límites de integración serán entonces

~~$z \in [0, \pi]$~~ $z \in [0, R]$ (1 dimensión!)

$$\therefore M = \int_0^R \rho \pi (R^2 - z^2) dz$$

$$= \rho \pi \left(R^3 - \frac{R^3}{3} \right) = \frac{2\rho \pi R^3}{3}$$

$$\vec{R} = \frac{1}{M} \int_0^R z \hat{z} \cdot \rho \pi (R^2 - z^2) dz$$

$$= \frac{\rho \pi}{M} \int_0^R (R^2 z - z^3) dz \hat{z}$$

$$= \frac{\rho \pi}{M} \left(R^2 \frac{z^2}{2} - \frac{z^4}{4} \right)_0^R \hat{z}$$

$$= \frac{\rho \pi}{M} \left(\frac{R^4}{2} - \frac{R^4}{4} \right) \hat{z} = \frac{\rho \pi R^4}{M} \cdot \frac{2}{8} \hat{z} = \frac{\rho \pi R^4}{4M} \hat{z}$$

$$= \frac{\cancel{\rho \pi} R^4}{4 \cdot \frac{2 \cancel{\rho \pi} R^3}{3}} = \frac{3R}{8}$$

~~$$V_{or} \leq F_{rH} +$$~~

P4) Con 5. de ramar en d m de Murie,
y ramar el momento antes y después de la
"colisión", asumamos que la rosiza ha se mueve

$$\vec{P}(t) = dm \vec{V}, \quad \vec{P}(t + \Delta t) = 0$$

$$\rightarrow \dot{\vec{P}}(t) = -\frac{dm}{dt} \vec{V} = -\sigma \vec{V} = \vec{F}_{\text{nete}} \quad (2^{\text{da}} \text{ ley})$$

$$\rightarrow \vec{N} + \vec{f}_r = -\sigma \vec{V}$$

$$\rightarrow N = \sigma V \sin \alpha$$

$$f_r = \sigma V \cos \alpha$$

pues $\vec{V} = -V \cos \alpha \hat{i} - V \sin \alpha \hat{j}$

$$f_r \leq \mu_e N \rightarrow \sigma V \cos \alpha \leq \mu_e \sigma V \sin \alpha$$

$$\rightarrow \cos \alpha \leq \mu_e \sin \alpha$$

$$b) K(t) = \frac{V^2 dm}{2}$$

$$K(t + \Delta t) = 0$$

$$\rightarrow \frac{dK}{dt} = \frac{V^2 dm}{2 dt} = \frac{\sigma V^2}{2} \rightarrow \frac{dQ}{dt} = -\frac{\sigma V^2}{2}$$

$$\frac{dQ}{dt} = -\frac{dK}{dt}$$

c) Consideramos M y dm antes y después,
pero este vez, decimos que la ves. se mueve
con velocidad $\vec{u} = -u \hat{i}$

$$\vec{p}(t) = M\vec{u} + dm\vec{v}$$

$$\vec{p}(t + \Delta t) = (M + dm)(\vec{u} + d\vec{u})$$

$$\frac{\Delta \vec{p}(t)}{\Delta t} = \frac{M d\vec{u} + dm(\vec{u} + d\vec{u} - \vec{v})}{\Delta t}$$

$$= \frac{M d\vec{u} + dm(\vec{u} - \vec{v}) + dm d\vec{u}}{\Delta t}$$

$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{dm d\vec{u}}{\Delta t} = 0$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{p}(t)}{\Delta t} = \dot{\vec{p}}(t) = M \frac{d\vec{u}}{dt} + \frac{dm}{dt}(\vec{u} - \vec{v}) + 0$$

2da ley $\rightarrow \dot{\vec{p}}(t) = \vec{F}_G + \vec{N} = F_r \hat{i} + N \hat{j}$

$$\rightarrow M \dot{\vec{u}} + \sigma(\vec{u} - \vec{v}) = F_r \hat{i} + N \hat{j}$$

1) $\rightarrow M \cdot 0 + \sigma(0 + V \text{ Sen } \alpha) = N$

$$\rightarrow N = \sigma V \text{ Sen } \alpha$$

2) $-M \dot{u} + \sigma(-u + V \text{ Cos } \alpha) = F_r = M_c N$

$= M_c \sigma V \text{ Sen } \alpha$

$$\rightarrow -M \dot{u} - \sigma u = M_c \sigma V \text{ Sen } \alpha - \sigma V \text{ Cos } \alpha$$

$$\rightarrow \dot{u} + \frac{\sigma}{m} u = \frac{\sigma V}{m} (M_c \text{ Sen } \alpha - \text{Cos } \alpha)$$

- Con estas EDOs, se suele hacer un cambio de variable las constantes

$$\bar{U} = U - V(M_c \text{ Sent} - \text{Cost}), \quad \dot{\bar{U}} = \dot{U}$$

$$\rightarrow \dot{\bar{U}} + \frac{\sigma}{n} \bar{U} = 0 \quad \text{[Crossed out]}$$

$$\rightarrow \frac{\dot{\bar{U}}}{\bar{U}} = -\frac{\sigma}{n} \int_{\bar{U}(0)}^{\bar{U}(t)} \frac{1}{\bar{U}} d\bar{U}$$

$$\rightarrow \ln\left(\frac{\bar{U}(t)}{\bar{U}(0)}\right) = -\frac{\sigma}{n} t$$

$$\xrightarrow{U(0)=0} \ln\left(\frac{U - V(M_c \text{ Sent} - \text{Cost})}{-V(M_c \text{ Sent} - \text{Cost})}\right) = -\frac{\sigma}{n} t$$

$$\rightarrow \ln\left(1 - \frac{U}{V(M_c \text{ Sent} - \text{Cost})}\right) = -\frac{\sigma}{n} t$$

$$\rightarrow \left(1 - e^{-\frac{\sigma}{n} t}\right) \cdot V(M_c \text{ Sent} - \text{Cost}) = U(t)$$

