Auxiliar #6 - Movimiento Planetario

FI2001-1 - Verano - 26 de diciembre del 2017

Profesor: Claudio Romero - Auxiliar: Esteban Rodríguez[1] - Ayudante: Miguel Sepúlveda

Departamento de Física, Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas, Universidad de Chile

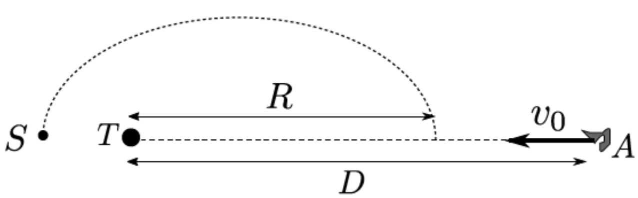
---

P1. Se detecta un asteroide A que a una distancia D de la Tierra se mueve con rapidez v_0 directo hacia ella. Se cuenta con un satélite S que en ese mismo instante se ubica justo al otro lado de la Tierra. Se planea dar al satélite una órbita elíptica de tal manera que intercepte perpendicularmente la trayectoria del asteroide chocando con él. Note que v_0 es la rapidez del asteroide tan sólo en $t = 0$. Un objetivo del problema es determinar la excentricidad de la órbita elíptica requerida.

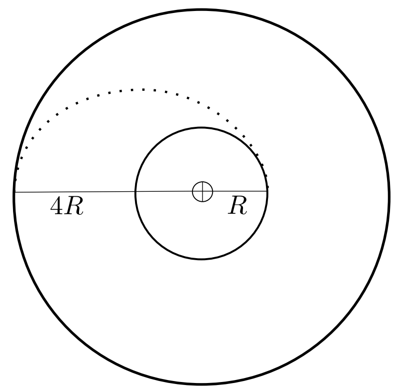
(a) Si el asteroide tiene energia total nula, determine la distancia del asteroide a la Tierra en funciíon del tiempo ($t = 0$ en la condición de la figura).

(b) Determine la distancia R de intercepción suponiendo conocida le excentricidad e de la órbita elíptica del satélite.
Indicación: exprese el semieje mayor de la órbita elíptica en función de R y la excentricidad e. Utilice la tercera ley de Kepler para determinar el tiempo que el satélite tarda en interceptar el asteroide.

(c) Si en $t = 0$ el satélite S se encontraba a una distancia $D/5$ de la Tierra, escriba una ecuación algebraica que permita calcular e (No la resuelva).



P2. Un satélite se encuentra en una órbita cirular en torno a la tierra de radio R. Con el fin de cambiar el radio de la orbita del satélite a un radio $4R$, este usa sus propulsores para pasar a una órbita elíptica de radio mínimo R y radio máximo $4R$ como en la figura, para luego usar sus propulsores una vez mas y quedarse en la órbita circular de mayor radio. Encuentre la energía total usada por los propulsores durante todo este proceso (Asumiendo que solo son usados en los instantes de cambio de órbita).



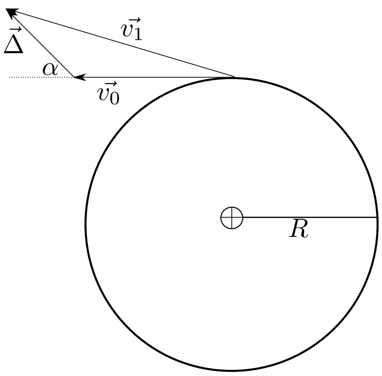
P3. Un satélite de masa m gira en torno a la Tierra en una trayectoria circunferencial de radio R. En $t = 0$, sus cohetes hacen que la velocidad del satélite cambie a $\vec{v_1} = \vec{v_0} + \vec{\Delta}$, donde $\vec{v_0}$ es la velocidad pre-impulso y $\vec{\Delta}$ es el cambio de velocidad debido al impulso de los cohetes. Considere que $\vec{\Delta}$ forma un angulo α con $\vec{v_0}$ como muestra la figura.

