DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

MA2002 Cálculo Avanzado y Aplicaciones. Semestre 2016/1. **Secciones 1, 2, 3 y 4**
Profesores: Felipe Álvarez, Juan Diego Dávila, Rodrigo Lecaros y Manuel del Pino.

Control 1

P1. (a) [3 pts.] Sea S la superficie cónica dada por $z^2 = x^2 + y^2$ para $1 \leq z \leq 2$. Bosqueje y parametrice S. Luego evalúe directamente (por definición) la integral de flujo

$$\iint_S \vec{F} \cdot \hat{n}\, dA,$$

donde $\vec{F} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z^2\hat{k}$ y $\hat{n}$ define una orientación sobre S (precise cuál en su respuesta final).
Ind.: Puede ser útil mostrar que en coordenadas cilíndricas se tiene que $\vec{F} = \rho\hat{\rho} + z^2\hat{k}$.

(b) [3 pts.] Sea S la unión del casquete cilíndrico $x^2+y^2 = 9$ para $-2 \leq z \leq 2$ con el casquete semiesférico $x^2 + y^2 + (z-2)^2 = 9$ para $z \geq 2$. Bosqueje la superficie S. Calcule la integral de flujo

$$\iint_S (2yz\hat{\jmath} - z^2\hat{k}) \cdot \hat{n}\, dA,$$

donde $\hat{n}$ es la normal exterior al cilindro y a la semiesfera según corresponda.
Ind.: Determine $\vec{\nabla} \times \vec{F}$ con $\vec{F} = yz^2\hat{\imath}$ y parametrice ∂S recorrida con orientación positiva con respecto al campo de normales $\hat{n}$ (de acuerdo a la regla de la mano derecha).

P2. (a) [2 pts.] Sea $\vec{F}$ el campo vectorial dado por $\vec{F} = x^2y\hat{\jmath} + y^2z\hat{k}$. Calcule la siguiente integral de flujo usando el Teo. de la Divergencia de Gauss:

$$\iint_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot \hat{n}\, dA,$$

donde Ω es la región de $\mathbb{R}^3$ dada por $4 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 9$ y $z \geq 0$, con $\hat{n}$ la normal exterior a Ω.

(b) [2 pts.] Sea $\vec{F}$ un campo vectorial de clase C^1 en $\mathbb{R}^3$ con $\operatorname{div} \vec{F} \equiv 0$. Pruebe que existe $\vec{G}$ de clase C^1 tal que $\vec{F} = \vec{\nabla} \times \vec{G}$ en $\mathbb{R}^3$. **Ind.:** Considere

$$\begin{aligned} G_1(x,y,z) &= \int_0^z F_2(x,y,t)dt - \int_0^y F_3(x,t,0)dt, \\ G_2(x,y,z) &= -\int_0^z F_1(x,y,t)dt, \\ G_3(x,y,z) &= 0. \end{aligned}$$

(c) [2 pts.] Sea $V(\vec{r}) = K/\|\vec{r}\|$ con $K \neq 0$ un campo escalar en $\mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\}$. Considere $\vec{F} = -\nabla V$ en $\mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\}$.

(i) Muestre que $\operatorname{div} \vec{F} = 0$ en $\mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\}$ y que

$$\iint_{S_a} \vec{F} \cdot \hat{r}\, dA = 4\pi K,$$

para cualquier casquete esférico S_a de ecuación $\|\vec{r}\| = a$ con $a > 0$.

(ii) Pruebe que $\vec{F} \neq \vec{\nabla} \times \vec{G}$ para todo campo vectorial $\vec{G}$ de clase C^1 en $\mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\}$.
Ind.: Razone por contradicción. Puede serle útil considerar por separado el flujo a través de los casquetes semiesféricos $S_a^+ = S_a \cap \{z \geq 0\}$ y $S_a^- = S_a \cap \{z \leq 0\}$

P3. (a) [4 pts.] Bosqueje y parametrice la curva Γ dada por las ecuaciones $x^2 + 4y^2 = 1$ y $z = x^2 + y^2$. Bosqueje, parametrice y encuentre un campo de normales para la superficie S dada por $x^2 + 4y^2 \leq 1$ y $z = x^2 + y^2$. Finalmente, evalúe la siguiente integral de trabajo:

$$\oint_\Gamma \vec{F} \cdot d\vec{r},$$

con $\vec{F} = (y - z)\hat{\imath} + (z - x)\hat{\jmath} + (x - y)\hat{k}$.

