Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE
MA2002 Cálculo Avanzado y Aplicaciones 10-2

Control 1

P1. Sea

$$\vec{F} = 2\frac{\cos\theta}{r^3}\hat{r} + \frac{\operatorname{sen}\theta}{r^3}\hat{\theta}$$

con (r, θ, z) las coordenadas cilíndricas. Utilice las fórmulas para los operadores diferenciales en coordenadas cilíndricas para:

i) (1.5 ptos.) Calcular $\operatorname{div}\vec{F}$ en $\mathbb{R}^3 \setminus$ eje Z.

ii) (1.5 ptos.) Verificar que $\operatorname{rot}\vec{F} = \vec{0}$ en $\mathbb{R}^3 \setminus$ eje Z.

iii) (1.5 ptos.) Calcular $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$ donde C es un círculo de ecuación $x^2 + y^2 = a^2$ en el plano $z = H$ (con H cte. y $a > 0$).

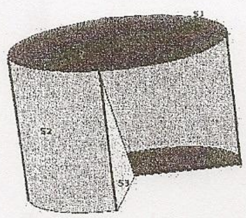
iv) (1.5 ptos.) ¿Es $\vec{F}$ conservativo en $\mathbb{R}^3 \setminus$ eje Z? Justifique su respuesta.
Indicación: Justifique que $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = 0$, $\forall C$ curva que no pasa por el eje Z.
cerrado

Indicación: Puede usar que, si $\vec{F} = F_u\hat{u} + F_v\hat{v} + F_w\hat{w}$ entonces

$$\operatorname{div}\vec{F} = \frac{1}{h_u h_v h_w}\left[\frac{\partial}{\partial u}(F_u h_v h_w) + \frac{\partial}{\partial v}(F_v h_u h_w) + \frac{\partial}{\partial w}(F_w h_u h_v)\right] \quad \text{y} \quad \operatorname{rot}\vec{F} = \frac{1}{h_u h_v h_w}\begin{vmatrix} h_u\hat{u} & h_v\hat{v} & h_w\hat{w} \\ \frac{\partial}{\partial u} & \frac{\partial}{\partial v} & \frac{\partial}{\partial w} \\ F_u h_u & F_v h_v & F_w h_w \end{vmatrix}$$

donde h_u, h_v, h_w son los factores escalares asociados al sistema coordenado.

P2. a) (3.0 ptos.) Calcule $I = \int_S \operatorname{rot}\vec{F}\cdot d\vec{S}$ mediante el Teorema de Stokes (es decir el valor de I se debe obtener mediante el cálculo de la OTRA integral del Teorema), para $\vec{F}(x, y, z) = (y, z, 2x)$ y la superficie $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4$ de la figura,



donde

- S_1: disco de radio a.
- S_2: $\frac{3}{4}$ del manto del cilindro (radio a y altura h).
- S_3: Triángulo rectángulo (catetos a y h).
- S_4: $\frac{3}{4}$ del disco (radio a).

(Eje del cilindro = Eje Z, plano XY contiene a S_4, S_3 contenido en el plano XZ).

b) (3.0 ptos.) Sean $f(x, y, z) = x^2 + 2xy + z^2 - 3x + 1$ y $\vec{F}(x, y, z) = (yz, 4yz, x^2 + y^2)$ y sea la región $R = \{(x, y, z) : 0 \leq z \leq 3 - x^2 - y^2\}$.
Justifique que el campo vectorial $\vec{G}(x, y, z) = \nabla f(x, y, z) + \operatorname{rot}\vec{F}(x, y, z)$ y la región R satisfacen el Teorema de Gauss. Escriba la correspondiente igualdad que establece el teorema (en términos de f y F) y calcule

$$I = \int_{\partial R} \vec{G}\cdot d\vec{S}$$

usando la definición de la Integral de Flujo. Utilizando el valor de I obtenga el valor de la otra integral del Teorema.

