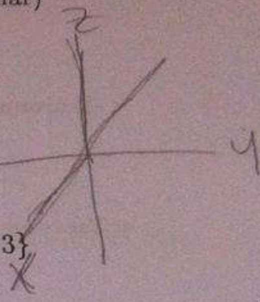
MA2002 Cálculo Avanzado y Aplicaciones Semestre Prim. 2016. **Sección 2**
Profesores: Raúl Gormaz (Cátedra), Hugo Carrillo (Auxiliar) y Pablo Cabargas (Auxiliar)



Control 1

P1. Sea γ la curva formada al intersectar las superficies

$$S_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = x^2 + 4y^2\} \text{ y } S_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 2x+3\}$$

y considere el campo vectorial

$$\vec{F}(x,y,z) = (z,\ x,\ y)$$

(a) **(4 ptos)** Calcule $I = \oint_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r}$. La orientación de γ es tal que su proyección en el plano XY es recorrida en el sentido antihorario.

(b) **(2 ptos)** Sea $S = S_2 \cap \{x^2 + 4y^2 \leq z\}$. Obtenga el área de S. Deje su resultado expresado en términos de I.

P2. Considere dos campos vectoriales $\vec{F}$ y $\vec{G}$, de clase C^2.

(a) **(3 ptos)** Demuestre que

$$\operatorname{div}(\vec{F} \times \vec{G}) = \vec{G} \cdot \operatorname{rot} \vec{F} - \vec{F} \cdot \operatorname{rot} \vec{G}$$

volumen

(b) **(3 ptos)** Considere ahora $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \varphi \leq 0\}$ y demuestre que

campo escalar.

$$\int_\Omega \nabla\varphi \cdot \operatorname{rot} \vec{F} dx = 0$$

$$\int \nabla\varphi \cdot \nabla\times\vec{F}\, dV = 0$$

Aqui se supone que Ω es acotado, que su borde esta dado por $\partial\Omega = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \varphi(x) = 0\}$ y que $\nabla\varphi(x) \neq 0$ en todo punto de $\partial\Omega$.

P3. Sea $\vec{F} = (x^3 + 2yz,\ y^3 - 2xz,\ x^2 + y^2)$
y sea $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 4x^2 + 4y^2 + z^2 = 4 \ \wedge\ z \geq 0\}$.

(a) **(4 ptos)** Obtenga el flujo $\int_S \vec{F} \cdot \hat{n}\, dS$, escogiendo $\hat{n}$ con 3^a componente positiva.

(b) **(2 ptos)** Dado $\vec{F} = (\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2})$, demuestre que $\vec{F}$ es conservativo en $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\}$ y encuentre $\varphi(x,y)$ tal que $\nabla\varphi(x,y) = \vec{F}(x,y)$ en R. Para esto, sea $a = \sqrt{x^2+y^2}$, γ_1 el segmento recto entre $(1,0)$ y $(a,0)$ y γ_2 el arco de circulo de radio a y centrado en el origen, entre $\cancel{(0,a)}$ $(a,0)$ y (x,y). Calcule entonces

$$\varphi(x,y) = \int_{\gamma_1+\gamma_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Tiempo: 3 horas

P1 a

Si $(x,y,z) \in S_1 \cap S_2 = \gamma$

$$z = x^2 + 4y^2 \ \wedge \ z = 2x+3$$

luego $x^2 + 4y^2 = 2x + 3$ (1pto)

$$\dots \ \frac{(x-1)^2}{4} + y^2 = 1$$ (Elipse en XY)

se parametriza (proyección en XY) como

$\cancel{2\cos\theta} + 1$

$$\theta \longrightarrow (2\cos\theta + 1, \operatorname{sen}\theta)$$

y la coordenada z, cumple la ec. de S_2

la curva $\theta \longrightarrow (x(\theta), y(\theta), z(\theta)) \equiv c(\theta)$

$$\| \quad (2\cos\theta + 1, \operatorname{sen}\theta, 4\cos\theta + 5)$$

1pto: curva

$$F(x(\theta), y(\theta), z(\theta)) = (4\cos\theta + 5, 2\cos\theta + 1, \operatorname{sen}\theta)$$

$$c'(\theta) = (-2\operatorname{sen}\theta, \cos\theta, -4\operatorname{sen}\theta)$$

$$I = \oint_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} \{-8\sin\theta\cos\theta - 10\sin\theta + 2\cos^3\theta + \cos\theta - 4\sin^2\theta\}\, d\theta$$

1pto escribir lo que se debe calcular

en $0\ 2\pi$ las integrales de $\sin\theta$, $\cos\theta$ y

$2\sin\theta\cos\theta = \sin 2\theta$ se anulan.