(b) [2 pts.] Sean $f, g : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dos funciones de clase $\mathcal{C}^1$ en un abierto Ω simplemente conexo de $\mathbb{R}^2$. Consideremos el sistema de EDO's autónomas dado por:

$$(*) \quad \left\| \begin{array}{l} \dot{x}(t) = f(x(t), y(t)), \\ \dot{y}(t) = g(x(t), y(t)). \end{array} \right.$$

Pruebe que si existe una función $\varphi : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de clase $\mathcal{C}^1$ tal que

$$\frac{\partial(\varphi f)}{\partial x} + \frac{\partial(\varphi g)}{\partial y} > 0, \quad \text{en } \Omega,$$

entonces (∗) no admite soluciones periódicas en Ω.
Ind.: Razone por contradicción, aplicando adecuadamente el Teorema de Green en el plano con $M = -\varphi g$ y $N = \varphi f$.

Tiempo: 3 horas

——— O ———

Fórmulas en coordenadas ortogonales:

Gradiente:

$$\nabla f = \frac{1}{h_u}\frac{\partial f}{\partial u}\hat{u} + \frac{1}{h_v}\frac{\partial f}{\partial v}\hat{v} + \frac{1}{h_w}\frac{\partial f}{\partial w}\hat{w} \tag{1}$$

Divergencia:

$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{1}{h_u h_v h_w}\left[\frac{\partial}{\partial u}(F_u h_v h_w) + \frac{\partial}{\partial v}(h_u F_v h_w) + \frac{\partial}{\partial w}(h_u h_v F_w)\right] \tag{2}$$

Rotor:

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \frac{1}{h_u h_v h_w}\begin{vmatrix} h_u\hat{u} & h_v\hat{v} & h_w\hat{w} \\ \dfrac{\partial}{\partial u} & \dfrac{\partial}{\partial v} & \dfrac{\partial}{\partial w} \\ F_u h_u & F_v h_v & F_w h_w \end{vmatrix} \tag{3}$$

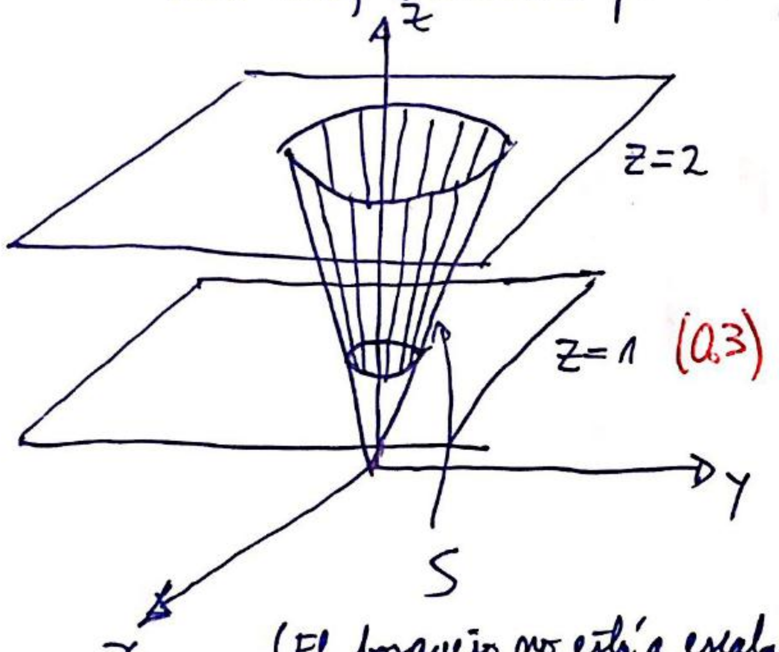
Aquí:

$$\vec{F} = F_u\hat{u} + F_v\hat{v} + F_w\hat{w}.$$

Control C1 - MA2002 - 2016/1

PAUTA P1

a) Tenemos la superficie cónica $z^2 = x^2+y^2$ con $1 \leq z \leq 2$.
Luego $z = \sqrt{x^2+y^2}$, que corresponde a la superficie de un cono, truncada por los planos $z=1$ y $z=2$.



(El bosquejo no está a escala).

