

Prueba Auxiliar N° 8

91] Se dan lo siguiente:

$$\Delta P = f(\text{Variable 1, Variable 2, ..., Variable N})$$

Para ello, se emplea el teorema de Buckingham que establece:

"El N° de grupos Adimensionales necesarios para representar un fenómeno dimensionalmente homogéneo donde intervienen 'k' variables, es igual a 'k-r', donde 'r' es el número de dimensiones básicas o fundamentales mínimas necesarios para representar las variables del fenómeno".

Así, sean los números Adimensionales $\pi_1, \dots, \pi_{k-r}$

$$\Rightarrow \pi_1 = \phi(\pi_2, \pi_3, \dots, \pi_{k-r})$$

Los pasos a seguir para la Adimensionalización:

1. Definir las variables:

$$\Delta P, L, \vec{v}, \rho, \mu, D, e$$

Propiedades
del fluido

Propiedades de la tubería

2. Dimensiones:

$$[\Delta P] : \text{MT}^{-2}\text{L}^{-1}$$

$$[D], [e] : L$$

$$[\rho] : \text{ML}^{-3}$$

$$[L] : L$$

$$[\vec{v}] : \text{LT}^{-1}$$

$$[\mu] : \text{MT}^{-1}\text{L}^{-1}$$

①

3. Grupos Adimensionales

$$\begin{aligned} \# G.A. &= k - r \\ &= 7 - 3 \\ &= 4 \end{aligned} \quad k: \# \text{ Variables}, \quad r: \# \text{ dimensiones}$$

4. Escoger variables n repetir. (según el # de dimensiones).

→ Usaremos D , ρ y $\bar{V}$.

5. Grupos Adimensionales!

$$\pi_1 = \Delta P D^a \rho^b \bar{V}^c, \quad \pi_2 = \mu D^a \rho^b \bar{V}^c, \quad \pi_3 = e D^a \rho^b \bar{V}^c, \quad \pi_4 = L D^a \rho^b \bar{V}^c$$

6. Resolver sist. de ecuaciones:

$$\pi_1: \pi T^{-2} L^{-1} \cdot L^a (\pi L^{-3})^b (LT^{-1})^c = [1]$$

$$\begin{array}{l} \pi \\ T \\ L \end{array} \left\{ \begin{array}{l} 1 + b = 0 \\ -2 - c = 0 \\ -1 + a - 3b + c = 0 \end{array} \right.$$

$$-2 - c = 0$$

$$-1 + a - 3b + c = 0$$

$$a = 0, b = -1, c = -2$$

Adimensional.

$$\pi_1 = \frac{\Delta P}{\rho \bar{V}^2}$$

$$\pi_2: (\pi T^{-1} L^{-1}) L^a (\pi L^{-3})^b (LT^{-1})^c$$

$$\begin{array}{l} \pi \\ T \\ L \end{array} \left\{ \begin{array}{l} 1 + b = 0 \\ -1 - c = 0 \\ -1 + a - 3b + c = 0 \end{array} \right.$$

$$-1 - c = 0$$

$$-1 + a - 3b + c = 0$$

$$a = b = c = -1$$

$$\pi_2 = \frac{\mu}{\rho \bar{V} D}$$

$$\pi_3: (L) L^a (\pi L^{-3})^b (LT^{-1})^c$$

$$\pi_1 \quad b=0$$

$$\pi_1 \quad c=0$$

$$\pi_1 \quad 1+a-3b+c=0$$

$$a=-1, b=c=0$$

$$\pi_3 = \frac{e}{D}$$

$$\pi_4: L L^a (\pi L^{-3})^b (LT^{-1})^c \Rightarrow a=-1, b=c=0$$

$$\pi_4 = \frac{L}{D}$$

7. Formar la relación funcional.

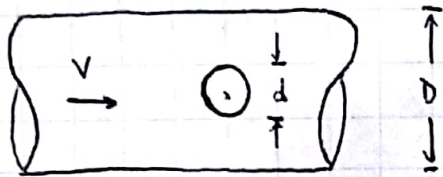
$$\frac{\Delta P}{\rho \bar{V}^2} = \phi \left(\frac{\mu}{\rho \bar{V} D}, \frac{e}{D}, \frac{L}{D} \right)$$

Como el primer término, se puede invertir solo cambiando la forma de ϕ

$$\Rightarrow \text{Como } Re = \frac{\rho \bar{V} D}{\mu}$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta P}{\rho \bar{V}^2} = \phi \left(Re, \frac{e}{D}, \frac{L}{D} \right)$$

921.



