Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE
Estadística MA 3402, 14/11/17, Prof. R. Gouet.

Guía de Ejercicios #3

1. Un proceso determinístico $z_0, z_1, \ldots, z_n$ se rige por la recurrencia $z_{i+1} = \lambda z_i$, donde λ es una constante conocida. Los valores de z_i no puede ser observados sin error y las observaciones Y_i se rigen por el modelo
$$Y_i = z_i + \epsilon_i,$$
donde los ϵ_i son errores centrados, no correlacionados con varianza común. Determine los estimadores de mínimos cuadrados de $z_0, z_1, \ldots, z_n$ (los parámetros del modelo). Debe tomar en cuenta la recurrencia entre los z_k al momento de plantear el problema de mínimos cuadrados.

2. Un topógrafo realiza mediciones $Y_1, Y_2, \ldots, Y_k$ de los ángulos $\theta_1, \ldots, \theta_k$ de un polígono de k lados. Suponiendo que las mediciones están sujetas a errores ϵ_i, centrados, no correlacionados y con varianzas σ^2, obtenga los estimadores de mínimos cuadrados de los ángulos θ_i, en los siguientes casos:
   a) ignorando que los ángulos suman $(k-2)\pi$ e
   b) incorporando al modelo la restricción $\sum_{i=1}^k \theta_i = (k-2)\pi$.
   c) Compare las varianzas de los estimadores en ambos casos e indique, de acuerdo con la comparación, cual sería el procedimiento más adecuado.

3. Considere el modelo lineal simple $Y_i = \alpha + \beta x_i + \epsilon_i$, $i = 1, \ldots, n$, con las hipótesis habituales. Para estimar β se ha sugerido usar
$$\tilde{\beta} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=2}^{n} \frac{Y_i - Y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}.$$
   a) Indique qué justificación o motivación puede tener dicho estimador.
   b) Averigüe si $\tilde{\beta}$ es insesgado.
   c) Compare $\tilde{\beta}$ con el estimador de mínimos cuadrados en términos de las varianzas respectivas.

4. Se sabe que los puntos (x_i, y_i) con $x_i > 0, i = 1, \ldots, n$ están sobre la hipérbola de ecuación $xy = \alpha$. Los valores x_i se pueden fijar a voluntad y se consideran no aleatorios pero los y_i sólo se pueden observar con error. Observamos entonces $Z_i = y_i + \epsilon_i, i = 1, \ldots, n$, donde los ϵ_i son errores iid centrados con varianza común σ^2. Por lo tanto, tenemos el siguiente modelo
$$Z_i = \frac{\alpha}{x_i} + \epsilon_i,\ i = 1, \ldots, n.$$
   a) Encuentre el estimador de mínimos cuadrados para α.
   b) Determine el estimador insesgado para σ^2 basado en los residuos.

5. Considere el modelo lineal simple $Y_i = \alpha + \beta x_i + \epsilon_i$, $i = 1, \ldots, n$ (errores centrados, no correlacionados y varianzas σ^2). Por un error del encargado del sistema de información, se han extraviado los valores de la variable X para las observaciones $m+1, \ldots, n$ pero se conservan los valores de Y. Se propone "reconstruir" los datos extraviados sustituyendo los x_i perdidos por la media $\overline{x}$ de los x_i, para $i = 1, \ldots, m$.

a) Calcule los estimadores de mínimos cuadrados $\widetilde{\alpha}$ y $\widetilde{\beta}$ de α y β, obtenidos a partir del conjunto de datos reconstituidos.

b) Compare $\widetilde{\alpha}$ y $\widetilde{\beta}$ con los correspondientes estimadores basados en los datos completos, en términos de sesgo y varianza.

c) Compare $\widetilde{\alpha}$ y $\widetilde{\beta}$ con los correspondientes estimadores basados en los primeros m datos (es decir, se ignoran los Y_i para los cuales se extraviaron los x_i), en términos de sesgo y varianza.

6. Considere el modelo lineal $Y = X\beta + \epsilon$, con errores centrados, de varianza constante $\sigma^2 < \infty$ y no correlacionados. Suponga la matriz X no aleatoria, con n filas y p columnas y tal que $rg(X) \leq p$. Sea $\hat{\beta}$ cualquier solución del sistema de ecuaciones normales $X'X\beta = X'Y$.

   Sea $\phi = c'\beta = \sum_{i=1}^{n} c_i\beta_i$. Se dice que ϕ es estimable (linealmente) si existe b tal que $\tilde{\phi} := b'Y$ es estimador insesgado de ϕ. Sea $\hat{\phi} = c'\hat{\beta}$.

   a) Compruebe que siempre existe solución del sistema de ecuaciones normales.

   b) Muestre que ϕ es estimable si y solo si existe $b \in \mathbb{R}^n$ tal que $b'X = c'$ y que toda función ϕ es estimable cuando $rg(X) = p$.

   c) Demuestre que $\hat{\phi}$ es estimador insesgado de ϕ.

   d) Muestre que no toda ϕ es estimable. En particular, no todas las componentes de β son estimables.

   e) Sea $\hat{b}$ la proyección de b en $< X >$ (el sev engendrado por las columnas de X). Pruebe que $\hat{b}'Y$ es estimador insesgado de ϕ.

   f) Sea $\tilde{b} \in < X >$ tal que $\tilde{b}'Y$ es insesgado para ϕ. Verifique que $\tilde{b} = \hat{b}$.

   g) Demuestre que $Var(\hat{b}'Y) \leq Var(b'Y)$ y compruebe que $\hat{\phi} = \hat{b}'Y$ para concluir que $Var(\hat{\phi}) \leq Var(\tilde{\phi})$ (esto es el teorema de Gauß-Markov para el modelo de rango incompleto.)

7. Sea el modelo lineal

$$Y_i = \alpha + \beta x_i + \gamma z_i + \delta(x_i/z_i) + \epsilon_i, \ i = 1, \ldots, 8$$

   donde los ϵ_i son va centradas no, correlacionadas, con varianza constante. Investigue qué parámetros del modelo son (linealmente) estimables, de acuerdo con la definición del ejercicio anterior.