y $\int_0^{2\pi} \cos^2\theta\, d\theta = \int_0^{2\pi} \sin^2\theta\, d\theta = \pi$

1pto el cálculo

$$\Rightarrow I = 2\pi - 4\pi = -2\pi$$

1(b) El area de $S = \iint_S 1\, dS$

pero $\operatorname{rot}(\vec{F}) = (1,1,1)$ 0.5 el rotor

$$\hat{n} = \frac{\pm\nabla(2x+3-z)}{\|\nabla(2x+3-z)\|} = \frac{\pm(2,0,-1)}{\sqrt{5}}$$

luego. Stokes

$$\int_S \operatorname{rot} F\cdot\hat{n}\, dS = \int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r} = -2\pi$$

0.5 calculo $\int$ rot

0.5 signo de $\hat{n}$

signos para la buena orientación de S

$$\int_S (1\ 1\ 1)\cdot\frac{(-2,0,+1)}{\sqrt{5}}\, dS = \frac{-1}{\sqrt{5}}\text{ area}(S)$$

$$\Rightarrow \text{area}(S) = 2\sqrt{5}\,\pi = -\sqrt{5}\cdot I$$

0.5 despejar area

P2 (a)

prod. cruz

$$\operatorname{div}(\vec{F} \times \vec{G}) = \operatorname{div}(\varepsilon_{ijk} F_i G_j \hat{e}_k)$$

(def. div) $= \varepsilon_{ijk} \dfrac{\partial}{\partial x_k}(F_i G_j)$

(deriva producto) $= \varepsilon_{ijk} \dfrac{\partial F_i}{\partial x_k} \cdot G_j + \varepsilon_{ijk} F_i \dfrac{\partial G_j}{\partial x_k}$

(prop. de antisimetría del ε_{ijk}) $= \varepsilon_{ijk} \dfrac{\partial F_i}{\partial x_k} G_j - \varepsilon_{kji} \dfrac{\partial G_j}{\partial x_k} F_i$

(def rot con ε_{ijk}) $= \operatorname{rot}(\vec{F}) \cdot \vec{G} - \operatorname{rot}\vec{G} \cdot \vec{F}$ //

error en el signo
o no explican que viene de
la antisimetría : -1 punto

todo OK . 3 ptos

P2 (b)

Tomando $G = \nabla\varphi$ en la formula de (a) 0.5 ptos escoger el buen G

$$\operatorname{div}(F\times\nabla\varphi) = \nabla\varphi\cdot \operatorname{rot} F - \vec{F}\cdot \underbrace{\operatorname{rot}\nabla\varphi}$$

nulo por rot de gradiente 1 pto

Integrando 0.5 ptos integrar la identidad

$$\int_\Omega \nabla\varphi\cdot \operatorname{rot}\vec{F}\, dV = \int_\Omega \operatorname{div}(F\times\nabla\varphi)\, dV$$

$$\text{Gauss} = \int_{\partial\Omega} (\vec{F}\times\nabla\varphi)\cdot\hat{n}\, dS$$

campo $\perp$ a $\vec{F}$ y $\nabla\varphi$

1 pto
$\hat{n} \parallel \nabla\varphi$
o bien $\hat{n} \perp \nabla\varphi\times\vec{F}$

pero $\hat{n} \parallel \nabla\varphi$ (superficie de nivel)