Usamos coordenadas cilíndricas
$x = \rho\cos\theta$, $y = \rho \operatorname{sen}\theta$, $z = z$
con $\rho \geq 0$ y $\theta \in [0, 2\pi)$ (0.3)

Ecuación en cilíndricas:
$z = \rho$, $1 \leq \rho \leq 2$.

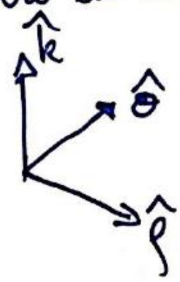
Parametrización: (0.3)
$\vec{\varphi}(\rho,\theta) = \rho\hat{\rho} + \rho\hat{k}$

$D = \{(\rho,\theta) \mid 1 \leq \rho \leq 2, \theta \in [0,2\pi)$

El campo es $\vec{F} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z^2\hat{k}$ (0.3)
$= \rho\cos\theta\,\hat{\imath} + \rho\operatorname{sen}\theta\,\hat{\jmath} + z^2\hat{k}$
$= \rho\hat{\rho} + z^2\hat{k}$, pues $\hat{\rho} = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, 0)$.

Por otra parte: $\dfrac{\partial\vec{\varphi}}{\partial\rho} = \hat{\rho} + \hat{k}$ (0.3), $\dfrac{\partial\vec{\varphi}}{\partial\theta} = \rho\dfrac{\partial\hat{\rho}}{\partial\theta} = \rho\hat{\theta}$ (0.3), con $\hat{\theta} = (-\operatorname{sen}\theta, \cos$

Triedro en cilíndricas:



$$\Rightarrow \frac{\partial\vec{\varphi}}{\partial\rho} \times \frac{\partial\vec{\varphi}}{\partial\theta} = (\hat{\rho}+\hat{k})\times\rho\hat{\theta} = \rho(\hat{\rho}\times\hat{\theta} + \hat{k}\times\hat{\theta})$$
$$= \rho(\hat{k} - \hat{\rho}) \quad (0.3)$$

(1) →

PAUTA P1/ (Continuación)

Así

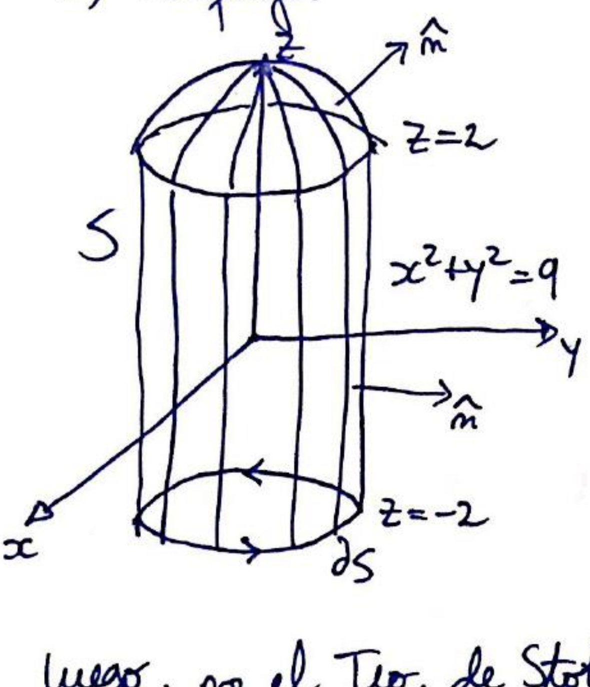
$$\iint_S \vec{F}\cdot\hat{n}\,dA = \iint_D \vec{F}(\vec{\varphi}(\rho,\theta))\cdot\left(\frac{\partial\vec{\varphi}}{\partial\rho}\times\frac{\partial\vec{\varphi}}{\partial\theta}\right)d\rho\,d\theta \quad (0.3)$$

$$= \int_1^2\int_0^{2\pi}(\rho\hat{\rho}+\rho^2\hat{k})\cdot(\hat{k}-\hat{\rho})\,\rho\,d\rho\,d\theta \quad (0.3)$$

$$= 2\pi\int_1^2(\rho^3-\rho^2)\,d\rho = 2\pi\left[\frac{\rho^4}{4}\Big|_{\rho=1}^{\rho=2} - \frac{\rho^3}{3}\Big|_{\rho=1}^{\rho=2}\right]$$

$$= 2\pi\left[\frac{2^4-1}{4} - \frac{8-1}{3}\right] = \cancel{2}\pi\,\frac{3\cdot 15-4\cdot 7}{1\cancel{2}\times 6} = \frac{17}{6}\pi \;/\!/ \quad (0.3)$$

b) Bosquejo.



