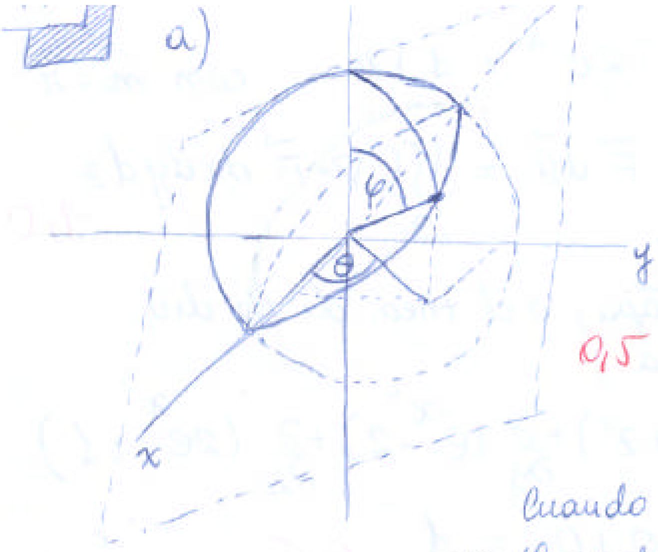
a)



$\vec{\sigma}(\theta,\varphi) = (\operatorname{sen}\varphi\cos\theta, \operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\theta, \cos\varphi)$ 0,5

Condición para los límites

$$\cos\varphi \geq 2\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\theta$$

Cuando $\theta\in[0,\pi]$, φ no alcanza a llegar a $\pi/2$ $(\cos\varphi > 0)$ 0,5

$$\Rightarrow \tan\varphi^* \geq \frac{1}{2\operatorname{sen}\theta}$$

Cuando $\theta\in[\pi,2\pi]$, $\operatorname{sen}\theta < 0$

pero φ puede llegar mas alla de $\pi/2$, por esto

$\cos\varphi < 0$

$$\Rightarrow \theta\in[0,2\pi], \ \varphi\in\left[0, \arctan\left(\frac{1}{2\operatorname{sen}\theta}\right)\right]$$ 0,5

b) La intersección del plano con la esfera es una circunferencia. Una circunferencia plana tendría la parametrización:

$$\vec{\sigma}(\theta) = R\cos\theta\,\hat{i} + R\operatorname{sen}\theta\,\hat{j}$$

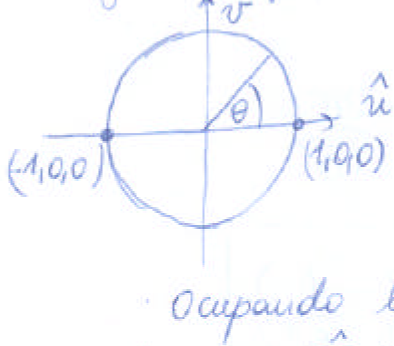
Ocupamos esta para parametrizar la del plano $2y = z$. Aquí $R = 1$, ya que el plano corta el origen. Para que la parametrización esté correcta, hay que cambiar $\hat{i}$ y $\hat{j}$ por dos vetores perpendiculares en $z = 2y$.

$$\hat{u} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \qquad \hat{v} = \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}}$$ ← normalizado. notar que $\hat{u}\cdot\hat{v} = 0$.

luego $\vec{\sigma}(\theta) = \begin{pmatrix}\cos\theta\\ \operatorname{sen}\theta/\sqrt{5}\\ 2\operatorname{sen}\theta/\sqrt{5}\end{pmatrix}$ con $\theta\in(0,2\pi)$ 0,7

derivando: $\vec{\sigma}'(\theta) = \begin{pmatrix}-\operatorname{sen}\theta\\ \cos\theta/\sqrt{5}\\ 2\cos\theta/\sqrt{5}\end{pmatrix}$ como $\|\vec{\sigma}'(\theta)\| = 1 \Rightarrow \hat{T} = \begin{pmatrix}-\operatorname{sen}\theta\\ \cos\theta/\sqrt{5}\\ 2\cos\theta/\sqrt{5}\end{pmatrix}$ 0,3