entonces $(\vec{F}\times\nabla\varphi)\cdot\hat{n} = 0$

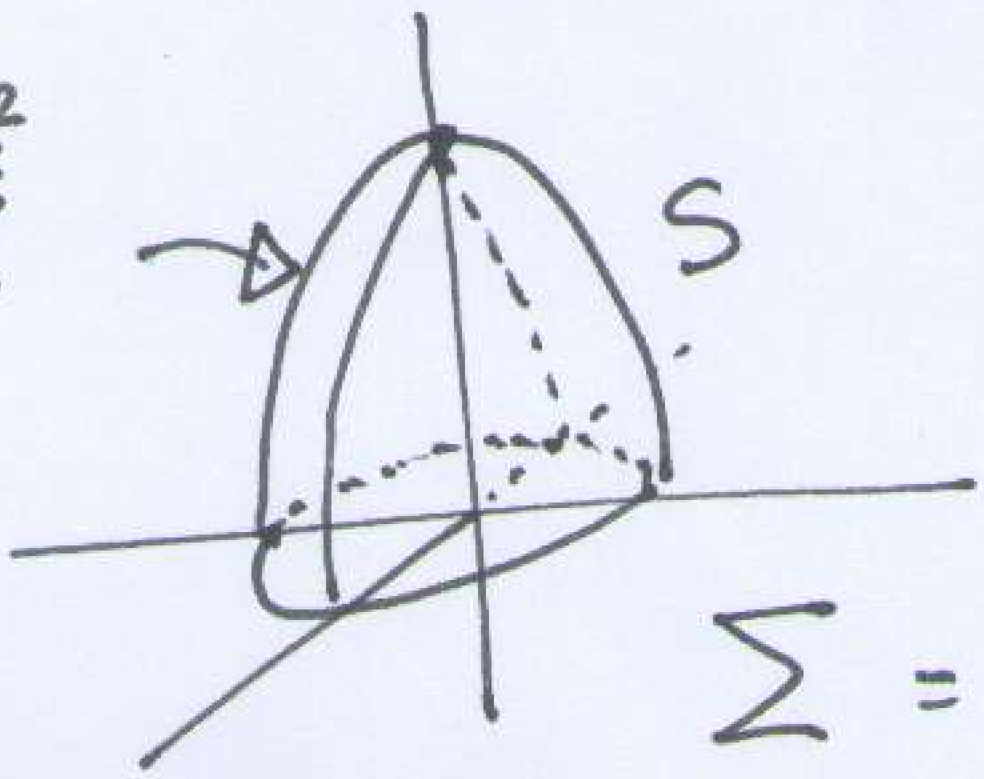
//

P3 (a)

$x^2+y^2=1-\frac{z^2}{4}$

$\Downarrow$

$0\le z\le 2$



Para usar Gauss debemos "cerrar" el borde con:

Σ = disco centro (0 0 0) radio 1 en plano XY

Así, $\Sigma \cup S$ es frontera del medio-elipsoide Ω

Gauss $$\int_S \vec{F}\cdot d\vec{S} + \underbrace{\int_\Sigma \vec{F}\cdot d\vec{S}}_{I} = \underbrace{\int_\Omega \operatorname{div}(F)\, dV}_{II}$$

(1pto) por explicar como usar Gauss para el calculo solicitado

Se calculan I, II y de ahí se obtiene el flujo solicitado

I: $\hat{n} = (0,0,-1)$ (−1 para que apunte hacia fuera del semi-elipsoide Ω)

$$\vec{F}\cdot\hat{n} = (x^3, y^3, x^2+y^2)\cdot(0,0,-1) = -(x^2+y^2)$$

Se calcula en polares (o cilíndricas con $z=0$)

$$\int_\Sigma \vec{F}\cdot d\vec{S} = \int_0^{2\pi}\int_0^1 -\rho^2\cdot\rho\, d\rho\, d\theta = -\frac{\rho^4}{4}\Big]_0^1\cdot 2\pi = -\frac{\pi}{2}$$

(1pto)

$\left\{\begin{array}{l}\text{0.5 lo que hay que calcular}\\ \text{0.5 el calculo OK}\end{array}\right.$

II $\quad div(\vec{F}) = 3(x^2+y^2) = 3\rho^2$ (cilíndricas)

Usando coordenadas cilíndricas,

2 posibilidades

$$4x^2+4y^2+z^2 \leq 4 \Rightarrow 4\rho^2+z^2 \leq 4$$

Si se usa $\quad z \leq 2\sqrt{1-\rho^2}$

$$\int_{\Omega} div\,\vec{F}\,dV = \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_0^{2\sqrt{1-\rho^2}} 3\rho^2\cdot\rho\,dz\,d\rho\,d\theta$$

1 pto

$$= 6\pi \int_0^1 2\rho^3\sqrt{1-\rho^2}\,d\rho \qquad \text{(sale con } u = 1-\rho^2 \ldots)$$

{ 0.5 la integral a calcular
{ 0.5 el cálculo

$$= 8\pi/5$$

Si se usa $\quad \rho^2 \leq 1 - z^2/4$

$$\int_{\Omega} div\,\vec{F}\,dV = \int_0^{2\pi}\int_0^2\int_0^{\sqrt{1-z^2/4}} 3\rho^3\,d\rho\,dz\,d\theta$$

$$= 6\pi \int_0^2 \left.\frac{3\rho^4}{4}\right]_0^{\sqrt{1-z^2/4}} dz$$

$$= \frac{3\pi}{2}\int_0^2 \left(1-\frac{z^2}{4}\right)^2 dz = 8\pi/5$$

Finalmente 1 pto concluir con lo anterior

$$\int_S \vec{F}\cdot d\vec{S} = \text{II} - \text{I} = \frac{8\pi}{5} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{21\pi}{10} \quad //$$

