**MA3402-1. Estadística 2017.**
**Profesor:** Raul Gouet.
**Auxiliares:** Diego Marchant y Raimundo Saona.

# Auxiliar 10

Lunes 23 de Octubre

## E1. Conocimiento a priori

---

Asuma que usted fue contratado por una empresa que quiere averiguar dónde es que un proceso aleatorio se centra, es decir quieren estimar un parámetro. Dada la basta experiencia de la empresa, saben que el proceso, representado por la variable aleatoria $X \sim Exp(\theta)$, con $\theta$ es desconocido.

¿Cuán importante es esta decisión? Bueno, hay un costo exponencial respecto del error que se comete, es decir, si la estimación es $\widehat{\theta}$ y el parámetro es $\theta$, el costo es

$$L(\delta = \widehat{\theta}, \theta) = (\widehat{\theta} - \theta)^2 \,.$$

Para tan importante decisión usted le pregunta a su jefe si hay alguna idea apriori sobre este parámetro. Su jefe le dice que sí la hay, que están seguro que está entre 0 y 1, sin preferencia dentro de ese intervalo. Conversando más con los operarios del proceso se da cuenta que ellos están seguros que el parámetro es 1/2, exactamente. La empresa le permite hacer exactamente $n$ intentos antes de tomar la decisión.

**(a)** Formalice la situación en términos de teoría de decisiones, en un contexto bayesiano.

**(b)** Describa una apriori que permita tomar en cuenta ambas informaciones.

**(c)** Encuentre la regla de decisión óptima para la ley apriori anteriormente descrita.

## P1. Largo del intervalo

Estudios relacionados con el comportamiento de ciertos bichos indican que éstos tienden a organizarse al azar, linealmente, en un intervalo de longitud $\theta > 0$, a la derecha de un punto donde se ubica una feromona. Existe una controversia sobre el valor de $\theta$ entre dos equipos de científicos:

En el laboratorio A se sostiene que $\theta \leq 1$ mientras que en el laboratorio B se sostiene lo contrario.

Para resolver la controversia se diseña un experimento que consiste en medir las distancias $X_1, \ldots, X_n$ de $n$ bichos, con respecto a la feromona.

**(a)** Defina el modelo paramétrico correspondiente, indicando los supuestos que están implícitos.

**(b)** Muestre que el TRV de nivel $\alpha$ para $H_0 : \theta \leq 1$ vs $H_1 : \theta > 1$ tiene región de rechazo dada por

$$R = \{x \in \mathcal{X} : \widehat{\theta}_n(x) \geq k_\alpha\},$$

donde $\widehat{\theta}_n(x) = \text{máx}\{x_1, \ldots, x_n\}$ y $k_\alpha$ se calcula imponiendo que el test tenga nivel de significación $\alpha$.

**(c)** Compruebe que $k_\alpha = (1-\alpha)^{1/n}$.

## P2. Costo lineal con dirección

Sean $X_1, \ldots, X_n$ observaciones i.i.d. del modelo normal $N(\mu, \sigma^2)$, donde $\mu$ es un parámetro desconocido y $\sigma$ es conocido. Se sabe que la función de pérdida para la estimación de $\mu$ está dada por

$$L(d, \mu) = |d - \mu|(\alpha \mathbb{1}_{\{d \geq \mu\}} + \beta \mathbb{1}_{\{d < \mu\}}), \tag{1}$$

donde $\alpha$ y $\beta$ son constantes positivas dadas.

Considere la familia de estimadores $\mathcal{E} = \{\hat{\mu}_s(X) = \overline{X}_n - s \ : \ s \in \mathbb{R}\}$.

**(a)** Calcule el riesgo de $\hat{\mu}_s \in \mathcal{E}, \forall s \in \mathbb{R}$, y expréselo en términos de $s, \sigma, \alpha, \beta, n$ y las funciones $\phi(t) = e^{-t^2/2}/\sqrt{2\pi}$ y $\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \phi(t)dt$.

**(b)** Demuestre que existe un estimador de mínimo riesgo uniforme en la clase $\mathcal{E}$ y calcule el riesgo correspondiente. Indique el comportamiento límite del riesgo mínimo (si existe) cuando $n \to \infty$.

## P3. Decisión en espacios pequeños

Considere el problema de decisión con estados de naturaleza $\Theta = \{0, 1\}$, espacio de decisiones $D = \{0, 1\}$ y función de pérdida $L(d, \theta)$, dada por $L(0, 0) = 0, L(0, 1) = 2, L(1, 0) = 1 = L(1, 1)$. Suponga que es posible observar una va de Bernoulli $X$, con $P_\theta(X = 1) = p_\theta, P_\theta(X = 0) = 1 - p_\theta$, donde $p_0 = 1/2, p_1 = 1/5$.

**(a)** Encuentre la regla de decisión de Bayes, cuando la probabilidad a priori es $\pi(0) = \pi(1) = 1/2$.

**(b)** Encuentre una regla de decisión minimax.[1]

**(c)** Calcule el EMV de $\theta$.

[1] Se dice que $\delta$ es una regla de decisión minimax si $\max_{\theta \in \Theta} R_\delta(\theta) \leq \max_{\theta \in \Theta} R_{\delta'}(\theta)$, $\forall \delta'$, donde $R_\delta(\theta)$ es el riesgo de $\delta$.