Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas

Control1-MA26B: Matemáticas aplicadas-2006
Profesor: Rafael Correa
Auxiliares: Omar Larré, Tomas Spencer, Leonardo Zepeda

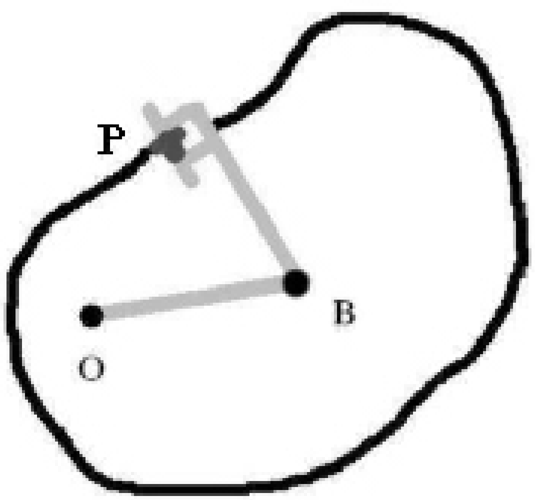
1. (a) Calcule el flujo del campo $\overrightarrow{F}(x,y,z)=(yz,xz,xy)$ a través de la cara curva del cuarto del cono, ubicado en el octante positivo, con base $B=\{(x,y,z): x\geq 0, y\geq 0, x^2+y^2\leq a^2, z=0\}$ y con vértice en $(0,0,h)$.

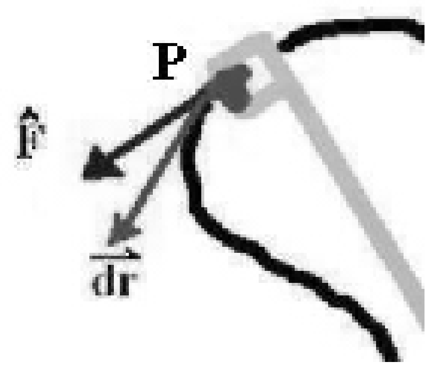
   (b) Sea $\overrightarrow{F}$ un campo de clase C^2 que cumple:
$$\lim_{\|\overrightarrow{r}\|\to\infty}\left\|\overrightarrow{F}(\overrightarrow{r})\right\|\|\overrightarrow{r}\|^2=0$$
   y sea Ω un volumen simplemente conexo y acotado. Pruebe que:
$$\iiint\limits_{\mathbb{R}^3\setminus\Omega} div(\overrightarrow{F})dV=\iint\limits_{\partial\Omega}\overrightarrow{F}\cdot\widehat{n}dS$$
   donde $\widehat{n}$ es la normal interior a la frontera de Ω.

2. Para medir el área de una región Ω encerrada por una curva Γ, se dispone de un instrumento llamado planímetro. El planímetro (como lo indica la figura) está formado por dos brazos de largo L cada uno, unidos por una articulación (en el punto B). El extremo libre de uno de los brazos se clava en un punto O pudiendo este brazo girar horizontalmente en torno a O. El extremo libre del otro brazo (punto P de la figura) posee una pequeña rueda de radio ρ, que puede girar libremente en torno a un eje paralelo al brazo, cuando éste se desplaza manualmente sobre el plano.

   Para usar el instrumento, se desplaza manualmente el brazo que posee la rueda, siguiendo con la rueda la trayectoria que define la curva Γ en un sentido positivo hasta volver al punto de partida. Esta rueda va a girar y/o resbalar (girará con mayor o menor rapidez dependiendo del ángulo que forme la rueda con la tangente a la curva Γ).

   Vamos ahora a definir en $R=B(0,2L)\subset\mathbb{R}^2$ el campo $\overrightarrow{F}:R\to\mathbb{R}^2$ unitario ($\left\|\overrightarrow{F}(x,y)\right\|=1$, $\forall(x,y)\in R$) de la siguiente manera: "$\overrightarrow{F}(x,y)$ es el campo unitario que tiene dirección ortogonal al brazo $\overline{BP}$ cuando se coloca P (la rueda) en el punto de coordenadas (x,y) con sentido a la izquierda del brazo $\overline{BP}$ mirando desde B".





Al deslizar la rueda siguiendo la trayectoria de Γ, si al dar una vuelta completa a Γ con el instrumento, denotamos N el número de vueltas que realizó la rueda (no necesariamente entero), no es difícil ver (no se pide demostrarlo) que el campo F anteriormente definido, verifica la igualdad:

$$\oint\limits_{\Gamma} F_1 dx + F_2 dy = \oint\limits_{\Gamma} \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{dr} = 2\pi N \rho$$

(En ésta integral, Γ se recorre en sentido positivo).