~~[illegible]~~ P3 (b)

puede dem. $\vec{F}$ conservativo calculando

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)$$

$= 0$ si $(x,y) \neq 0$

luego en R

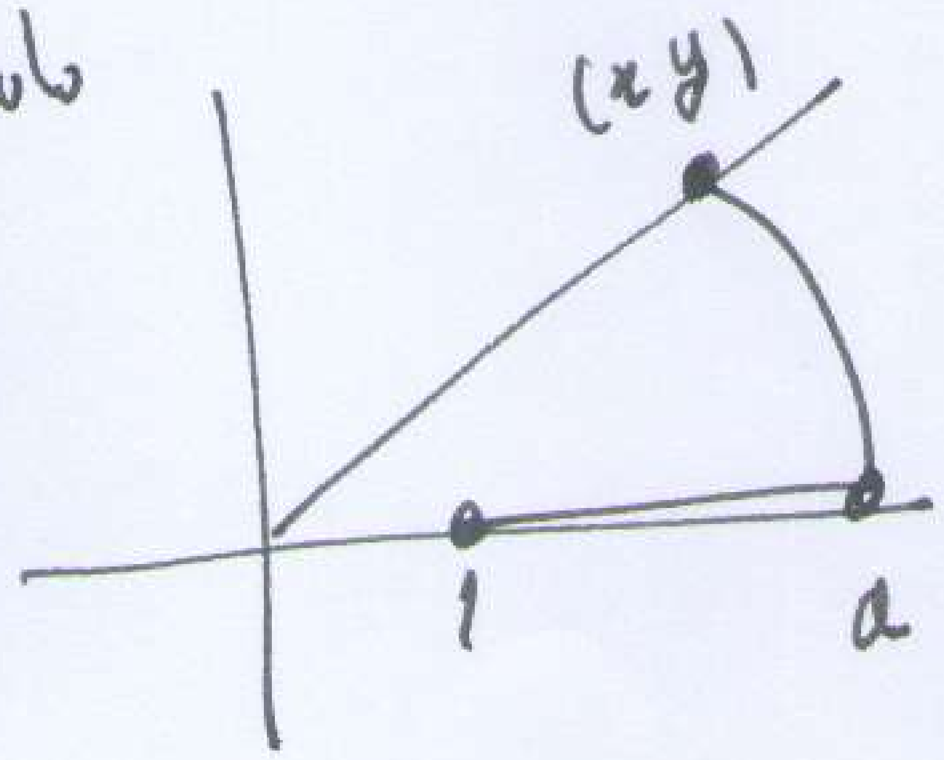
y $\displaystyle\oint_{C} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \iint_{\Omega}\left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) dx\,dy = 0$

para toda curva cerrada en R (Sin

Es claro que R es simplemente conexo, luego F es conservativo.

(nota: Alternativamente, si se encuentra φ, $\vec{F}$ resulta conservativo si $\nabla\varphi = F$)

Calculo $\int_{\gamma_1}$



$\tau : [1, a] \xrightarrow{\tau} (t, 0)$

$\tau'(t) = (1, 0)$

$$\int_{\gamma_1} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_0^a \left(\frac{t}{t^2+0^2}, \frac{0}{t^2+0^2}\right)\cdot(1,0)\,dt$$

$$= \int_1^a \frac{dt}{t} = \ln(a) = \ln\sqrt{x^2+y^2}$$

0.75

0.75 pto $\int_{\gamma_1}$

Calculo $\int_{\gamma_2}$ Y para el arco $\theta \longrightarrow (a\cos\theta, a\,\mathrm{sen}\,\theta)$

$\theta \in [0, \vec{\theta}]$

$$\int_{\gamma_2} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_0^{\vec{\theta}} \left(\frac{a\cos\theta}{a^2\cos^2\theta + a^2\mathrm{sen}^2\theta}, \frac{a\,\mathrm{sen}\,\theta}{a^2\cos^2\theta + a^2\mathrm{sen}^2\theta} \right)\cdot(-a\,\mathrm{sen}\,\theta, a\cos\theta)\,d\theta$$

$$= \int_0^{\theta'} \frac{-a^2\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\theta + a^2\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta}{a^2}\,d\theta = 0$$

~~0.75~~ 0.75 pto $\int_{\gamma_2}$

$\therefore$ Potencial $\varphi(x\,y) = \ln\sqrt{x^2+y^2}$

$$\text{o} \quad = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$$

Y alternativamente, probar conservativo (✱)

$$\nabla\varphi(x,y) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\ln\sqrt{x^2+y^2}, \frac{\partial}{\partial y}\ln\sqrt{x^2+y^2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\nabla\ln(x^2+y^2) = \frac{1}{2}\frac{1}{x^2+y^2}(2x, 2y)$$

$$= \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}\right) = \vec{F} \Rightarrow \vec{F}$$ conservativo. pues es un gradiente

0.5 pto argumentos conservativo

((✱) si no se hizo antes)

o bien es un gradiente, o bien $\oint_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r} = 0$ en las curvas cerrada, usando Green.