

Pauta Aux 3

P11

a) Escribir el modelo paramétrico.

•) Observaciones: $\mathcal{X} = \mathbb{R}_+^{2m}$ ← pues son distancias y son 2m muestras.

•) Parámetros: $\mathcal{H} = \mathbb{R}_+^2 \ni (a, b)$

•) Familia: $\mathcal{G} = \{P_{a,b} : (a,b) \in \mathcal{H} \text{ con } X_i \sim N(a, \sigma^2), Y_i \sim N(b, \sigma^2)\}$

b) p.d.f.: $T(X, Y) = (\sum_{i=1}^{T_1} X_i, \sum_{i=1}^{T_2} Y_i)$ es suff. y completo.

La distribución conjunta de X, Y es

$$f_{a,b}(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_m) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi}\sigma^2)^{2m}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^m (x_i - a)^2 + (y_i - b)^2}; \text{ que se puede reescribir}$$

como $\rightarrow$

$$= \underbrace{\frac{1}{(2\pi\sigma^2)^m} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^m x_i^2 + y_i^2}}_{h(X,Y)} \cdot \underbrace{e^{-\frac{1}{2\sigma^2} m(a^2 + b^2)}}_{c(a,b)} \cdot \underbrace{e^{\frac{a}{\sigma^2} \sum_{i=1}^m x_i + \frac{b}{\sigma^2} \sum_{i=1}^m y_i}}_{(*)}$$

Reparametrizando el espacio $\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}' = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{a}{\sigma^2} \\ \frac{b}{\sigma^2} \end{pmatrix}; (a,b) \in \mathcal{H} \right\} = \mathbb{R}_+^2$ nos queda q

$f_{a,b}(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_m) = h(X,Y) \cdot c(a,b) e^{\theta_1 T_1 + \theta_2 T_2}$ y como $\mathcal{H}'$ tiene un rectángulo 2-dimensional $\Rightarrow T = (T_1, T_2)$ es suff. y completo.

c) P.d.f. : $\bar{X} \cdot \bar{Y}$ es el EIVUM de Área $(a, b) = a \cdot b$

$$E_{a,b}(\bar{X} \cdot \bar{Y}) = E_{a,b}(\bar{X}) \cdot E_{a,b}(\bar{Y}) = a \cdot b \Rightarrow \text{Insensado.}$$

$$E(\bar{X} \cdot \bar{Y} | T(X, Y)) = \bar{X} \cdot \bar{Y} \quad \text{pues } \bar{X} = \frac{1}{n} T_1, \quad \bar{Y} = \frac{1}{n} T_2 \quad (\text{Son función de } T(X, Y))$$

$\hat{g}(\theta)$

Luego, por Rao-Blackwell $\bar{X} \cdot \bar{Y}$ es el EIVUM.

d) Sea $\tilde{g}(\theta) = \bar{X} \bar{Y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i Y_i$. Comparar con el EIVUM.

$$E(\bar{X} \bar{Y}) \stackrel{||}{=} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(X_i) E(Y_i) = a \cdot b \Rightarrow \text{Insensado.}$$

$$\begin{aligned} \text{Var}(\bar{X} \cdot \bar{Y}) &= E(\bar{X}^2 \cdot \bar{Y}^2) - a^2 b^2 \\ &= E(\bar{X}^2) \cdot E(\bar{Y}^2) - a^2 b^2 \\ &= \left(\frac{\sigma^2}{n} + a^2 \right) \left(\frac{\sigma^2}{n} + b^2 \right) - a^2 b^2 \\ &= \left(\frac{\sigma^4}{n} + \sigma^2(a^2 + b^2) \right) \frac{1}{n} \end{aligned} \quad \left\{ \begin{aligned} \text{Var}(\bar{X} \bar{Y}) &= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \text{Var}(X_i Y_i) \\ &= \frac{1}{n} \text{Var}(X_1 Y_1) \\ &= \frac{1}{n} (\sigma^4 + \sigma^2(a^2 + b^2)) \end{aligned} \right.$$

