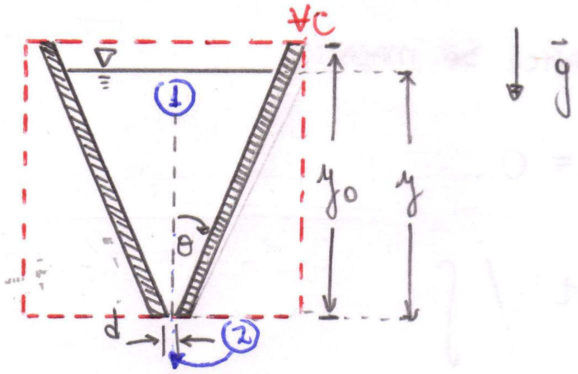
Pauta Auxiliar # 3:

Pregunta 1:



Para este problema, utilizaremos el volumen de control especificado. En base a ese volumen de control, se realiza un balance de masa según la ecuación:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall C} \rho \, d\forall + \int_{SC} \rho \, \vec{v} \circ d\vec{s} = 0$$

Debemos calcular el volumen del cono, así:

$$\forall = \pi \cdot y \, \frac{r^2}{3} = \frac{\pi}{3} y^3 \, tg^2(\theta)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall C} \rho \, d\forall = \rho \pi y^2 \cdot \frac{\partial y}{\partial t} \, tg^2(\theta)$$

$$\int_{SC} \rho \, \vec{v} \circ d\vec{s} = \rho \, V_{sal} \cdot A = \rho \frac{\pi \cdot d^2}{4} V_{sal} \longrightarrow \text{Necesitamos esta velocidad!}$$

Utilizaremos así la ecuación de Bernoulli en la línea de corriente definida por los puntos (1) y (2). Entonces:

$$\cancel{P_1} + \frac{1}{2}\cancel{\rho} V_1^2 + \cancel{\rho} g y = \cancel{P_2} + \frac{1}{2}\cancel{\rho} V_{sal}^2 + \cancel{\rho g \cdot 0}^{\,0}$$

$$\sqrt{\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + 2gy} = V_{sal}.$$

Ahora bien, el orificio de salida es bastante pequeño, por lo que $\frac{dy}{dt}$ es pequeño, es decir $\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 << 2gy$

Luego $\sqrt{2gy + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} \approx \sqrt{2gy} \Rightarrow \vec{V}_{SAL} = \sqrt{2gy}$

Reemplazando todo en la ecuación de balance de masa:

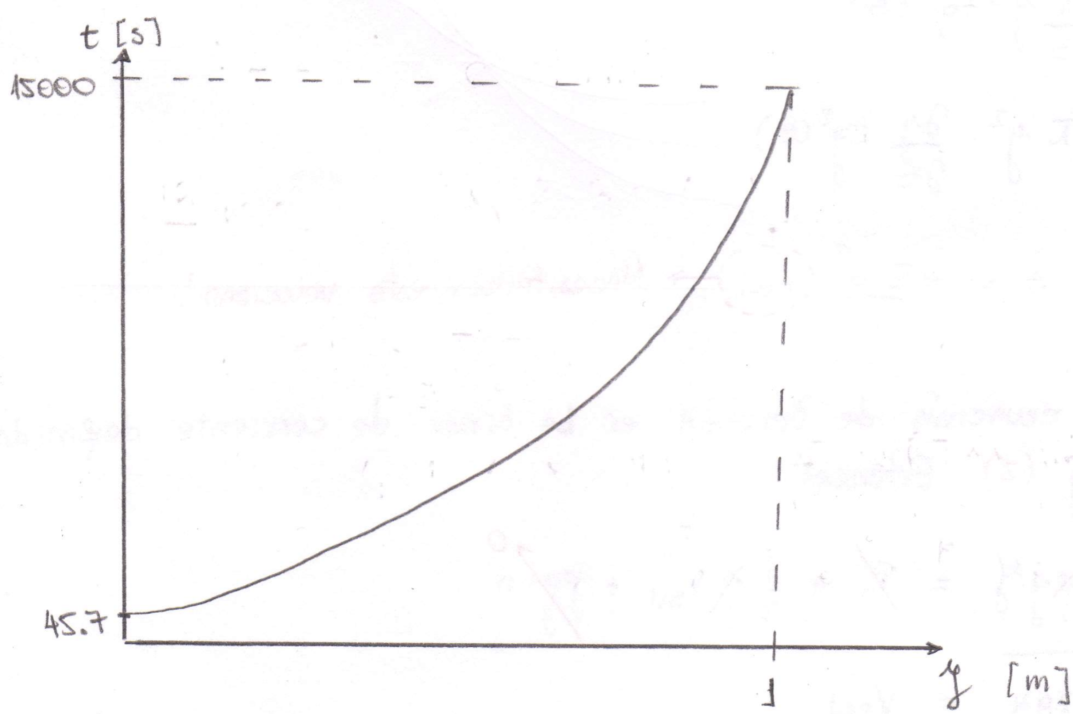
$$\cancel{\rho}\,\cancel{\pi}\, y^2\, tg^2(\theta)\, \frac{dy}{dt} + \cancel{\rho}\,\frac{\cancel{\pi} d^2}{4} \sqrt{2gy} = 0$$