P3. a) (3.0 ptos.) Calcular

$$I = \int_\gamma \left(\frac{x-2}{(x-2)^2 + (y-1)^2} - 2y\right)dx + \left(\frac{y-1}{(x-2)^2 + (y-1)^2}\right)dy$$

usando el Teorema de Green, donde γ es el arco del cuarto de círculo de ecuación $(x-2)^2 + y^2 = 4$ que une $(0, 0)$ con $(2, 2)$.
Indicación: Considere la región "triangular" con vértices $(0, 0)$, $(0, 2)$ y $(2, 2)$.

b) (3.0 ptos.) Pruebe que el campo

$$\vec{F} = (yze^{xyz} - 4x)\hat{\imath} + (xze^{xyz} + z)\hat{\jmath} + (xye^{xyz} + y)\hat{k}$$

es conservativo en $\mathbb{R}^3$ y encuentre un potencial. Calcule el trabajo a lo largo de la curva γ parametrizada por $r(\theta) = (2\cos(\theta), 2\operatorname{sen}(\theta), \theta)$ con $\theta \in [0, 2\pi]$.

Tiempo: 3.0 horas

(i) Calculo de $\operatorname{div}(\vec{F})$ en coordenadas cilindricas

con $\vec{F} = \frac{2\cos\theta}{r^3}\,\hat{r} + \frac{\operatorname{sen}\theta}{r^3}\,\hat{\theta}$

identificar términos 0.5 puntos

luego $F_r = 2\frac{\cos\theta}{r^3}$; $F_\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{r^3}$; $F_z = 0$.

Los factores de escala (para coordenadas cilindricas) son

$$h_r = 1 \; ; \; h_\theta = r \; ; \; h_z = 1 .$$

Aplicando la fórmula general al caso particular:

aplicar la fórmula 0.5 puntos

$$\operatorname{div}\vec{F} = \frac{1}{r}\left\{\frac{\partial}{\partial r}\left(r\cdot\frac{2\cos\theta}{r^3}\right) + \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\operatorname{sen}\theta}{r^3}\right) + 0\right\}$$

$$= \frac{1}{r}\left\{(-2)\cdot 2\frac{\cos\theta}{r^3} + \frac{\cos\theta}{r^3}\right\} =$$

$$= -\frac{3\cos\theta}{r^2}$$

resultado correcto 0.5 puntos

(ii) Calculo de $\operatorname{rot}\vec{F}$ y verificar que es nulo.

La fórmula general, desarrollada, corresponde a

$$\operatorname{rot}\vec{F} = \frac{1}{h_v h_w}\left\{\frac{\partial}{\partial v}(F_w h_w) - \frac{\partial}{\partial w}(F_v h_v)\right\}$$

$$+ \frac{1}{h_u h_w}\left\{\frac{\partial}{\partial w}(F_u h_u) - \frac{\partial}{\partial u}(F_w h_w)\right\} + \frac{1}{h_u h_v}\left\{\frac{\partial}{\partial u}(F_v h_v) - \frac{\partial}{\partial v}(F_u h_u)\right\}$$

Aplicando a coordenada cilíndricas

$$\mathrm{rot}\,\vec{F} = \frac{1}{r}\left\{\frac{\partial}{\partial\theta}(F_z \underbrace{h_z}_{1}) - \frac{\partial}{\partial z}(F_\theta \underbrace{h_\theta}_{r})\right\}\hat{r}$$

$$+ 1\cdot\left\{\frac{\partial}{\partial z}(F_r \underbrace{h_r}_{1}) - \frac{\partial}{\partial r}(F_z \underbrace{h_z}_{1})\right\}$$

$$+ \frac{1}{r}\left\{\frac{\partial}{\partial r}(F_\theta \underbrace{h_\theta}_{r}) - \frac{\partial}{\partial\theta}(F_r \underbrace{h_r}_{1})\right\}$$

Aplicar la fórmula 0.6 puntos

Y, para el campo vectorial específico:

$$(\mathrm{rot}\,\vec{F})_r = \frac{1}{r}\left\{\frac{\partial}{\partial\theta}(0) - \frac{\partial}{\partial z}\left(r\cdot\frac{\mathrm{sen}\,\theta}{r^3}\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{r}\{0 - 0\}$$ (la segunda no depende de z) 0.3 puntos

$$(\mathrm{rot}\,\vec{F})_\theta = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{2\cos\theta}{r^3}\right) - \frac{\partial}{\partial r}(0) = 0$$ (la 1ª no ~~depende de z~~) 0.3 puntos

$$(\mathrm{rot}\,\vec{F})_z = \frac{1}{r}\left\{\frac{\partial}{\partial r}\left(r\cdot\frac{\mathrm{sen}\,\theta}{r^3}\right) - \frac{\partial}{\partial\theta}\left(2\frac{\cos\theta}{r^3}\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{r}\left\{(-2)\cdot\frac{\mathrm{sen}\,\theta}{r^3} - 2\frac{(-\mathrm{sen}\,\theta)}{r^3}\right\}$$ 0.3 puntos

