

MA3402-1 Estadística**Profesor:** Raúl Gouet B.**Auxiliares:** Diego Marchant D. y Raimundo Saona U.**Auxiliar 3**

21 de Agosto de 2017

Teorema 1. (*Factorización*) Consideremos el modelo $\mathcal{P} = \{\mathbb{P}_\theta \mid \theta \in \Theta\}$ y $T(X)$ un estadístico, entonces $T(X)$ es suficiente para $\mathcal{P}$ si

$$f_\theta(X) = g_\theta(T(X))h(X)$$

Teorema 2. (*Rao-Blackwell*) Sea $\mathcal{P} = \{\mathbb{P}_\theta \mid \theta \in \Theta\}$ una familia paramétrica, $g(\theta)$ una función del parámetro, $\tilde{g}(X)$ un estimador insesgado de $g(\theta)$ de varianza finita. Sea $T(X)$ un estadístico suficiente para $\mathcal{P}$. Definimos

$$\hat{g}(t) = \mathbb{E}_\theta(\tilde{g}(X) \mid T(X) = t)$$

entonces $\hat{g}(T(X))$ es un estimador insesgado de varianza mínima.

Definición 1. (Completo) Diremos que $T(X)$ es completo si, dada f medible

$$\mathbb{E}_\theta(f(T(X))) = 0 \Rightarrow f = 0 \text{ ctp}$$

Definición 2. (Familia Exponencial) Consideremos una familia $\mathcal{P} = \{\mathbb{P}_\theta \mid \theta \in \Theta\}$ sobre $\mathbb{X}$ y supongamos que $\mathbb{P}_\theta$ tiene densidad f_θ . Si f_θ se puede escribir como

$$f_\theta(X) = C(\theta) e^{\sum_{i=1}^k Q_i(\theta) t_i(X)} h(x)$$

entonces diremos que esta familia es exponencial.

Proposición 1. Si f_θ se puede descomponer como

$$f_\theta(X) = C(\theta) e^{\sum_{i=1}^k \theta_i t_i(X)} h(x)$$

entonces $T(X) = (t_1(X), \dots, t_k(X))$ es un estadístico completo si Θ tiene un rectángulo k -dimensional.

P1 Estudiaremos el problema de la estimación del área de un rectángulo a partir de observaciones independientes de los lados de un rectángulo, sujeta a errores gaussianos de varianza $\sigma^2 > 0$ conocida. Consideremos un rectángulo de lados a, b desconocidos. Sea una MAS $X = (X_1, \dots, X_n)$ (que representa el lado a) con distribución $\mathcal{N}(a, \sigma^2)$ y una MAS $Y = (Y_1, \dots, Y_n)$ (que representa el lado b) con distribución $\mathcal{N}(b, \sigma^2)$. Supondremos X independiente de Y .

- Escriba el modelo paramétrico asociado.
- Muestre que el estadístico $T(X, Y) = (\sum_{i=1}^n X_i, \sum_{i=1}^n Y_i)$ es suficiente para el parámetro y completo.
- Deduzca que $\bar{X} \cdot \bar{Y}$ es el EIVUM de $A(a, b)$, el área del rectángulo.
- Considere el estimador razonable del promedio de las áreas y compárelo con el EIVUM ¿Es consistente el resultado?

P2 Dada una MAS $X = (X_1, \dots, X_n)$ de un modelo poisson de parámetro λ , nos interesa estimar insesgadamente la función generadora de momentos (fgm) $\psi_X(t)$.

- a) Muestre que $\psi_{X_i}(t) = e^{-\lambda(1-e^t)}$, $t \in \mathbb{R}$.
- b) Compruebe que $\tilde{\psi}_X(t) = e^{tX_1}$ es estimador insesgado de $\psi_X(t)$.
- c) Muestre que la v.a. $S(X) = \sum_{i=1}^n X_i$ tiene ley Poisson de parámetro $n\lambda$.

Ind: Utilice la fgm.

- d) Muestre que la ley condicional de X_1 dado $S = s$ es una binomial de parámetros $(s, \frac{1}{n})$.
- e) Muestre que $S(X)$ es un estadístico suficiente y completo para λ .
- f) Aplique el teorema de Rao-Blackwell para concluir que

$$\hat{\psi}_X(t) = \left(1 - \frac{1}{n} + \frac{e^t}{n}\right)^S$$

es el EIVUM de $\psi_X(t)$