(a) ¿Qué valor tiene la energía mecánica total del satélite justo antes del impulso, en función de R?

(b) ¿Y despúes de este, pero en función de Δ, α y R?

(c) En base a lo anterior determine la magnitud mínima del impulso con el cual el satélite logra escapar de la atracción terrestre, indicando también el ángulo necesario para minimizar este impulso (No es lo mismo dar un impulso directamente hacia el planeta que lejos de este).

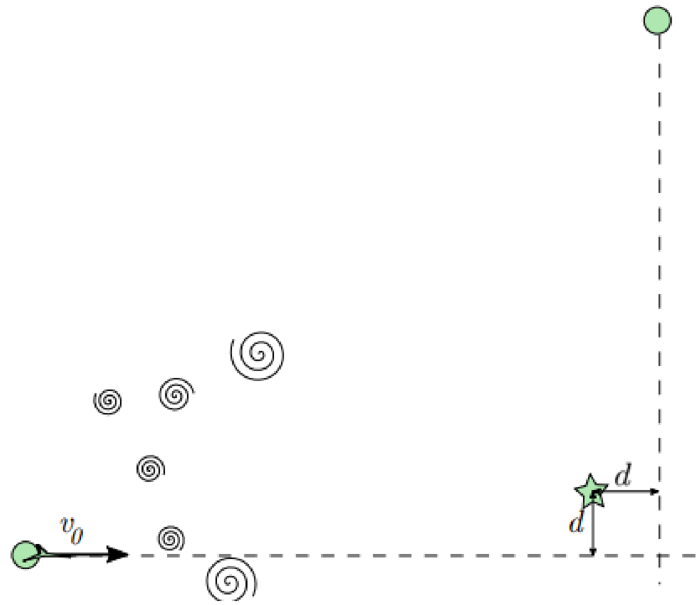
[1]esteban.rodriguez.m@ing.uchile.cl



P4. Credito: Auxiliar 12 sección5, semestre 2017-1 En un futuro lejano, se busca enviar una nave no motorizada de masa m desde el planeta X hasta el planeta Y. Lamentablemente, no se puede lanzar la nave de manera recta dadas las condiciones astronómicas (Ver figura), las cuales permiten solo una velocidad de lanzamiento, que pasa a una distancia d de la estrella Alpha Romerus de masa M. Debido a la complejidad del problema, la NASA se contacta con ustede para que determine las caracteristicas adecuadas del lanzamiento. **Indicación:** Asuma que los planetas son tan lejanos a la estrella que, para efectos de medición de ángulos, la estrella se situa en el vértice recto de la figura (d se vuelve despreciable). Además, desprecie el efecto gravitatorio de los planetas sobre la nave.

(a) Determine la velocidad de lanzamiento

(b) Determine la distancia mínima a la que pasará la nave a la estrella, así como la mayor fuerza central que experimentará la tripulación.



1] a) Con $E_a = 0$, tenemos una "órbita" parabólica (imagínese una parábola muy delgada). Para encontrar $r_a(t)$ (distancia del asteroide), debemos encontrar la velocidad de este. Usamos nuestro dato:

$$E_a = 0 \to \frac{m v_a^2}{2} - \frac{GmM}{r_a} = 0 \to v_a = \sqrt{\frac{2GM}{r}} = \sqrt{\frac{2K}{mr}} \quad (GMm \equiv K)$$

así, $\frac{dr}{dt} = -v$ → es de acercamiento, r disminuye

$$\to dr = -\sqrt{\frac{2K}{mr}}\, dt \to \sqrt{r}\, dr = -\sqrt{\frac{2K}{m}}\, dt \Big/ \int_{\text{inicial}}^{\text{arbitrario}}$$

