MA3402-1 Estadística
Profesor: Raúl Gouet B.
Auxiliares: Diego Marchant D. y Raimundo Saona U.

Auxiliar 5

4 de Septiembre de 2017

Definición 1. (Intervalo de confianza) Si $g(\theta) \in \mathbb{R}$, diremos que $S(X) = [L(X), R(X)]$ es un intervalo de confianza de nivel $1-\alpha$ para $g(\theta)$ con $\alpha \in [0,1]$ si

$$\mathbb{P}_\theta[L(X) \leq g(\theta) \leq R(X)] \geq 1-\alpha$$

Definición 2. (Pivote) Un pivote es una función $T : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ medible tal que

1. La ley de $T(X)$ no depende de θ.
2. $T(X)$ es una función monótona de $g(\theta)$.

Definición 3. Sea dice que una v.a. tiene distribución χ^2 con n grados de libertad si es absolutamente continua respecto a la densidad dada por

$$f(t) = \frac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)} t^{n/2-1} e^{t/2} \mathbb{1}_{(0,\infty)(t)}$$

Definición 4. (Densidad a posteriori) Dada una densidad a priori $\pi(\theta)$ sobre el espacio de parámetros Θ y la densidad $p(x|\theta)$ sobre el espacio muestral, definimos la densidad a posteriori como

$$p(\theta|x) = \frac{p(x|\theta)\pi(\theta)}{p(x)}$$

Definición 5. (Máximo a posteriori) Definimos el Estimador MAP como

$$\hat{\theta}(X) \in argmax_{\theta\in\Theta} p(\theta|x)$$

P1 Sea $T_1, \ldots, T_n$ una MAS con densidad $e^{-(t-\theta)}$, $t \geq \theta$ donde $\theta \in \Theta = \mathbb{R}$ es un parámetro desconocido. Suponga que $\pi(\theta) = e^{-\theta}\mathbb{1}_{[0,\infty)}$. Calcule el estimador MAP de θ.

P2 Sea $X_1, \ldots, X_n$ una MAS de una distribución exponencial de media θ.

a) Muestre que el estadístico $T(X) = 2\sum_{i=1}^{n} X_i/\theta$ es una cantidad pivotal y que tiene distribución χ^2 con $2n$ grados de libertad.

b) Use la cantidad pivotal de la parte anterior para determinar un intervalo de confianza del 95 % para θ.

c) Si para una muestra de tamaño $n = 7$ se obtiene $\overline{X} = 4{,}77$, use el resultado anterior para encontrar un intervalo de confianza del 95 % para θ.

P3 Sea $X = (X_1, \ldots, X_n)$ una MAS de un modelo paramétrico $\{\mathbb{P}_\theta | \theta \in \Theta\}$ con $\mathcal{X} = \mathbb{R}$, $\Theta = (0, \infty)$ tal que $\mathbb{P}_\theta$ admite densidad $f(x, \theta)$, cuyo soporte no depende de θ. Para $x \in \mathcal{X}, \theta, h \in \Theta$ tales que $f(x, \theta) > 0$ se define

$$r(x, \theta, h) := \frac{f(x, \theta + h) - f(x, \theta)}{f(x, \theta)}$$

Sea $I_{\theta,h} = \mathbb{E}_\theta(r(X, \theta, h)^2)$ y $\hat{\theta}(X)$ un estimador insegado de θ con varianza finita.

a) Demuestre que
$$Var_\theta(\hat{\theta}(X)) \geq \frac{h^2}{I_{\theta,h}},\ \forall \theta, h \in \Theta$$

b) Calcule $I_{\theta,h}$ para una MAS del modelo uniforme en el intervalo $[0,\theta],\ \theta > 0$

c) Calcule el apartado anterior
$$\lim_{h \to 0^+} \frac{I_{\theta,h}}{h^2}$$