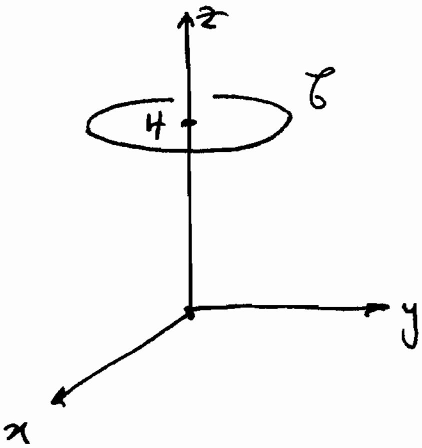
$$= 0$$

Como sus 3 componentes son nulas,

$$\mathrm{rot}\,\vec{F} = \vec{0}$$

Basta que escriba las 3 componentes que por separado deben ser nulas.

iii)



$\mathcal{C}$ se puede parametrizar como

$\theta \longrightarrow \gamma(\theta) = (a\cos\theta, a\,\mathrm{sen}\,\theta, H)$

$\theta \in [0, 2\pi]$

parametrizar: 0.3

Recordar o calcular que $\gamma'(\theta) = a\,\hat{\theta}$

calculo del vector γ' 0.2

así

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} F_\theta \, d\theta$$

$$(F_r \hat{r} + F_\theta \hat{\theta}) \cdot \hat{\theta}$$

plantear la integral

$$= \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{sen}\,\theta}{a^3} \cdot a \, d\theta$$

$$= \frac{1}{a^2} \underbrace{\int_0^{2\pi} \mathrm{sen}\,\theta \, d\theta}_{=0}$$

calcular la integral 0.5

iv) Si es conservativo. Basta probar que para toda curva cerrada $\mathcal{C}$ en $A = \mathbb{R}^3 \setminus$ Eje z

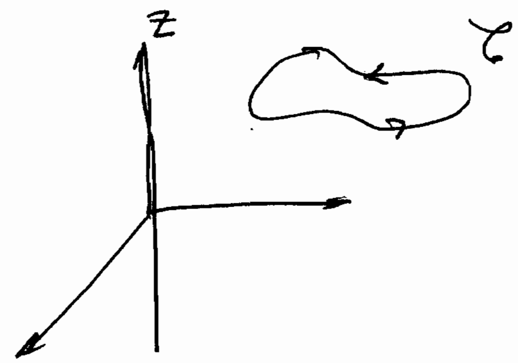
$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$$

que se va a probar 0.5

2 casos. (b) La curva rodea el eje z.

(a) La curva no rodea el eje z.

a)

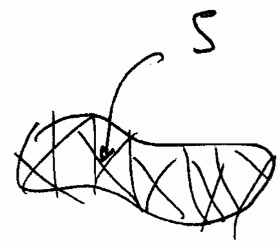


1° completar una superficie que tenga por borde a 𝒞

y que no pase por el eje z

0.3

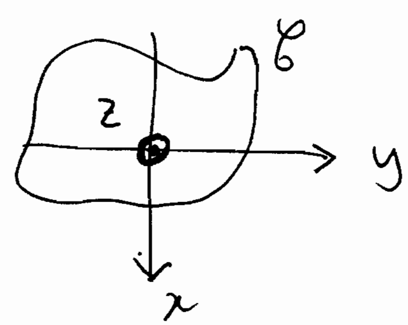
caso simple



2° Stokes dice

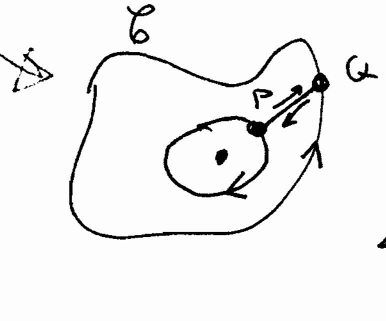
$$\oint \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_S \underset{\overset{\shortparallel}{0}}{\mathrm{rot}\,\vec{F}} \cdot \hat{n}\, dS = 0$$

b) Visto de arriba



0.5

estrategia



1°) agregar un circulo entorno al eje z, recorrido en sentido opuesto a 𝒞.