Se busca relacionar la fuerza de arrastre de la forma: sobre la esfera

$$F_D = f(d; D; v; \mu; \rho)$$

Diámetro de la esfera $\rightarrow d$
 Diámetro de la tubería $\rightarrow D$
 Veloc del fluido $\rightarrow v$
 Viscosidad $\rightarrow \mu$
 Densidad $\rightarrow \rho$

Queda propuesto hacer el mismo análisis del problema anterior. Dependiendo de qué variables ustedes eligen repetir, tendrán las siguientes relaciones:

$$(1) \frac{F_D}{\rho v^2 D^2} = \phi \left(\frac{\rho v D}{\mu}; \frac{d}{D} \right), \quad (2) \frac{F_D}{\mu v D} = \phi \left(\frac{\rho v D}{\mu}; \frac{d}{D} \right)$$

En este problema, se tiene un modelo, que es del cual se pueden tomar datos, estudiar variables, comportamientos, pruebas, etc. Luego, esto se extiende a un prototipo que es de mayor escala, mediante análisis de similitud.

Nos dan:

- $d_m = 2 \text{ cm}$
- $D_m = 5 \text{ cm}$
- $V_m = 2 \text{ m/s}$
- $F_{Dm} = 0.15 \text{ N}$

$D_p = 1 \text{ m}$
 $V_p = 6 \text{ m/s}$

Si despejamos la fuerza de arrastre del prototipo usando la relación (1) o (2), se debería obtener el mismo valor de la fuerza de arrastre.

$\Rightarrow$ Para que haya similitud entre modelo y prototipo, se debe cumplir

1. Similitud geométrica
2. Similitud cinemática
3. Similitud dinámica

Así, se cumple que.

$$\left(\frac{F_D}{\rho V^2 D^2} \right)_{\text{modelo}} = \left(\frac{F_D}{\rho V^2 D^2} \right)_{\text{prototipo}}$$

$$F_{D,p} = F_{D,m} \cdot \left(\frac{V_p}{V_m} \right)^2 \cdot \left(\frac{D_p}{D_m} \right)^2 \cdot \frac{\rho_p}{\rho_m} = 540 \text{ [N]}$$

También:

$$\left(\frac{F_D}{\mu V D} \right)_{\text{modelo}} = \left(\frac{F_D}{\mu V D} \right)_{\text{prototipo}}$$

$$F_{D,p} = F_{D,m} \cdot \left(\frac{V_p}{V_m} \right) \cdot \left(\frac{D_p}{D_m} \right) \cdot \frac{\mu_m}{\mu_p} = 9 \text{ [N]}$$

¿Por qué ocurre esto? Si vemos el número de Reynolds:

$$Re_p = \frac{\rho_p V_p D_p}{\mu_p}, \quad Re_m = \frac{\rho_m V_m D_m}{\mu_m} \Rightarrow Re_p = 60 Re_m$$

Wego, no hay semejanza dinámica, entonces la similitud entre modelo y prototipo no se podrá establecer para distintas relaciones.

73] $\frac{u}{U_\infty} = f(y)$, Caso 1: $f(y) = \sin\left(\frac{\pi y}{2\delta}\right)$

Caso 2: $f(y) = 2\left(\frac{y}{\delta}\right) - \left(\frac{y}{\delta}\right)^2$

a) $\delta^* = \int_0^\infty \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy$

Caso 1: $\delta^* = \int_0^\infty \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy = \int_0^\delta \left(1 - \sin\left(\frac{\pi y}{2\delta}\right)\right) dy$
 $= \delta + \cos\left(\frac{\pi y}{2\delta}\right) \cdot \frac{2\delta}{\pi} \Big|_0^\delta$
 $= \delta \left[1 - \frac{2}{\pi}\right] \approx 0.36\delta$

Caso 2: $\delta^* = \int_0^\infty \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy = \int_0^\delta \left(1 - \frac{y}{\delta} \cdot 2 + \frac{y^2}{\delta^2}\right) dy$
 $= \delta - \frac{2\delta^2}{2\delta} + \frac{\delta^3}{3\delta^2} = \frac{\delta}{3}$

b) $\theta = \int_0^\infty \frac{u}{U} \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy$

Caso 1: $\theta = \int_0^\infty \frac{u}{U} \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy = \int_0^\delta \left[\sin\left(\frac{\pi y}{2\delta}\right) - \sin^2\left(\frac{\pi y}{2\delta}\right)\right] dy$
 $= \int_0^\delta \sin\left(\frac{\pi y}{2\delta}\right) dy - \int_0^\delta \sin^2\left(\frac{\pi y}{2\delta}\right) dy$
 $= \frac{2\delta}{\pi} - \frac{\delta}{2} \approx 0.157\delta$