$$\frac{4\, tg^2(\theta)}{d^2 \sqrt{2g}} \cdot y^{3/2}\, dy = -\, dt \quad / \int$$

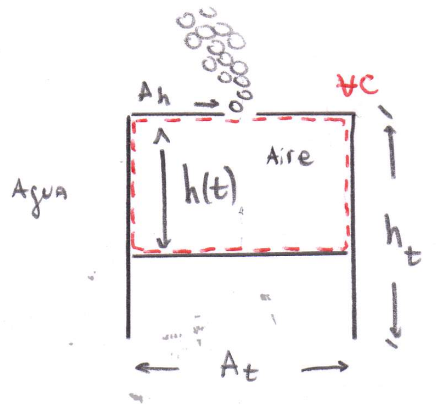
$$\frac{4 tg^2(\theta)}{d^2 \sqrt{2g}} \int_{y_0}^{0} y^{3/2}\, dy = -\int_{0}^{t} dt \Rightarrow \frac{8 tg^2(\theta)}{5 d^2 \sqrt{2g}} \cdot \cancel{-}\, y_0^{5/2} = \cancel{-}\, t$$

$$t = \frac{8 tg^2(\theta)}{d^2 \sqrt{2g}} \cdot \frac{y_0^{5/2}}{5}$$

//



Pregunta 2:



$\rho_w = 1000 \frac{kg}{m^3}$ $\quad A_h = 1\ cm^2$ $\quad h_t = 1\ m$

$\rho_a = 1{,}23 \frac{kg}{m^3}$ $\quad A_t = 1\ m^2$

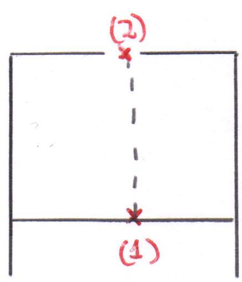
a) Usando balance de masa sobre el volumen de control definido:

$$\frac{d}{dt}\int_{\forall C} \rho_a d\forall - \rho_a A_t \underbrace{\cancel{V_{en}}}_{0} + \rho_a \cdot A_h \cdot V_{SAl}(t) = 0$$

$$\frac{d}{dt} \cancel{\rho_a} \cdot A_t \cdot h(t) + \cancel{\rho_a} A_h \cdot V_{SAl}(t) = 0$$

$$V_{SAl}(t) = -\frac{A_t}{A_h} \cdot \frac{dh}{dt}$$

b) Se utilizará la ecuación de Bernoulli para encontrar una expresión para $h(t)$:



Se toma la línea de corriente definida entre (1) y (2):

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho \underbrace{\cancel{V_1^2}}_{\frac{dh}{dt}} + \rho g z_1 = P_2 + \frac{1}{2}\rho V_2^2 + \rho g z_2$$

$$\frac{1}{2}\rho_a\left(\frac{dh}{dt}\right)^2 - \frac{1}{2}\rho_a \cdot \frac{A_t^2}{A_h^2}\left(\frac{dh}{dt}\right)^2 = P_2 - P_1 + \rho_a g \underbrace{(z_2 - z_1)}_{h(t)}$$

$P_1 - P_2 = \rho_w \cdot g \cdot h(t)$ (*) $\rightarrow$ Requiere de una explicación extensa!!

$$\Rightarrow \left(\frac{dh}{dt}\right)^2\left[\frac{A_t^2}{A_h^2} - 1\right] \cdot \frac{1}{2}\rho_a = (\rho_w - \rho_a) g h(t).$$

$$\left(\frac{dh}{dt}\right)^2 = \frac{2(\rho_w - \rho_a) g h(t)}{\rho_a\left[\left(\frac{A_t}{A_h}\right)^2 - 1\right]}$$

$$\frac{dh}{dt} = \pm\sqrt{\frac{2(\rho_w-\rho_a)g}{\rho_a\left(\left(\frac{A_t}{A_h}\right)^2-1\right)}}\cdot h^{1/2}(t)$$

$$\frac{dh}{\sqrt{h}} = \pm\sqrt{\frac{2(\rho_w-\rho_a)g}{\rho_a\left(\left(\frac{A_t}{A_h}\right)^2-1\right)}}\,dt \quad \Big/ \int$$