2°) agregar un segmento entre un punto P ∈ circulo y Q ∈ 𝒞

3°) Integrar en la curva

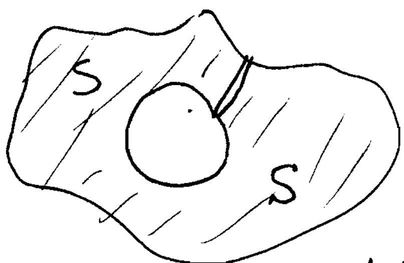
$$\mathcal{C} + PQ - PQ + \text{circulo}$$

4°) $$\int_{\mathcal{C}} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{\mathcal{C}+PQ+\text{circulo}-PQ} \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

$$= \int_{\mathcal{C}} \vec{F}\cdot d\vec{r} + \underbrace{\int_{PQ} \vec{F}\cdot d\vec{r} - \int_{PQ} \vec{F}\, d\vec{r}}_{\text{suma cero}} + \underbrace{\int_{\text{circulo}} \vec{F}\cdot d\vec{r}}_{=0\ (\text{iii})}$$

así que $\displaystyle\int_{C} \vec{F}\cdot\vec{dr} = \int_{C+PQ+\text{circulo}-PQ} \vec{F}\cdot\vec{dr}$

Y aplicamos Stokes en la curva compuesta



S, superficie que rellena el interior de la curva compuesta, no pasa (puede no pasar) por el eje OZ.

así $\displaystyle\int_{C} \vec{F}\cdot\vec{dr} = \int_{C+PQ+\text{circulo}-PQ} \vec{F}\cdot ds$

(Stokes) $\displaystyle = \int_{S} \text{rot}\,\vec{F}\cdot\vec{dS}$

$= 0$

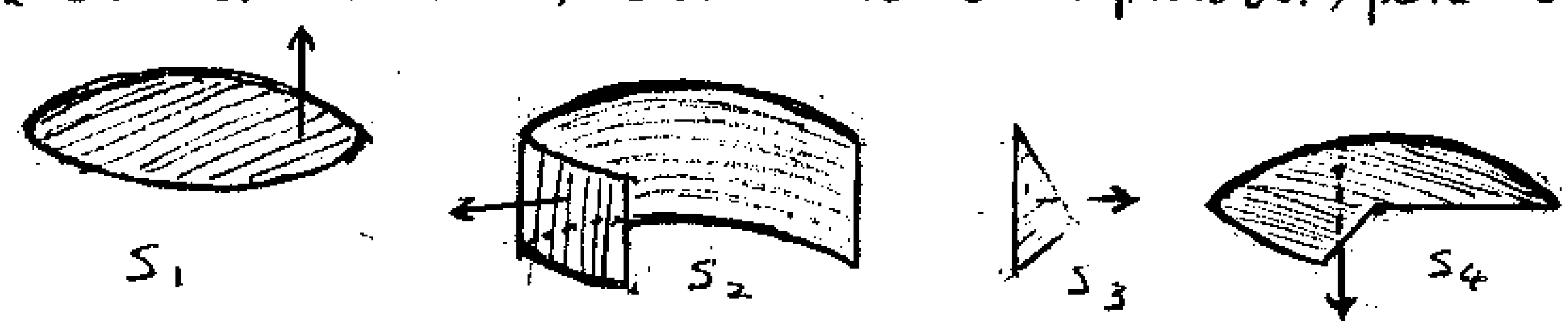
0.2 Argumentación a partir de Stokes, para $\int_C \vec{F}\cdot dr =$