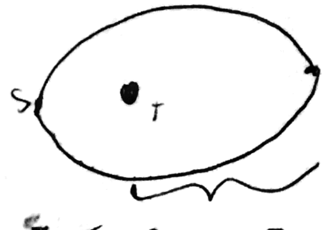
$$\to \int_D^r r^{1/2}\, dr = -\sqrt{\frac{2K}{m}} \int_0^t dt \to \frac{2 r^{3/2}}{3}\Big|_D^r = -\sqrt{\frac{2K}{m}}\, t$$

$$\to \boxed{r_a^{3/2}(t) = D^{3/2} - \frac{3}{2}\sqrt{\frac{2K}{m}}\, t}$$

b) No sabemos nada físico del satélite, usamos geometría para encontrar a. Hay dos maneras:

método 1

$$a = \frac{r_{min} + r_{max}}{2} = \frac{\overset{?}{r_{min}} + R}{2}$$



$r_{min} = ?$ $r_{max} = R$

Para encontrar r_{min}, recordamos la expresión de r para una elipse:

$$r = \frac{a(1-\varepsilon^2)}{1 + \varepsilon\cos\theta}$$

r se minimiza cuando $1 + \varepsilon\cos\theta$ se maximiza, en $\theta = 0$

$$\therefore r_{min} = \frac{a(1-\varepsilon^2)}{1+\varepsilon} = a(1-\varepsilon)$$

$$\rightarrow \quad a = \frac{a(1-\varepsilon)+R}{2}$$

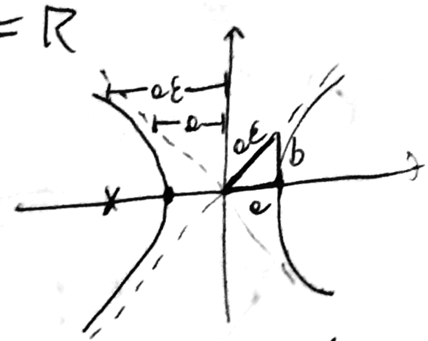
$$\rightarrow \quad \boxed{a = \frac{R}{1+\varepsilon}}$$

<u>Metodo 2</u>

Usamos cosas que sabemos de la elipse:

del dibujo, $a\varepsilon + a = R$

$$\rightarrow \quad \boxed{a = \frac{R}{1+\varepsilon}}$$



• <u>Saberse</u> estas propiedades para la elipse e hiperbola suele ser útil!! Aprendaselas!

• Usamos ahora la 3era ley para encontrar T, y hallamos que en media revolución, el satelite llega al pto de intersección:

$$t_{inter} = T/2 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4m\pi^2}{N}a^3} \quad (3^{era} \text{ ley})$$

$$= \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \cancel{2}\pi\sqrt{\frac{m}{N}}\left(\frac{R}{1+\varepsilon}\right)^{3/2}$$

• ahora, para que se intercepten, al transcurrir t_{inter}, debe ocurrir que $R = r_a(t = t_{inter})$

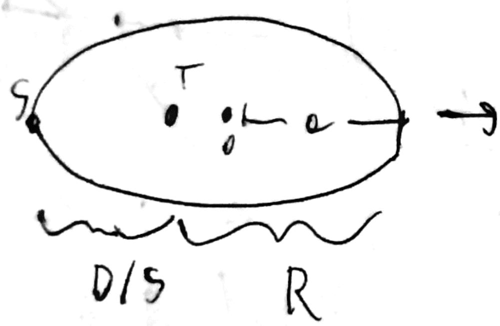
$$\to R^{3/2} = r_a^{3/2}(t = T/2)$$

$$= D^{3/2} - \frac{3}{2}\sqrt{\frac{2N}{m}}\, t_{inter} \quad \text{(parte (a))}$$

$$= D^{3/2} - \frac{3}{2}\sqrt{\frac{2N}{m}}\,\pi\sqrt{\frac{m}{N}}\,\frac{R^{3/2}}{(1+\varepsilon)^{3/2}} \quad (t_{inter} = T/2)$$

$$\to R = D\left(1 + \frac{3\sqrt{2}\,\pi}{2(1+\varepsilon)^{3/2}}\right)^{-3/2} \quad \text{(matraca)}$$

c) Il Señor un dibujo!



$$\to 2a = D/S + R$$

$$\to \frac{2R}{1+\varepsilon} = D/S + R \quad \text{(parte (b))}$$

$$\to \frac{1+\varepsilon}{2R} = \frac{1}{D/S+R} \to \varepsilon = \frac{2R}{D/S+R} - 1 = \boxed{\frac{R-D/S}{R+D/S}}$$

conocido

ecuación trascendental para ε, pues $R = R(\varepsilon)$.