Denotemos al punto O por las coordenadas $(0,0)$ del plano cartesiano, al punto B por las coordenadas (a,b) y al punto P por las coordenadas (x,y). Observe que B es una función de P, es decir $(a,b) = (a(x,y), b(x,y))$. Se pide mostrar cómo este instrumento puede obtener dicha área, para ello:

(a) Muestre que el campo $\overrightarrow{F}$ en coordenadas cartesianas es:

$$\overrightarrow{F}(x,y) = \tfrac{1}{L}\begin{pmatrix} -(y-b) \\ x-a \end{pmatrix}$$

(b) Demuestre que $(\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y}) = 1$. Para ello, considere que (a,b) y (x,y) cumplen las ecuaciones:

$$a^2 + b^2 = L^2$$
$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = L^2$$

Indicacion: Derive parcialmente con respecto a x las ecuaciones anteriores y resuelva el sistema lineal para despejar $\frac{\partial a}{\partial x}$. Para encontrar $\frac{\partial b}{\partial y}$ repita lo anterior pero derivando parcialmente con respecto a y.

(c) Usando lo anterior, demuestre que:

$$\oint\limits_{\Gamma} \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{dr} = \tfrac{1}{L} A$$

Donde A es el área de Ω. Concluya que:

$$A = 2\pi N L \rho$$

(Esto nos muestra que, con este instrumento, basta saber el número de vueltas que da la rueda sobre una curva para conocer el área encerrada por dicha curva).

(a) Sea una curva Γ regular de clase C^2 parametrizada en longitud de arco por $\overrightarrow{r_0}(s) : (0, L_\Gamma) \to \mathbb{R}^3$. Definimos su indicatriz esférica tangente como:

$$\widehat{r}_1 = \widehat{T}_0 = \frac{d\overrightarrow{r_0}}{ds}$$

Considere que la indicatriz $\widehat{r}_1$ forma una nueva curva Γ_1, parametrizada por $\widehat{r}_1(s_1)$, donde s_1 es la longitud de arco de la indicatriz.

i. Demuestre que $\widehat{T}_1 // \widehat{N}_0$ y que $ds/ds_1 = 1/\kappa_0$ (κ_0 =curvatura de $\overrightarrow{r_0}$).
ii. Usando las fórmulas de Frenet, calcule κ_1 en función de κ_0 y τ_0.

(b) Sea $\overrightarrow{F} = (2x + y^2)\widehat{\imath} + (3y - 4x)\widehat{\jmath}$. Calcular la integral $\oint \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{dr}$ en la *lenteja* formada en el primer cuadrante por las ecuaciones $x = y^2$ e $y = x^2$. ¿Es conservativo este campo?

(c) Considere la superficie S del cono de ecuación $x^2 + y^2 = z^2$, $z \in [0, 4]$. Calcule la integral de flujo sobre S del campo:

$$\overrightarrow{F} = \left(e^{x^2+y^2} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\widehat{i} + \left(e^{x^2+y^2} \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\widehat{j} - z^2\widehat{k}$$

Para ello:

i. Haga el cambio de variables usual a polares para mostrar que $\overrightarrow{F}$ se puede reescribir como:
$$\overrightarrow{F} = e^{\rho^2}\widehat{\rho} - z^2\widehat{k}$$

ii. Muestre que una parametrización del cono es:

$$S = \{\overrightarrow{r}(\theta, \rho) : \rho \in [0, 4], z = \rho, \theta \in [0, 2\pi]\}$$

Luego demuestre que $\frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial \theta} = \rho\widehat{\theta}$ y que $\frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial \rho} = \widehat{\rho} + \widehat{k}$ para concluir que $\frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial \rho} = \rho(\widehat{\rho} - \widehat{k})$.

iii. Con todo lo anterior calcule la integral de flujo $\displaystyle\iint_S \overrightarrow{F} \cdot \widehat{n} dA$. Dibuje hacia donde apunta la normal. Interprete el signo de la integral.

Indicación: Recuerde que el triedro ortogonal en polares es $(\widehat{\rho}, \widehat{\theta}, \widehat{k})$, *que* $\widehat{\rho} = \cos\theta\widehat{i} + \sin\theta\widehat{j}$ *y que* $\widehat{\theta} = -\sin\theta\widehat{i} + \cos\theta\widehat{j}$.