MA5306 Problemas Inversos y de Control de EDP
Profesor: Axel Osses.
Auxiliar: Francisco Fernández.

Tarea 2.

En adelante sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ suave y acotado con $N \geq 2$, un abierto relativo $\Gamma_0 \subset \partial\Omega$, $Q = \Omega \times (-T, T)$, $p, q \in L^\infty(\Omega)$, condiciones $v^0, \phi^0 \in H_0^1(\Omega)$, $v^1, \phi^1 \in L^2(\Omega)$, $f \in L^2(\Omega \times \mathbb{R})$ y $g \in L^2(\partial\Omega \times \mathbb{R})$. Con todo esto podemos definir los siguientes problemas:

$$(P_C)\begin{cases} \partial_t^2 v(t) - \triangle v(t) &= 0 \qquad \forall t \\ v(0) &= v^0 \\ \partial_t v(0) &= v^1 \\ v(t)|_{\partial\Omega} &= \mathbb{1}_{\Gamma_0} g(\cdot,t) \quad \forall t \end{cases} \qquad (P_I)\begin{cases} \partial_t^2 u(t) - \triangle u(t) + qu(t) &= f(\cdot,t) \quad \forall t \\ u(0) &= v^0 \\ \partial_t u(0) &= v^1 \\ u(t)|_{\partial\Omega} &= g(\cdot,t) \quad \forall t \end{cases}$$

$$(P_A)\begin{cases} \partial_t^2 \phi(t) - \triangle \phi(t) &= 0 \quad \forall t \\ \phi(0) &= \phi^0 \\ \partial_t \phi(0) &= \phi^1 \\ \phi(t)|_{\partial\Omega} &= 0 \quad \forall t \end{cases} \qquad (P_D)\begin{cases} \partial_t^2 y(t) - \triangle y(t) + py(t) &= (q-p)u(t) \quad \forall t \\ y(0) &= 0 \\ \partial_t y(0) &= 0 \\ y(t)|_{\partial\Omega} &= 0 \qquad \forall t \end{cases}$$

P1. Utilizando el método espectral visto en clases (o el del Dautray-Lions, Cap XV), **demuestre** que existe una única solución del problema (P_A):
$\phi(\cdot) \in C^0(\mathbb{R}_+, H_1^0(\Omega)) \cap C^1(\mathbb{R}_+, L^2(\Omega)) \cap C^2(\mathbb{R}_+, H^{-1}(\Omega))$

Donde a $C^n(\mathbb{R}_+, E)$ lo dotamos de la norma usual: $\|\phi\|_{C^n(\mathbb{R}_+,E)} = \sum_{k=0}^{n} \sup_{t\in\mathbb{R}_+} \|(\partial_t)^k \phi(t)\|_E$

P2. A partir de fórmulas de métodos de multiplicadores **demuestre** el siguiente teorema y **explique** que consecuencias tiene para la controlabilidad del problema (P_C) y que diferencias tiene con la desigualdad vista en clases.

Teorema 2.2(Osses, 2001)
Sea $x_0 \in \Omega$, $d > 0$ y $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$ antisimétrica tales que $|d|^2 + \|A\|^2 = 1$. Entonces para todo $T > 2R(x_0)/d$, ϕ la solución de (P_A) cumple:

$$E(0) \leq \frac{r(x_0, d, A)}{2(dT - 2R(x_0))} \int_0^T \int_{\Gamma(x_0,d,A)} \left| \frac{\partial \phi}{\partial \nu} \right|^2 dsdt$$

Donde los términos de la desigualdad están definidos por:

$$\begin{aligned} E(t) &= \|\partial_t \phi(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla \phi(t)\|^2_{L^2(\Omega)} \ , \\ R(x_0) &= \max_{x\in\bar{\Omega}} |x - x_0| \\ \Gamma(x_0, d, A) &= \{x \in \partial\Omega \ : \ (x - x_0)\cdot(dI + A)\nu > 0\} \\ \Gamma(x_0) &= \Gamma(x_0, 1, 0 \in \mathbb{R}^{N\times N}) \\ r(x_0, d, A) &= \max_{x\in\Gamma(x_0,d,A)} (x - x_0)\cdot(dI + A)\nu \end{aligned}$$