(0.6)

Sea $\vec{F} = yz^2\hat{\imath}$.

$$\vec{\nabla}\times\vec{F} = \begin{array}{c} \\ \\ \end{array}\begin{vmatrix} \hat{\imath}^{+} & \hat{\jmath}^{-} & \hat{k}^{+} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ yz^2 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad (0.3)$$

$$= 0\hat{\imath} - (-2yz)\hat{\jmath} + -z^2\hat{k}$$

$$= 2yz\hat{\jmath} - z^2\hat{k} \quad (0.3)$$

luego, por el Teo. de Stokes

$$\iint_S \vec{\nabla}\times\vec{F}\cdot\hat{n}\,dA = \iint_S [2yz\hat{\jmath}-z^2\hat{k}]\cdot\hat{n}\,dA = \oint_{\partial S} yz^2\,\hat{\imath}\cdot d\vec{r} \quad (0.3)$$

PAUTA P1 / (Continuación)

Tenemos que ∂S es la circunferencia de ecuación $x^2+y^2=9$ en el plano $z=-2$. (0.3)

Se parametriza por

$$\vec{r}(\theta) = 3\cos\theta\,\hat{\imath} + 3\,\text{sen}\,\theta\,\hat{\jmath} - 2\hat{k} \;, \quad \theta \in [0, 2\pi) \quad (0.3)$$

$$\frac{d\vec{r}}{d\theta}(\theta) = -3\,\text{sen}\,\theta\,\hat{\imath} + 3\cos\theta\,\hat{\jmath} \quad (0.3)$$

luego

$$\oint_{\partial S} y z^2\,\hat{\imath}\cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} (3\,\text{sen}\,\theta)(-2)^2\cdot(-3)\,\text{sen}\,\theta\, d\theta \quad (0.3)$$

$$= -36\int_0^{2\pi} \text{sen}^2\theta\, d\theta = -36\pi \quad (0.3)$$

Control 1 - MA2002 - 2016/1

PAUTA P2

a) Por el Teo. de la Divergencia de Gauss, dado que $\vec{F}$ es de clase $\mathcal{C}^1$ en todo el espacio, tenemos que

$$\iint_{\partial\Omega} \vec{F}\cdot\hat{n}\,dA = \iiint_{\Omega} \operatorname{div}\vec{F}\,dV. \quad (0.4)$$

Pero $\vec{F} = x^2y\hat{j} + y^2z\hat{k} \Rightarrow \operatorname{div}\vec{F} = 0 + x^2 + y^2$ (0.4)

Así

$$\iiint_{\Omega} \operatorname{div}\vec{F}\,dV = \iiint_{\Omega} (x^2+y^2)\,dV.$$

El dominio $\Omega = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid 4 \leq x^2+y^2+z^2 \leq 9,\ z\geq 0\}$, se puede parametrizar en esféricas:

$x = r\,\text{sen}\varphi\cos\theta$, $y = r\,\text{sen}\varphi\,\text{sen}\theta$, $z = r\cos\varphi$, $r\geq 0$, $\theta\in[0,2\pi)$, $\varphi\in[0,\pi]$. (0.4)

$\Rightarrow 2\leq r\leq 3$ y $r\cos\varphi \geq 0 \Rightarrow \varphi\in[0,\pi/2)$.

luego

$$\iiint_{\Omega}(x^2+y^2)\,dV = \int_2^3\int_0^{\pi/2}\int_0^{2\pi} r^2\,\text{sen}^2\varphi\,\underbrace{(\cos^2\theta+\text{sen}^2\theta)}_{1}\,r^2\,\text{sen}\varphi\,d\theta\,d\varphi\,dr \quad (0.4)$$

$$= 2\pi\int_2^3\int_0^{\pi/2} r^4\,\text{sen}^3\varphi\,d\varphi\,dr = 2\pi\left(\left.\frac{r^5}{5}\right|_{r=2}^{r=3}\right)\int_0^{\pi/2}\text{sen}^3\varphi\,d\varphi$$

$$= 2\pi\frac{(3^5-2^5)}{5}\underbrace{\int_0^{\pi/2}\text{sen}^3\varphi\,d\varphi}_{(1)} = \frac{2\pi}{5}(243-32)\int_0^{\pi/2}\text{sen}^3\varphi\,d\varphi \rightarrow$$