Pauta P2 CONTROL 1 MA 2002 Prim - 2010

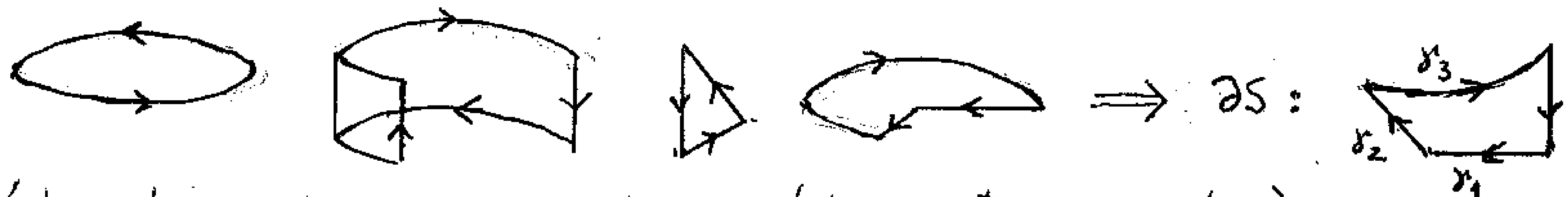
(a) Calcular $I=\int_S \mathrm{rot}\,\vec{F}\cdot d\vec{S}$, para $\vec{F}(x,y,z)=(y,z,2x)$ y S superficie dada, mediante T. de Stokes

El T. de Stokes establece que $\int_S \mathrm{rot}\,\vec{F}\cdot d\vec{S}=\int_{\partial S}\vec{F}\cdot d\vec{r}$, ∂S es el borde de S. Para el cálculo de $I=\int_{\partial S}\vec{F}\cdot d\vec{r}$ se debe obtener ∂S.

(a-1) Determinación del borde de S (∂S). Como S es unión de pedazos de superficies, se deben obtener los bordes de cada uno de los pedazos, para deducir ∂S.

S = 

La orientación de cada ∂S_k debe corresponder con

∂S_1 : 

(Los tramos de curvas recorridos en sentidos opuestos se cancelan)

(a-2) Cálculo de $I=\int_{\partial S}\vec{F}\cdot d\vec{r}=\sum_{k=1}^{4}(\pm)\int_{\gamma_k}\vec{F}\cdot d\vec{r}$ (+ si la parametrización de γ_k preserva la orientación de γ_k)

Para γ_1: segmento lineal que une $(0,a,0)$ con $(0,0,0)$. $g(t)=(0,a-t,0)$, $0\le t\le a$, parametriza a γ_1 (+)

$\int_{\gamma_1}\vec{F}\cdot d\vec{r}=\int_0^a F(g(t))\cdot g'(t)\,dt=\int_0^a(a-t,0,0)\cdot(0,-1,0)\,dt=0$ //

Para γ_2: segmento lineal que une $(0,0,0)$ con $(a,0,h)$. $g(t)=(at,0,ht)$, $0\le t\le 1$ parametriza a γ_2 (+)

$\int_{\gamma_2}F\cdot d\vec{r}=\int_0^1 F(g(t))\cdot g'(t)\,dt=\int_0^1(0,ht,2at)\cdot(a,0,h)\,dt=\int_0^1 2aht\,dt=ah$ //

Para γ_3: $1/4$ círculo contenido en plano $z=h$, radio a, centro $(0,0,h)$. $g(t)=(a\cos t,a\,\mathrm{sen}\,t,h)$, $0\le t\le \pi/2$ (+)

$\int_{\gamma_3}F\cdot d\vec{r}=\int_0^{\pi/2}(a\,\mathrm{sen}\,t,h,2a\cos t)\cdot(-a\,\mathrm{sen}\,t,a\cos t,0)\,dt=\int_0^{\pi/2}(-a^2\mathrm{sen}^2t+ah\cos t)\,dt=-a^2\int_0^{\pi/2}\mathrm{sen}^2t\,dt+ah\int_0^{\pi/2}\cos t\,dt=-\frac{\pi}{4}a^2+ah$ //

Para γ_4: segmento lineal que une $(0,a,h)$ con $(0,a,0)$, $g(t)=(0,a,h-t)$, $0\le t\le h$, parametriza a γ_4

$\int_{\gamma_4}\vec{F}\cdot d\vec{r}=\int_0^h(a,h-t,0)\cdot(0,0,-1)\,dt=0$ // Conclusión: $I=\int_S \mathrm{rot}\,\vec{F}\cdot d\vec{S}=-\frac{\pi}{4}a^2+2ah$

(b) $f(x,y,z)=x^2+2xy+z^2-3x+1$; $\vec{F}(x,y,z)=(yz,4yz,x^2+y^2)$; $R=\{(x,y,z): 0\le z\le 3-x^2-y^2\}$

(b-1) (G,R) satisface hipótesis de T. de Gauss, con $G=\nabla f+\mathrm{rot}\,\vec{F}$.