Claramente $\text{Var}(\hat{g}(\theta)) \leq h(\tilde{g}(\theta)) \quad \forall n > 1$

P2  $X = (X_1, \dots, X_n); X_i \sim \text{Pois}(\lambda)$

a) p.d.f. $\psi_{X_i}(t) = e^{-\lambda(1-e^t)} \quad \forall t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \psi_{X_i}(t) &= \mathbb{E}(e^{tX_i}) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{tn} \frac{e^{-\lambda} \lambda^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}}{n!} \cdot (e^t \lambda)^n \\ &= e^{-\lambda(1-e^t)} \end{aligned}$$

b) Comprobar que $\tilde{\gamma}_{X_i}(t) = e^{tX_i}$ es integrada de $\psi_{X_i}(t)$

Sí, pues $\mathbb{E}(\tilde{\gamma}_{X_i}(t)) = \mathbb{E}(e^{tX_i})$
 $= e^{-\lambda(1-e^t)} = \psi_{X_i}(t)$

c) p.d.f.: $S(X) = \sum_{i=1}^n X_i \sim \text{Poisson}(n\lambda)$

$$\begin{aligned} \psi_S(t) &= \mathbb{E}(e^{t \sum_{i=1}^n X_i}) \stackrel{II}{=} \prod_{i=1}^n \mathbb{E}(e^{tX_i}) \\ &= [e^{-\lambda(1-e^t)}]^n \\ &= e^{-(n\lambda)(1-e^t)} \end{aligned}$$

que es la función generadora de una Poisson($n\lambda$)

$\therefore S \sim \text{Pois}(n\lambda)$

$$d) \underline{X_i | S=s \sim \text{Binom}(s, \frac{1}{n})}$$

$$P(X_i = k | S=s) \stackrel{\text{Bayes}}{=} \frac{P(S=s | X_i = k) \cdot P(X_i = k)}{P(S=s)}$$

$$= \frac{P\left(\sum_{i=2}^m X_i = s-k\right) \cdot P(X_i = k)}{P(S=s)}$$

$$= \binom{s}{k} \left(\frac{1}{n}\right)^k \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{s-k}$$

e) p.d.f.: $S(X)$ es suff. y completo.

La densidad conjunta de $X = (X_1, \dots, X_n)$ es

$$\begin{aligned} f_{\lambda}(x_1, \dots, x_n) &= \frac{e^{-n\lambda} \lambda^{\sum_{i=1}^n x_i}}{\prod_{i=1}^n x_i!} \quad (\text{que se puede reescribir como}) \\ &= \underbrace{e^{-n\lambda}}_{(1\lambda)} \cdot \underbrace{\frac{1}{\prod_{i=1}^n x_i}}_{h(X)} \cdot e^{\sum_{i=1}^n x_i \cdot \ln(\lambda)} \end{aligned}$$

Reparametrizando $(H) \rightarrow (H)' = \{ \ln(\lambda) : \lambda \in (H) \} = \mathbb{R}$

$\Rightarrow S(X)$ es suff y completo (pues $\mathbb{R}$ contiene un rectángulo 1-dimensional)

f) p.d.f. $\hat{\gamma}_{x_i}(t) = \left(1 - \frac{1}{n} + \frac{e^t}{n}\right)^S$ es L EIVUM de $\gamma_{x_i}(t)$

Por Rao-Blackwell, sea

$$\hat{\gamma}(s) = E(\tilde{\gamma}_{x_i} | S(X) = s)$$

$$= E(e^{tx_i} | S(X) = s)$$

$$= \sum_{k=0}^s e^{tk} \binom{s}{k} \left(\frac{1}{n}\right)^k \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{s-k}$$

$$= \sum_{k=0}^s \binom{s}{k} \left(\frac{e^t}{n}\right)^k \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{s-k} = \left(1 - \frac{1}{n} + \frac{e^t}{n}\right)^s$$

Luego $\hat{\gamma}(S) = \left(1 - \frac{1}{n} + \frac{e^t}{n}\right)^S$ es L EIVUM.