PAUTA P2 (Continuación)

Pero
$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^3\varphi \, d\varphi = \int_0^{\pi/2} (1-\cos^2\varphi)\operatorname{sen}\varphi \, d\varphi \qquad (0.2)$$

$$= -\cos\varphi \Big|_{\varphi=0}^{\varphi=\pi/2} + \frac{\cos^3\varphi}{3}\Big|_{\varphi=0}^{\varphi=\pi/2} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

Así
$$\iiint_\Omega (x^2+y^2)\,dV = \frac{2\pi}{5} \cdot 211 \cdot \frac{2}{3} = \frac{844}{15}\pi \qquad (0.2)$$

b) Considerando el campo $\vec{G}$ de la indicación

$$\vec{\nabla}\times\vec{G} = \begin{vmatrix} \hat{i}^{\,+} & \hat{j}^{\,-} & \hat{k}^{\,+} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ G_1 & G_2 & G_3 \end{vmatrix} = \left(\cancel{\frac{\partial 0}{\partial y}}^{\,0} + \frac{\partial}{\partial z}\int_0^z F_1(x,y,t)\,dt\right)\hat{i} \qquad (0.4)$$

(0.2)

$$-\left(\cancel{\frac{\partial 0}{\partial x}}^{\,0} - \frac{\partial}{\partial z}\left[\int_0^z F_2(x,y,t)\,dt - \int_0^y F_3(x,t,0)\,dt\right]\right)\hat{j} \qquad (0.4)$$

$$+\left(-\int_0^z \frac{\partial F_1}{\partial x}(x,y,t)\,dt - \int_0^z \frac{\partial F_2}{\partial y}(x,y,t) + F_3(x,y,0)\right)\hat{k} \qquad (0.4)$$

Pero $\operatorname{div}\vec{F} = 0 \Rightarrow \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} = -\frac{\partial F_3}{\partial z}$ (0.4)

$$\Rightarrow \vec{\nabla}\times\vec{G} = F_1(x,y,z)\hat{i} + F_2(x,y,z)\hat{j} + \Bigg[\underbrace{\int_0^z \frac{\partial F_3}{\partial z}(x,y,t)\,dt}_{F_3(x,y,z) - \cancel{F_3(x,y,0)}} + \cancel{F_3(x,y,0)}\Bigg]\hat{k} \qquad (0.2)$$

$$= \vec{F}$$

c)

PAUTA P2 / (Continuación)

c) Tenemos $V(\vec{r}) = K/\|\vec{r}\|$, $\vec{r} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\}$

$$F(\vec{r}) = -\nabla V(\vec{r}).$$

i) En esféricas, $V(\vec{r}) = \dfrac{K}{r}$ y $F(\vec{r}) = -\dfrac{\partial V}{\partial r}\hat{r} = +\dfrac{K}{r^2}\hat{r}$ (0.4)

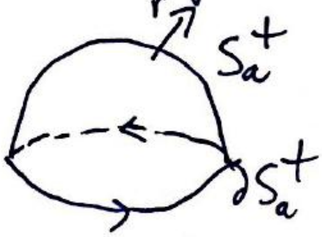
$$\operatorname{div}\vec{F} = \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}\varphi}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\cancel{r^2}\operatorname{sen}\varphi \frac{K}{\cancel{r^2}}\right)\right] = 0. \quad (0.4)$$

$$\iint_{S_a} \vec{F}\cdot\hat{r}\,dA = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{K}{\cancel{a^2}}\,\underbrace{\hat{r}\cdot\hat{r}}_{1}\,\cancel{a^2}\operatorname{sen}\varphi\,d\theta\,d\varphi = 2\pi K\int_0^{\pi}\operatorname{sen}\varphi\,d\varphi$$
(0.4)

$$= 2\pi K\left[-\cos\varphi\Big|_{\varphi=0}^{\varphi=\pi}\right]$$

$$= 4\pi K. \quad (0.2)$$

ii) Supongamos por contradicción que $\vec{F} = \vec{\nabla}\times\vec{G}$ para algún $\vec{G}$. Sea $S_a^+ = S_a \cap \{z \geq 0\}$