P3. Defina como en clases el operador $L : D \subset L^2(Q) \to L^2(Q)$ como $L(v) = L_0(V) + pv = \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \triangle v + pv$ y el peso $\varphi_\lambda = e^{\lambda\phi}$ con $\phi(x,t) = |x - x_0|^2 - \beta t^2 + M$. Donde las constantes son como en clases y el dominio es:

$$D = \left\{ v \in L^2(Q) \mid L_0(V) \in L^2(Q),\ v(t)|_{\partial\Omega} = 0, \forall t,\ v(\pm T) = \partial_t v(\pm T) = 0 \right\}$$

Con estas definiciones **demuestre** que para todo $w = e^{s\varphi_\lambda} v$ con $v \in D$, $P_0(w) = e^{s\varphi_\lambda} L_0(e^{-s\varphi_\lambda} w)$ se puede descomponer como $P_0(w) = P_1(w) + P_2(w) + R_0(w)$, donde:

$$P_1(w) = \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \triangle w + s^2\lambda^2\varphi_\lambda^2 \left((\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2})^2 - |\nabla \phi|^2 \right) w$$

$$P_2(w) = (M_1 - 1)s\lambda\varphi_\lambda(\frac{\partial \phi}{\partial t} - \triangle\phi)w - s\lambda^2\varphi_\lambda \left((\frac{\partial \phi}{\partial t})^2 - |\nabla\phi|^2 \right) w - 2s\lambda\varphi_\lambda(\frac{\partial \phi}{\partial t}\frac{\partial w}{\partial t} - \nabla\phi \cdot \nabla w)$$

$$R_0(w) = -M_1 s\lambda\varphi_\lambda \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \triangle\phi \right) w$$

Además **explique** como usando esta descomposición, para un M_1 conveniente dependiente de los parámetros, se obtiene el siguiente teorema:

Teorema 2.0.1(Puel, 2004)
Sean $x_0 \notin \bar{\Omega}$ tal que $\Gamma_0 \subset \Gamma(x_0)$ y $m > 0$. Entonces existen constantes $\lambda_0, s_0, C > 0$ tales que para todo $\lambda \geq \lambda_0$, $s \geq s_0$, $v \in D$ y $\|p\|_{L^\infty(Q)} \leq m$ se cumple la siguiente cota:

$$\begin{aligned} s\lambda \int_{-T}^{T}\int_{\Omega} e^{2s\varphi_\lambda}(|\partial_t v|^2 + |\nabla v|^2)dxdt + s^3\lambda^3 \int_{-T}^{T}\int_{\Omega} e^{2s\varphi_\lambda}\varphi_\lambda^3 |v|^2 dxdt + \int_{-T}^{T}\int_{\Omega} |P_1(w)|^2 + |P_2(w)|^2 dxdt \\ \leq C \int_{-T}^{T}\int_{\Omega} e^{2s\varphi_\lambda}|L(v)|^2 dxdt + Cs\lambda \int_{-T}^{T}\int_{\Gamma(x_0)} e^{2s\varphi_\lambda} \left| \frac{\partial v}{\partial \nu} \right|^2 d\sigma dt \end{aligned}$$

P4. **Explique** a grandes rasgos la demostración del siguiente teorema y que se puede concluir de este sobre el operador $\Lambda : p \to \Lambda_p$ donde $\Lambda_p(f,g) = \frac{\partial u}{\partial \nu}|_{\Gamma_0}$ con u la solución del problema (P_I).

Teorema 3.1.3(Puel,2004)
Sean un punto $x_0 \notin \bar{\Omega}$ tal que $\Gamma(x_0) \subset \Gamma_0$, constantes $a_0, m > 0$, un tiempo $T > R(x_0)$ y una solución $u \in H^1((0,T), L^\infty(\Omega))$ de (PI) con $|v^0| \geq a_0 > 0$.

Entonces existe $C > 0$ tal que para todo $\|p\|_{L^\infty(\Omega)} \leq m$, la solución y de (P_D) cumple:

$$\frac{1}{C}\|q - p\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \left\| \frac{\partial y}{\partial \nu} \right\|^2_{H^1((0,T), L^2(\Gamma_0))} \leq C\|q - p\|^2_{L^2(\Omega)}$$