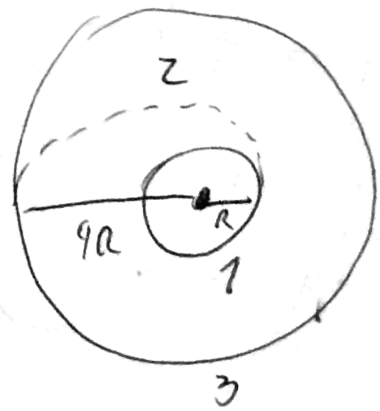
2 • Asumiendo 100% de eficiencia, la energía usada en cada cambio de órbita corresponde a la diferencia de energía entre las órbitas inicial y final. Así, el problema se reduce a encontrar la energía de cada órbita.

• Tenemos datos geométricos y físicos, en estos casos, tenemos 2 ecuaciones muy importantes

$$a = \frac{K}{2|E|}, \quad \varepsilon = \sqrt{1+\frac{2EL^2}{mK^2}}$$

Como no nos interesa L, sino E, usamos la primera. Para una circunferencia, a = Radio, así, las energías de la órbita 1 y 3 son

$$E_1 = -\frac{K}{2R}, \quad E_3 = -\frac{K}{8R}$$



Son negativas pues las órbitas cerradas no pueden tener energía positiva o nula, pues en ese caso pueden escapar.

Para la órbita 2, calculamos a igual que en la

P_1: $2a = 9R + R \rightarrow a = \frac{5R}{2} \rightarrow E_2 = \frac{-K}{2a} = \boxed{-\frac{K}{5R}}$

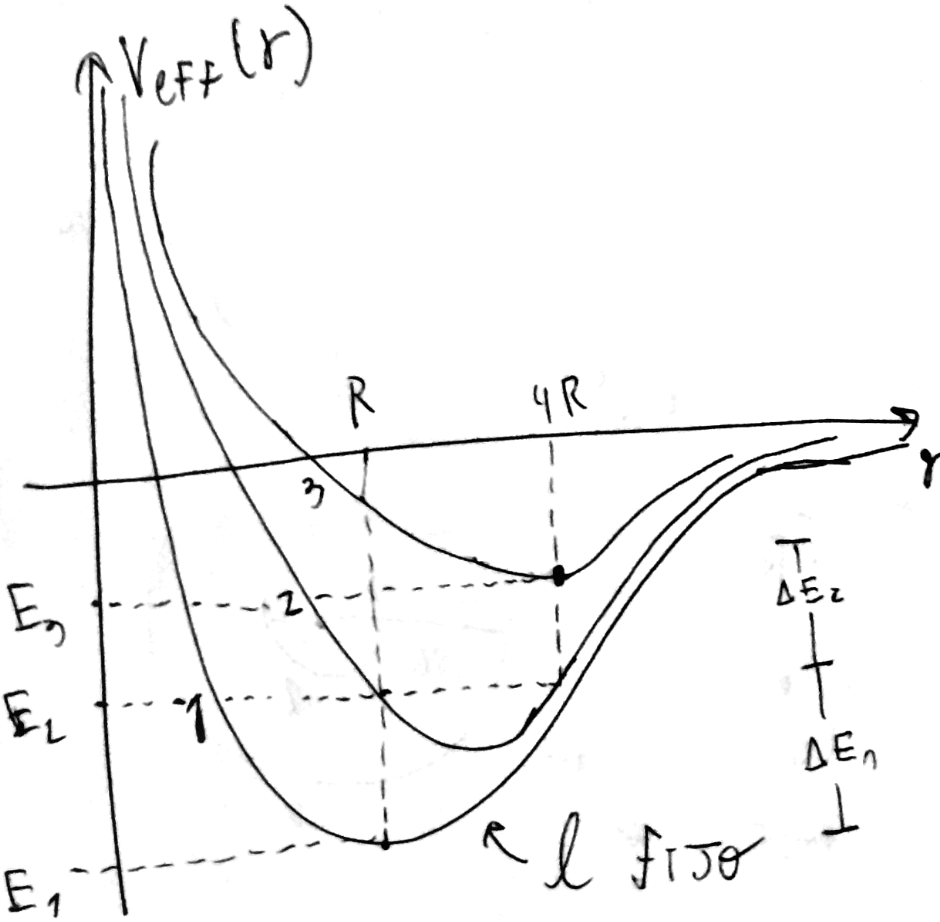
Así, las energías usadas en cada impulso son