Nos quedamos con la solución negativa puesto que $\frac{dh}{dt} < 0$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\sqrt{h} = C_1 - \sqrt{\frac{2(\rho_w-\rho_a)g}{\rho_a\left(\left(\frac{A_t}{A_h}\right)^2-1\right)}}\cdot t$$

$$\therefore\ h(t) = \left(C_1 - 2\cdot\sqrt{\frac{2(\rho_w-\rho_a)g}{\rho_a\left(\left(\frac{A_t}{A_h}\right)^2-1\right)}}\,t\right)^2$$

$$h(0) = h_t \Rightarrow C_1 = \sqrt{h_t}$$

$$\Rightarrow h(t) = \left[\sqrt{h_t} - 2\sqrt{\frac{2(\rho_w-\rho_a)g}{\rho_a\left(\left(\frac{A_t}{A_h}\right)^2-1\right)}}\,t\right]^2 //$$

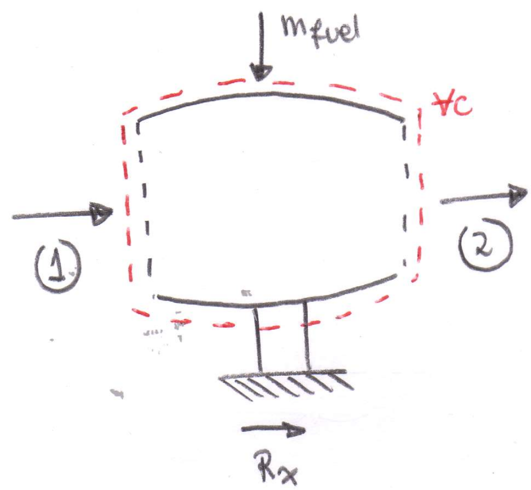
c) sea t_f tal que $h(t_f)=0$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\sqrt{h_t} = \sqrt{\frac{2(\rho_w-\rho_a)}{\rho_a\left(\left(\frac{A}{A_h}\right)^2-1\right)}g}\ t_f$$

$$t_f = 39.61\ [s] //$$

(*) La presión estática P_1 y P_2 es la presión que el aire está ejerciendo sobre el agua, luego, la diferencia de altura entre dichos puntos es semejante a evaluar la presión manométrica usando agua como fluido de estudio.

Pregunta 3:



Definiendo el volumen de control indicado, se establece un balance de momento lineal.

$$\frac{D}{Dt}\left(m_{sis} \cdot V_{sis}\right) = \sum \vec{F}$$

$$= \frac{d}{dt}\int_{\forall c} \vec{v}\,\rho\, d\forall + \int_{sc} \vec{v}\,\rho\,\vec{v}\circ d\vec{A}$$

$$\sum \vec{F} = R_x = \underbrace{\frac{d}{dt}\int_{\forall c} \vec{v}\,\rho\, d\forall}_{0} + \dot{m}_2 V_2 - \dot{m}_1 V_1 - \underbrace{\dot{m}_{fuel} V_{fuel}}_{0}$$

$$\Rightarrow R_x = \dot{m}_2 V_2 - \dot{m}_1 V_1$$

$$\dot{m} = \rho V A \, , \qquad RT = P \cdot \frac{1}{\rho} \Rightarrow \rho = \frac{101\,325}{293 \cdot 287} = 1.205 \ \frac{kg}{m^3}$$

Constante "R" para el aire

$$\Rightarrow \dot{m}_1 = \rho_1 \cdot V_1 \cdot A_1 = 150.625 \ \frac{kg}{s}.$$

$$\dot{m}_2 = \dot{m}_1\left(1 + \frac{1}{30}\right)$$

Proviene de la relación aire combustible

$$\frac{m_{Aire}}{m_{fuel}} = \frac{30}{1} \Rightarrow m_{fuel} = m_{Aire} \cdot \frac{1}{30} \Rightarrow$$ Al salir con la misma velocidad que el aire

$$\dot{m}_{fuel\ salida} = \dot{m}_{Aire} \cdot \frac{1}{30} \quad \wedge \quad \dot{m}_2 = \dot{m}_1 + \dot{m}_{fuel\ salida}.$$

$$\Rightarrow R_x = 150.625\left(1 + \frac{1}{30}\right) \cdot 900 - 150.625 \cdot 250$$

$$= 102\,425 \ [N]$$