MA3402-1. Estadística 2017.
Profesor: Raul Gouet.
Auxiliares: Diego Marchant y Raimundo Saona.

Auxiliar 4

Lunes 28 de Agosto

I1. EMV y EMP

¿Cuándo el Estimador Máximo Verosímil es igual al Estimador Máximo a Posteriori?
¿Tiene sentido esta pregunta, aún cuando estamos hablando de modelos de estimación distintos?

Asuma que $\Theta \subseteq \mathbb{R}$ es acotado. Muestre que existe $\pi(\cdot)$, densidad a priori, tal que:

$$\widehat{\theta}_{EMV} = \widehat{\theta}_{EMP}$$

para cualquier modelo estadístico que se imponga sobre la muestra.

I2. A priori impropia

¿Qué sucede con la propiedad anterior cuando Θ es no acotado?
¿Qué sucede con la propiedad anterior cuando la medida de Lebesgue de Θ es infinita?

Muestre que existe $\pi(\cdot)$, densidad a priori, tal que:

$$\widehat{\theta}_{EMV} = \widehat{\theta}_{EMP}$$

para cualquier modelo estadístico que se imponga sobre la muestra, independiente de las propiedades de Θ.

I3. Indefinición de EMV

Considere una m.a.s. $X_1, ..., X_n$, donde $X_i \sim U(\theta, \theta + 1)$, con θ un parámetro desconocido en $\mathbb{R}$. Muestre que no existe un único EMV y que en realidad $\forall x = (x_1, ..., x_n) \quad \exists \alpha, \beta$ tales que

$$argmax_{\theta \in \Theta = \mathbb{R}}(L(\theta|x)) = [\alpha, \beta]$$

Proponga una solución para este problema y arguméntela intuitivamente.

I4. Inexistencia de EMV

Considere una m.a.s. $X_1, ..., X_n$, donde $X_i \sim F_\theta$, con θ un parámetro desconocido en $\mathbb{R}^{2k}$ y F_θ la distribución de la suma de k normales, de varianza $\theta_1^2, ..., \theta_k^2$ y centradas en $\theta_1^1, ..., \theta_k^1$. Muestre que, si $k \geq n$ no existe EMV.

Considere una m.a.s. $X_1, ..., X_n$, donde $X_i \sim \mathcal{N}(0, \theta)$, con θ un parámetro desconocido > 0. Muestre que $\forall x = (x_1, ..., x_n)$, no existe un EMV.

E1. EMV y muestra on i.i.d.

Suponga que usted tiene $T_1, ..., T_n$ i.i.d., con $T_i \sim Exp(\theta)$ y $\theta \in (0, \infty)$ desconocido. El tema es que usted no tiene acceso a $T_1, ..., T_n$ sino que a $T_1, ..., T_k, X_{k+1}, ..., X_n$, donde

$$X_i = \alpha \quad \text{ssi} \quad T_i \geq \alpha$$

Considere entonces una observación $(x_1, ..., x_n)$ y proponga $\widehat{\theta}_{EMV}(x_1, ..., x_n)$ el estimador máximo verosímil en esta obervación.

Exija que le muestren la implementación de esta dinámica en R.

E2. Bayes, Inicio de la espera

Considere $X_1, ..., X_n$ variables aleatorias cuya distribución (condicional a θ) es

$$f(x_1, ..., x_n|\theta) = \prod_{i \leq n} e^{-(x_i - \theta)} \mathbb{1}_{x_i > \theta} ,$$

ie: $X_i = \theta + Exp(1)$. Tome la a priori de θ como

$$\pi(\theta) = e^{-\theta} \mathbb{1}_{\theta > 0} ,$$

ie: $\theta \sim Exp(1)$.

Describa el espacio de observaciones correspondiente.

Argumente intuitivamente por qué existe un único máximo a posteriori.

Calcule el estimador $\widehat{\theta}_{EMP}$.

Exponga una a priori impropia que genera una a posteriori constante, para cada observación.

E3. EMV, Modelo Cauchy

Considere una m.a.s. $X_1, ..., X_n$, donde $X_i \sim Cauchy(\theta, 1)$, ie:

$$f_\theta(x_i) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1 + (x_i - \theta)^2}$$

Calcule el estimador máximo verosímil $\widehat{\theta}_{EMV}$.

Dada la muestra $x = (0, 5, 9)$ plotee $L(\theta; x)$ la verisimilitud en función de $\theta \in \Theta = \mathbb{R}$.