$E_2 - E_1 = \Delta E_1 = \dfrac{3k}{10R}$, $\Delta E_2 = E_3 - E_2 = \dfrac{k}{15R}$

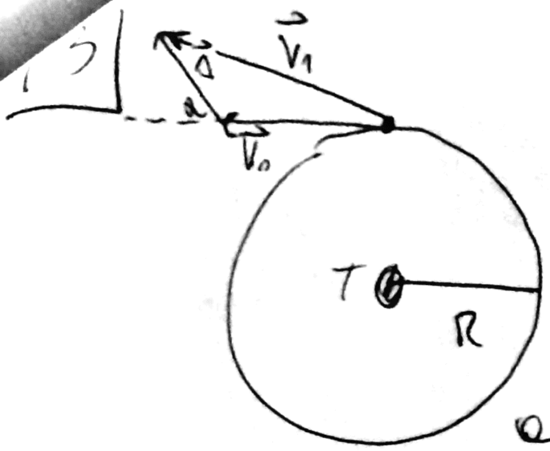
Así, la energía total usada es $E_T = \Delta E_1 + \Delta E_2$

$$= \frac{3k}{10R} + \frac{k}{15R}$$

Para visualizar cambio de órbita, es útil mirar el diagrama de potencial efectivo:



- el nivel de E determina qué extremo alcanzará el radio
- Así, es posible visualizar que $E < 0 \leftrightarrow$ órbita cerrada
- Si $E = 0$, es una trayectoria de escape (parábola)
- Si $E > 0$, tendremos una hipérbola



- $\vec{V}_1 = \vec{V}_0 + \vec{\Delta}$ (Suma vectorial)
- $\vec{V}_0$ es tangencial, pues es una órbita circunferencial

a) $a = \dfrac{K}{2|E|} \rightarrow E_0 = -\dfrac{K}{2R}$ antes del impulso

b) $E_F = \underbrace{\dfrac{m\|\vec{V}_1\|^2}{2}}_{K} - \underbrace{\dfrac{K}{r}}_{U} = \dfrac{m\|\vec{V}_1\|^2}{2} - \dfrac{K}{R}$ ← instante despues del impulso.

Pero $\|\vec{V}_1\|^2 = \|\vec{V}_0 + \vec{\Delta}\|^2 = \|-V_0\hat{x} - \Delta\cos\alpha\,\hat{x} + \Delta\sin\alpha\,\hat{y}\|^2$

$= \|-(V_0 + \Delta\cos\alpha)\hat{x} + \Delta\sin\alpha\,\hat{y}\|^2 = (V_0 + \Delta\cos\alpha)^2 + \Delta^2\sin^2\alpha$

$= \Delta^2 + V_0^2 + 2\Delta V_0\cos\alpha$ (tambien es teorema del coseno)

- necesitamos eliminar V_0, pues se nos pide E_F en función de Δ, α y R.
- Fijemonos que la órbita inicial está completamente determinada: es posible obtener V_0 con los datos. (Se necesitan 2 datos/ecuaciones para determinar una orbita, Justificación: a y b bastan)

¿Como? necesitamos una cantidad física, usamos ecuaciones físicas.