Por stokes

$$\iint_{S_a^+} \vec{\nabla}\times\vec{G}\cdot\hat{r}\,dA = \oint_{\partial S_a^+} \vec{G}\cdot d\vec{r} \quad (0.4)$$

Así

$$\iint_{S_a} \vec{F}\cdot\hat{r}\,dA = \iint_{S_a^+} \vec{\nabla}\times\vec{G}\cdot\hat{r}\,dA + \iint_{S_a^-} \vec{\nabla}\times\vec{G}\cdot\hat{r}\,dA = \oint_{\partial S_a^+} \vec{G}\cdot d\vec{r} + \oint_{\partial S_a^-} \vec{G}\,d$$

$$= \oint_{\partial S_a^+} \vec{G}\,d\vec{r} - \int_{\partial S_a^+} \vec{G}\,d\vec{r}$$

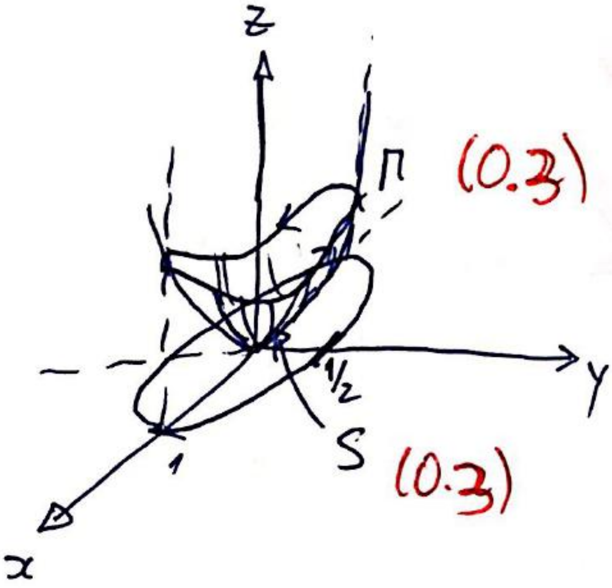
$$= 0 \rightarrow\leftarrow \quad (0.2)$$

Control 1 - MA2002 - 2016/1

PAUTA P3

a) Sea $\Gamma \doteq x^2+4y^2=1$: casquete de un "cilindro" de base elíptica

$z=x^2+y^2$: paraboloide.



Parametrización (0.6)

$$\vec{r}(\theta)=\cos\theta\,\hat{\imath}+\frac{1}{2}\operatorname{sen}\theta\,\hat{\jmath}+\left(\cos^2\theta+\frac{1}{4}\operatorname{sen}^2\theta\right)\hat{k}$$

es decir

$$\left\|\begin{array}{l} x(\theta)=\cos\theta \\ y(\theta)=\frac{1}{2}\operatorname{sen}\theta \\ z(\theta)=\cos^2\theta+\frac{1}{4}\operatorname{sen}^2\theta \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow x^2+4y^2 = \cos^2\theta+4\cdot\frac{1}{4}\operatorname{sen}^2\theta = \cos^2\theta+\operatorname{sen}^2\theta = 1$$

con $\theta\in[0,2\pi)$

Sea $S:\ x^2+4y^2\leq 1$

$z=x^2+y^2$

(0.3)

Podemos usar cartesianas : $\vec{\varphi}(x,y)=x\hat{\imath}+y\hat{\jmath}+(x^2+y^2)\hat{k}$

con dominio $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+4y^2\leq 1\}$.

$$\Rightarrow \frac{\partial\vec{\varphi}}{\partial x}=\hat{\imath}+2x\hat{k}\ (0.3),\quad \frac{\partial\vec{\varphi}}{\partial y}=\hat{\jmath}+2y\hat{k}\ (0.3)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial\vec{\varphi}}{\partial x}\times\frac{\partial\vec{\varphi}}{\partial y}=\underbrace{\hat{\imath}\times\hat{\jmath}}_{\hat{k}}+2y\underbrace{\hat{\imath}\times\hat{k}}_{-\hat{\jmath}}+2x\underbrace{\hat{k}\times\hat{\jmath}}_{-\hat{\imath}}+2xy\underbrace{\hat{k}\times\hat{k}}_{0}$$