Cálculo de $\vec{G}$: $\nabla f(x,y,z)=(2x+2y-3,2x,2z)$; $\mathrm{rot}\,\vec{F}(x,y,z)=\begin{vmatrix}\hat{i}&\hat{j}&\hat{k}\\ \frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\ yz&4yz&x^2+y^2\end{vmatrix}=(2y-4y,-2x+y,0-z)=(-2y,-2x+y,-z)$

Por lo tanto, $\vec{G}(x,y,z)=(2x-3,y,z)$, el cual es un campo de clase $C^1(\mathbb{R}^3)$ porque $\vec{G}$ es lineal (porque sus componentes son polinomios).

R es un paraboloide: eje de simetría = eje Z; vértice $(0,0,3)$; base = disco $x^2+y^2\le 3$ (contenido en plano XY)

∂R es la unión del manto paraboloidico con el disco. ($R\subset\mathbb{R}^3$, $\partial R\subset\mathbb{R}^3$)

Lo anterior implica que (G,R) satisface las hipótesis del T. de Gauss.

(b-2) Igualdad establecida por T. de Gauss: $\int_R \mathrm{div}\,\vec{G}\,dV=\int_{\partial R}\vec{G}\cdot d\vec{S}$

Como $\vec{G}=\nabla f+\mathrm{rot}\,\vec{F}$, $\mathrm{div}\,\vec{G}=\nabla\cdot(\nabla f+\mathrm{rot}\,\vec{F})=\nabla^2 f+0 \Longrightarrow \mathrm{div}\,G(x,y,z)=\frac{\partial}{\partial x}(2x-3)+\frac{\partial}{\partial y}(y)+\frac{\partial}{\partial z}(z)=4$ //

y por lo tanto, la igualdad es: $4\,\mathrm{vol}(R)=\int_{\partial R}(\nabla f+\mathrm{rot}\,\vec{F})\cdot d\vec{S}$

(b-3) Cálculo de $I=\int_{\partial R}\vec{G}\cdot d\vec{S}=\int_{S_1}\vec{G}\cdot d\vec{S}+\int_{S_2}\vec{G}\cdot d\vec{S}$; S_1 = manto paraboloidico; S_2 = disco ($x^2+y^2\le 3$)

Para S_1. $(x,y,z)\in S_1$ ssi $0\le z=3-x^2-y^2$, usando coords. cilíndricas: $x=r\cos\theta$, $y=r\,\mathrm{sen}\,\theta$, $z=3-r^2$,

$g(r,\theta)=(r\cos\theta,r\,\mathrm{sen}\,\theta,3-r^2)$, $0\le\theta\le 2\pi$, $0\le r\le\sqrt{3}$; $\frac{\partial g}{\partial r}=(\cos\theta,\mathrm{sen}\,\theta,-2r)$, $\frac{\partial g}{\partial\theta}=(-r\,\mathrm{sen}\,\theta,r\cos\theta,0)$.

$\frac{\partial g}{\partial r}\times\frac{\partial g}{\partial\theta}=(2r^2\cos\theta,2r^2\mathrm{sen}\,\theta,r)$, apunta hacia afuera de R ($G(x,y,z)=(2x-3,y,z)$)

$\int_{S_1}\vec{G}\cdot d\vec{S}=\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{3}}(2r\cos\theta-3,r\,\mathrm{sen}\,\theta,3-r^2)\cdot(2r^2\cos\theta,2r^2\mathrm{sen}\,\theta,r)\,dr\,d\theta=\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{3}}(2r^3\cos^2\theta-6r^2\cos\theta+2r^3\mathrm{sen}^2\theta+3r-r^3)\,dr\,d\theta$

$=\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{3}}(r^3+3r)\,dr\,d\theta$ (integral de $\cos\theta=0$) $=2\pi\left(\frac{r^4}{4}+3\frac{r^2}{2}\right)\Big|_0^{\sqrt{3}}=2\pi\left(\frac{9}{4}+\frac{9}{2}\right)=\frac{27}{2}\pi$ //

Para S_2: $(x,y,z)\in S_2$ ssi $x^2+y^2\le 3$, $z=0$. $g(r,\theta)=(r\cos\theta,r\,\mathrm{sen}\,\theta,0)$