Siguiendo la parametrización



$p = (1,0,0)$

$q = (-1,0,0)$

En el pto $(1,0,0)$, $\theta = 0$

$$\Rightarrow \hat{T}_p = (0,1,2)/\sqrt{5}$$

En el pto $(-1,0,0)$, $\theta = \pi$

$$\Rightarrow \hat{T}_q = (0,-1,2)/\sqrt{5}$$

Ocupando la ecuación de la recta.

$$\gamma_p(t) = \hat{T}_p t + p = \begin{pmatrix}1\\t\\2t\end{pmatrix} \qquad \gamma_q(t) = \hat{T}_q t + q = \begin{pmatrix}-1\\-t\\-2t\end{pmatrix}$$ 0,5

c) Flujo de $\vec{F}(x,y,z) = (x+y^2+z^2)\hat{\imath} + (e^{-x^2}-2)\hat{\jmath} + (2e^{-x^2}+1)\hat{k}$ con $\hat{n} = \hat{r}$

Se tiene que $\iint_S \vec{F}\cdot d\vec{A} + \iint_{tapa} \vec{F}\, d\vec{A} = \iiint_\Omega \nabla\cdot\vec{F}\, dx\,dy\,dz$ 1,0

(Hay que considerar la tapa, o el theo. de la div. no es valida)

Es facil ver que $\vec{\nabla}\cdot\vec{F} = \frac{\partial}{\partial x}(x+y^2+z^2) + \frac{\partial}{\partial y}(e^{-x^2}-2) + \frac{\partial}{\partial z}(2e^{-x^2}+1)$

$= 1 + 0 + 0 = 1.$ 0,5

Luego

$$\underbrace{\iiint_\Omega 1\cdot d\vec{v}}_{\text{es el vol de la semi esfera}} = \frac{4}{3}\pi r^3 \cdot \frac{1}{2}\Big|_{r=1} = \frac{2}{3}\pi \quad 0{,}5$$

Falta calcular el flujo en la tapa. Suponiendo la parametrizacion de b).

$$\vec{\sigma}(\theta,r) = \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\operatorname{sen}\theta/\sqrt{5} \\ 2r\operatorname{sen}\theta/\sqrt{5} \end{pmatrix} \quad \text{con } r\in[0,1],\ \theta\in[0,2\pi]$$

Luego. $\iint_{⊗} \vec{F}(\vec{\sigma}(\theta,r)) \cdot \underbrace{-\hat{w}}_{\hat{n}}\, d\vec{A}$ con $\hat{w} = \hat{u}\times\hat{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}$

Luego $\vec{F}(\vec{\sigma}(\theta,r)) \cdot -\hat{w} = \frac{2e^{-x^2}+4-2e^{-x^2}-1}{\sqrt{5}} = \frac{3}{\sqrt{5}}$.

Como $\frac{\partial\sigma}{\partial r} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \operatorname{sen}\theta/\sqrt{5} \\ 2\operatorname{sen}\theta/\sqrt{5} \end{pmatrix}$ $\frac{\partial\sigma}{\partial\theta} = \begin{pmatrix} -r\operatorname{sen}\theta \\ r\cos\theta/\sqrt{5} \\ 2r\cos\theta/\sqrt{5} \end{pmatrix}$

Asi $\left[\frac{\partial\sigma}{\partial r}\times\frac{\partial\sigma}{\partial\theta}\right] = \begin{pmatrix} 0 \\ -2r/\sqrt{5} \\ r/\sqrt{5} \end{pmatrix} \Rightarrow \left\|\frac{\partial\sigma}{\partial r}\times\frac{\partial\sigma}{\partial\theta}\right\| = \frac{4r^2}{5}+\frac{r^2}{5} = r^2$

Luego $\iint_{⊗} \vec{F}\cdot dA = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \frac{3r^2}{\sqrt{5}} = 2\pi\cdot\frac{r^3}{\sqrt{5}}\Big|_0^1 = \frac{2\pi}{\sqrt{5}}$ 0,7

Luego $\iiint_\Omega \vec{\nabla}\cdot\vec{F}\, dV - \iint_{⊗} F\cdot d\vec{A} = \frac{2\pi}{3} - \frac{2\pi}{\sqrt{5}}$

$\Rightarrow \boxed{\iint_S \vec{F}\cdot d\vec{A} = 2\pi\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)}$ 0,3

Distribucion de puntaje:

a) 0,5 mono; 0,5 parametrizacion
0,5 limites