(0.3)

$$\Rightarrow \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial x} \times \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial y} = \hat{k} - 2y\hat{j} - 2x\hat{i} = (-2x, -2y, 1) \quad (0.3)$$

El campo de normales $\hat{n} = \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial x} \times \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial y} \Big/ \left\| \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial x} \times \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial y} \right\|$

$$(0.3) \quad = \frac{(-2x, -2y, 1)}{\sqrt{1+4(x^2+y^2)}} \quad \text{(normal interior)}$$

Para evaluar la integral de trabajo hay dos alternativas:

A) Cálculo directo:

$$\oint_\Gamma \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} \vec{F}(\vec{r}(\theta))\cdot \dot{\vec{r}}(\theta)\, d\theta \quad (0.4)$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\tfrac{1}{2}\operatorname{sen}\theta - \cos^2\theta - \tfrac{1}{4}\operatorname{sen}^2\theta,\ \cos^2\theta + \tfrac{1}{4}\operatorname{sen}^2\theta - \cos\theta,\ \cos\theta - \tfrac{1}{2}\operatorname{sen}\theta\right)$$

$$(0.4) \qquad \cdot\left(-\operatorname{sen}\theta,\ \tfrac{1}{2}\cos\theta,\ -2\cos\theta\operatorname{sen}\theta + \tfrac{1}{2}\operatorname{sen}\theta\cos\theta\right) d\theta$$

$$\underset{\text{(desarrollando)}}{=} -\pi. \quad (0.2)$$

B) Usamos Stokes: Primero se verifica $\operatorname{rot}\vec{F} = (-2,-2,-2)$

$$\oint_\Gamma \vec{F}\cdot d\vec{r} = \iint_S (-2,-2,-2)\cdot\hat{n}\, dA \underset{\uparrow}{=} \iint_D (-2,-2,-2)\cdot(-2x,-2y,1)\, dx\,dy$$

$$dA = \left\|\frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial x} \times \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial y}\right\| dx\,dy \qquad (0.4)$$

$$= \iint_D (4x+4y-2)\, dy\,dx = \int_{-1}^{1}\int_{-\frac{\sqrt{1-x^2}}{2}}^{\frac{\sqrt{1-x^2}}{2}} (4x+4y-2)\, dy\,dx \qquad (0.4)$$

(*)

Es decir

$$\oint_\Gamma \vec{P}\cdot d\vec{r} = \int_{-1}^{1}\int_{-\frac{\sqrt{1-x^2}}{2}}^{\frac{\sqrt{1-x^2}}{2}} (4x+4y-2)\,dy\,dx$$

$$= \int_{-1}^{1} (4xy+2y^2-2y)\Big|_{y=-\frac{\sqrt{1-x^2}}{2}}^{y=\frac{\sqrt{1-x^2}}{2}} dx \qquad (0.2)$$

$$= \int_{-1}^{1} \underbrace{\overset{0}{\cancel{4x\sqrt{1-x^2}}}}_{\text{impar}} - 0 - \sqrt{1-x^2}\,dx = -\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx = -\pi /\!\!/$$

b) El Teorema de Green en el plano afirma que

$$\iint_D \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dx\,dy = \oint_{\partial D} M\,dx + N\,dy \qquad (0.5)$$

Lo aplicamos con $M = -\varphi g$ y $N = \varphi f$

$$\Rightarrow 0 < \iint_D \underbrace{\left(\frac{\partial(\varphi f)}{\partial x} + \frac{\partial(\varphi g)}{\partial y}\right)}_{<0} dx\,dy = \oint_{\partial D} -\varphi g\,dx + \varphi f\,dy \qquad (0.5)$$

Supongamos por contradicción que existe una solución periódica al sistema (*) y sea $\underset{\partial D}{\underset{\shortparallel}{\Gamma}}$ la curva correspondiente a esa solución. Como es periódica, Γ es cerrada.

$$\Rightarrow \oint_{\partial D} \% = \int_0^T -\varphi g\,f\,dt + \varphi f\,g\,dt = \int_0^T [\overbrace{-\varphi g f + \varphi f g}^{0}]\,dt = 0 \qquad (0.5)$$

$\Rightarrow \leftarrow$ contradicción (0.5)