$a = \dfrac{K}{2|E|} \rightarrow E = -\dfrac{K}{2R} = \dfrac{mV_0^2}{2} - \dfrac{K}{R} \Rightarrow \boxed{V_0^2 = \dfrac{K}{mR}}$

↑ necesita V_0, esté en K

P3

$$\rightarrow \|\vec{V}_1\|^2 = \Delta^2 + \frac{K}{mR} + 2\Delta\sqrt{\frac{N}{mR}}\cos\alpha$$

$$\rightarrow E_F = \frac{m}{2}\left(\frac{N}{mR} + \Delta^2 + 2\sqrt{\frac{N}{m}}\Delta\cos\alpha\right) - \frac{N}{R}$$

$$= \frac{m}{2}\left(\Delta^2 + 2\sqrt{\frac{N}{m}}\Delta\cos\alpha\right) - \frac{N}{2R}$$

c) Escape mínimo $\rightarrow E = 0$, una parábola

$$\rightarrow \Delta^2 + 2\sqrt{\frac{K}{m}}\Delta\cos\alpha - \frac{N}{mR}$$

$$\rightarrow \Delta = \frac{-2\sqrt{\frac{N}{m}}\cos\alpha \pm \sqrt{\frac{4N}{m}\cos^2\alpha + 4N/m}}{2}$$

$$\Delta_{min} = \sqrt{\frac{N}{m}}\left(-\cos\alpha \pm \sqrt{\cos^2\alpha + 1}\right)$$

- Debemos elegir $+$, pues de lo contrario, $\Delta_{min} < 0$.
- Aún no terminamos de minimizar, tenemos que $\Delta_{min} = \Delta_{min}(\alpha)$. es decir, el ángulo también es relevante. minimizamos:

$$\frac{\partial \Delta_{min}(\alpha)}{\partial \alpha} = \sqrt{\frac{N}{mR}}\left(\operatorname{Sen}\alpha - \frac{\operatorname{Cos}\alpha \operatorname{Sen}\alpha}{\sqrt{\operatorname{Cos}^2\alpha + 1}}\right) = 0$$

$$\rightarrow \operatorname{Sen}\alpha = 0 \quad \vee \quad \sqrt{1+\operatorname{Cos}^2\alpha} = \operatorname{Cos}\alpha$$

Acá no desarrollemos

Veamos cual es un mínimo:

$$\frac{\partial^2 \Delta_{min}(\alpha)}{\partial \alpha^2} = \sqrt{\frac{N}{mR}}\left[\operatorname{Cos}\alpha\left(1 - \frac{\operatorname{Cos}\alpha}{\sqrt{\operatorname{Cos}^2\alpha+1}}\right) + \operatorname{Sen}\alpha\left(1 \pm \frac{\operatorname{Sen}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{Cos}\alpha}} - \frac{\operatorname{Sen}^2\alpha \operatorname{Cos}\alpha}{(1+\operatorname{Cos}^2\alpha)^{3/2}}\right)\right]$$

. si $\operatorname{Sen}\alpha = 0$, entonces

$$\left.\frac{\partial^2 \Delta_{min}(\alpha)}{\partial \alpha^2}\right|_{\operatorname{Sen}\alpha = 0} = \sqrt{\frac{N}{mR}}\left[\pm\left(1 \mp \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right]$$

Si $\alpha = 0$, entonces $\left.\frac{\partial^2 \Delta_{min}}{\partial \alpha^2}\right|_{\alpha=0} = \sqrt{\frac{N}{mR}}\left[1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right] > 0$

$\therefore$ $\alpha = 0$ es mínimo, lo que buscamos

$$\boxed{\Delta_{min} = \sqrt{\frac{N}{mR}}\left(\sqrt{2}-1\right), \quad \alpha = 0}$$