$\int_{S_2}\vec{G}\cdot d\vec{S}=\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{3}}(2r\cos\theta,r\,\mathrm{sen}\,\theta,0)\cdot(0,0,r)\cdot dr\,d\theta=0$

Por lo tanto, $I=\int_{\partial S}\vec{G}\cdot d\vec{S}=\frac{27}{2}\pi$ //

(b-4) Los resultados de (b-2) y (b-3) implican $\int_R \mathrm{div}\,\vec{G}\,dV=\int_{\partial R}\vec{G}\cdot d\vec{S}=\frac{27}{2}\pi$.

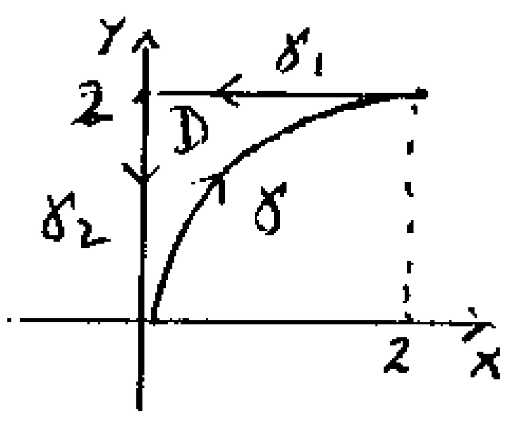
Pauta P3 MA2002 CONTROL 1 Prim-2010

a) Calcule $I = \int_\gamma \left(\frac{x-2}{(x-2)^2+(y-1)^2} - 2y\right)dx + \left(\frac{y-1}{(x-2)^2+(y-1)^2}\right)dy$, $\gamma = \frac{1}{4}$ círculo centrado en $(2,1)$ radio, que une $(0,2)$ con $(0,0)$, (mediante T. de Green)

Solución: T. de Green establece: Para $D \subset \mathbb{R}^2$, unión finita de regiones simples y $\vec{F}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ de clase $C^1(A)$ $A \subset Dom(\vec{F})$ tal que $D \subset A$ y $\Gamma := Fr(D) \subset A$, Γ recorrida contrareloj, se cumple que

$$\iint_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) dx\,dy = \int_\Gamma \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

(a-1) La indicación dada se ilustra en la figura. La integral pedida $I = \int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r}$ donde



$$\vec{F}(x,y) = \left(\frac{x-2}{(x-2)^2+(y-1)^2} - 2y, \frac{y-1}{(x-2)^2+(y-1)^2}\right)$$

Claramente $\vec{F}$ es de clase $C^1(\mathbb{R}^2 - \{(2,1)\})$, y como el "triángulo" contiene a $(2,1)$, y D es simple, se tiene que

$$\iint_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) dx\,dy = \int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r} + \int_{\gamma_1} \vec{F}\cdot d\vec{r} + \int_{\gamma_2} \vec{F}\cdot d\vec{r} \Rightarrow I = \iint_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) dx\,dy - \int_{\gamma_1} \vec{F}\cdot d\vec{r} - \int_{\gamma_2} \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

Cálculo de $\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{-(y-1)\cdot 2(x-2)}{[(x-2)^2+(y-1)^2]^2} - \frac{-(x-2)\cdot 2(y-1)}{[(x-2)^2+(y-1)^2]^2} + 2 = 2 \Rightarrow \iint_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) dx\,dy = 2\iint_D dx\,dy = 2A(D) = 2(4-\pi)$$

Cálculo de γ_1: γ_1 es segmento lineal que une $(2,2)$ con $(0,2)$. $g(t) = (2-t, 2)$, $0 \le t \le 2$, parametriza a γ_1

$$\int_{\gamma_1} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_0^2 \frac{x-2}{(x-2)^2+1}\,dx \text{ (ya que } y=2 \text{ en } \gamma_1) = \frac{1}{2}\ln\left((x-2)^2+1\right)\Big|_0^2 = \frac{1}{2}[0 - \ln 5] = -\frac{1}{2}\ln 5$$