(6)

Caso 2:

$$\begin{aligned} \theta &= \int_0^{\infty} \frac{\mu}{U} \left(1 - \frac{u}{U} \right) dy = \int_0^{\delta} \left[\frac{2y}{\delta} - \frac{y^2}{\delta^2} \right] \left[1 - \frac{2y}{\delta} + \frac{y^2}{\delta^2} \right] dy \\ &= \int_0^{\delta} \frac{2y}{\delta} - \frac{5y^2}{\delta^2} + \frac{4y^3}{\delta^3} - \frac{y^4}{\delta^4} dy \\ &= \frac{\delta^2}{2} - \frac{5}{3} \frac{\delta^3}{\delta^2} + \frac{\delta^4}{\delta^3} - \frac{\delta^5}{5\delta^4} \\ &= \frac{2}{15} \delta \end{aligned}$$

c) Ecuación integral de momentum:

$$\tau_w = \rho U^2 \frac{d\theta}{dx}, \quad \tau_w = \mu \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0}$$

Caso 1:

$$\tau_w = \frac{\mu \cdot U \cdot \pi}{2\delta} \cdot \cos\left(\frac{\pi y}{2\delta}\right) \Big|_{y=0} = \rho U^2 \cdot 0.137 \frac{d\delta}{dx}$$

$$\frac{\pi \mu}{2\rho \cdot 0.137} \cdot dx = \delta d\delta / \int$$

$$\int_0^x \frac{\pi \mu}{2\rho \cdot 0.137} dx = \int_0^{\delta(x)} \delta d\delta$$

$$\frac{\delta^2}{2} = 11.4657 \cdot \frac{\mu}{\rho U} \cdot x$$

$$\delta(x) = 4.789 \sqrt{\frac{\mu x}{\rho U}}$$

(7)

Caso 2: $\mu \cdot U \cdot \frac{x}{\delta} = \rho U^2 \cdot \frac{\delta}{15 dx}$

$$\frac{15 \mu dx}{\rho U} = \delta d\delta \quad | \int$$

$$\frac{15 \mu}{\rho U} x = \frac{\delta^2}{2}$$

$$\Rightarrow \delta = 5.47723 \sqrt{\frac{\mu x}{\rho U}}$$

d) Caso 1: Esfuerzo de corte:

$$\begin{aligned} \tau_w &= \rho U^2 \frac{d\theta}{dx} = \rho U^2 \cdot 0.137 \frac{d}{dx} \left(4.789 \sqrt{\frac{\mu x}{\rho U}} \right) \\ &= 0.656 \cdot \rho U^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{\mu}{\rho U}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} \\ &= 0.328 \rho U^2 \sqrt{\frac{\mu}{\rho U x}} = \frac{0.328 \rho U^2}{\sqrt{Re_x}} \end{aligned}$$

Coef. de fricción local:

$$C_f = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2} \rho U^2} = \frac{0.656}{\sqrt{Re_x}}$$

Coef. de fricción total:

$$\begin{aligned} C_f &= \frac{1}{L} \cdot \int_0^L C_f dx = \frac{0.656}{L} \cdot \sqrt{\frac{\mu}{\rho U}} \int_0^L \frac{1}{\sqrt{x}} dx \\ &= \frac{2 \times 0.656}{(2)^{1/2}} \cdot \sqrt{\frac{\mu}{\rho U}} \cdot \sqrt{L} = \frac{1.312}{\sqrt{Re_L}} \end{aligned}$$

(8)

Caso 2: Esfuerzo de corte:

$$\tau_w = \rho U^2 \frac{d\sigma}{dx} = \rho U^2 \cdot \frac{2}{15} \frac{d}{dx} \left(5.47723 \sqrt{\frac{\mu x}{\rho U}} \right)$$
$$= 0.365 \frac{\rho U^2}{\sqrt{Re_x}}$$

Coef. de fricción local:

$$c_f = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2} \rho U^2} = \frac{0.7303}{\sqrt{Re_x}}$$

Coef. de fricción total:

$$C_f = \frac{1}{L} \int_0^L c_f dx = \frac{0.7303}{L} \sqrt{\frac{\mu}{\rho U}} \int_0^L x^{-1/2} dx$$
$$= \frac{1.461}{\sqrt{Re_L}}$$