Cálculo de γ_2: γ_2 segmento lineal que une $(0,2)$ con $(0,0)$. $g(t) = (0, 2-t)$, $0 \le t \le 2$, parametriza a γ_2

$$\int_{\gamma_2} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_0^2 \frac{y-1}{(y-1)^2+4}\,dy \text{ (ya que } x=0 \text{ en } \gamma_2) = \frac{1}{2}\ln\left((y-1)^2+4\right)\Big|_0^2 = \frac{1}{2}[\ln 5 - \ln 5] = 0$$

Los resultados anteriores junto con la igualdad del T. de Green implican: $I = 2(4-\pi) + \frac{1}{2}\ln 5$ //

(b) Pruebe que $F(x,y,z) = (yz e^{xyz} - 4x)\hat{i} + (xz e^{xyz} + z)\hat{j} + (xy e^{xyz} + y)\hat{k}$ es conservativo. Encuentre un potencial asociado a F y calcule el trabajo a lo largo de $\gamma: (2\cos\theta, 2\operatorname{sen}\theta, \theta)$, $0 \le \theta \le 2\pi$.

(b-1) F es conservativo. Claramente F es de clase $C^1(\mathbb{R}^3)$, por álgebra de funciones, sus funciones componentes lo son. (ej., $F_1 = \pi_2\cdot\pi_3\cdot expo(\pi_1\cdot\pi_2\cdot\pi_3) - 4\cdot\pi_1$, π_k proyecciones)
Por lo tanto F conservativo si $\operatorname{rot} F = 0$ (o, $F'(x,y,z)$ es simétrica)

$$\operatorname{rot} F = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}\right)\hat{i} - \left(\frac{\partial F_3}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial z}\right)\hat{j} + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)\hat{k} \equiv H_1\hat{i} + H_2\hat{j} + H_3\hat{k}$$

$$H_1 = \frac{\partial}{\partial y}(xye^{xyz} + y) - \frac{\partial}{\partial z}(xze^{xyz} + z) = (xe^{xyz} + xy(xz)e^{xyz} + 1) - (xe^{xyz} + xz(xy)e^{xyz} + 1) = 0$$

$$H_2 = \frac{\partial}{\partial z}(yze^{xyz} - 4x) - \frac{\partial}{\partial x}(xye^{xyz} + y) = (ye^{xyz} + yz(xy)e^{xyz}) - (ye^{xyz} + xy(yz)e^{xyz}) = 0$$

$$H_3 = \frac{\partial}{\partial x}(xze^{xyz} + z) - \frac{\partial}{\partial y}(yze^{xyz} - 4x) = (ze^{xyz} + (xz)yze^{xyz}) - (ze^{xyz} + (yz)xze^{xyz}) = 0$$

i.e., $H_1 = H_2 = H_3 = 0$, implicando que $\operatorname{rot} F = 0$, i.e., F es conservativo.

(b-2) Cálculo de un potencial. f tal que $\nabla f = F$, i.e., $\frac{\partial f}{\partial x} = F_1$, $\frac{\partial f}{\partial y} = F_2$, $\frac{\partial f}{\partial z} = F_3$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = yze^{xyz} - 4x \rightarrow f(x,y,z) = e^{xyz} - 2x^2 + g(y,z) \quad (1)$$

(1) implica: $\frac{\partial f}{\partial y} = xze^{xyz} + \frac{\partial g}{\partial y}$, y como $\frac{\partial f}{\partial y} = F_2$ resulta: $\frac{\partial g}{\partial y} = z$, implicando $g(y,z) = yz + h(z)$ (2)

(1) + (2) implican: $\frac{\partial f}{\partial z} = xye^{xyz} + \frac{\partial g}{\partial z} = xye^{xyz} + y + h'(z) \equiv F_3$, resultado: $h'(z) = 0$, i.e., $h(z) = c$ (cte) (3)

(1)+(2)+(3) implican: $f(x,y,z) = e^{xyz} - 2x^2 + yz + c$

(b-3) Trabajo realizado por $\vec{F}$ a lo largo de γ: $= \int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r}$.
Como F es conservativo, se tiene:
$\int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r} = f(\vec{b}) - f(\vec{a})$, donde $\vec{a}, \vec{b}$ son los puntos inicial y final de γ, i.e., $\vec{a} = (2,0,0)$, $\vec{b} = (2,0,2\pi)$
y por lo tanto, $\int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r} = (-8, 4+2\pi, 0) - (-8,0,0) = (0, 4+2\pi, 0)$ //