(b) Sea $\vec{\sigma}:[0,L]\longrightarrow\mathbb{R}^3$ la parametrización en longitud de arco de una curva simple y regular $\Gamma\subset\mathbb{R}^3$. Suponga que $\forall s\in[0,L]$, $\kappa(s)\neq 0$ y $\tau(s)\neq 0$. Diremos que Γ es una hélice si existe $\hat{d}_0$ dirección fija, tal que todas las rectas tangentes a Γ forman un ángulo constante con $\hat{d}_0$. De esta forma, la curva $\mathcal{C}$ de la parte (a) es un caso particular de una hélice, con $\hat{d}_0=\hat{k}$.

(b.1) (1,5 pts) Pruebe que Γ es una hélice ssi las rectas normales principales son paralelas a un plano fijo

(b.2) (1,5 pts) Pruebe que Γ es una hélice ssi $\kappa/\tau=cte$

Sol (b)

(b.1)

Pdq $\hat{N}\cdot\hat{b}=0$, para algún $\hat{b}\in\mathbb{R}^3$ ssi $\hat{T}\cdot\hat{d}_0=c$, algún $c\in\mathbb{R}$ $\boxed{0.7\text{ pto}}$

$\hat{T}\cdot\hat{d}_0=\cos\theta_0$, donde θ_0 es el ángulo constante entre $\hat{T}$ y $\hat{d}_0$.

$$\Leftrightarrow \frac{d}{ds}\left(\hat{T}\cdot\hat{d}_0\right)=\frac{d}{ds}(\cos\theta_0)$$

$$\Leftrightarrow \kappa\hat{N}\cdot\hat{d}_0=0$$

y como $\kappa\neq 0$

$$\Leftrightarrow \hat{N}\cdot\hat{d}_0=0$$

queda demostrado, con $\hat{b}=\hat{d}_0$ y $c=\cos\theta_0$ $\boxed{0.8\text{ pto}}$

(b.2)

$\Rightarrow$) como $\hat{N}\cdot\hat{d}_0=0$, $\hat{d}_0$ puede escribirse como $\alpha(s)\hat{T}+\beta(s)\hat{B}$

$$\hat{d}_0=\alpha(s)\hat{T}+\beta(s)\hat{B}\quad /\frac{d}{ds}$$

$$0=\alpha'(s)\hat{T}+\alpha(s)\kappa\hat{N}+\beta'(s)\hat{B}-\beta(s)\tau\hat{N}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l}\alpha'=0\\ \beta'=0\\ \alpha\kappa-\beta\tau=0\end{array}\quad\Rightarrow\quad \kappa/\tau=\alpha/\beta=cte$$

$\boxed{1,5\text{ pto.}}$

$\Leftarrow$) Sea $\kappa/\tau=c$

$\Rightarrow \kappa-c\tau=0$

$\Rightarrow (\kappa-c\tau)\hat{N}=0$

$\Rightarrow \frac{d}{ds}\left(\hat{T}+c\hat{B}\right)=0$

$\Rightarrow \exists\,\vec{b}\in\mathbb{R}^3$, $\hat{T}(s)+c\hat{B}(s)=\vec{b}$ $\forall s$

$\Rightarrow (\hat{T}+c\hat{B})\cdot\hat{N}=\vec{b}\cdot\hat{N}$

$\Rightarrow \hat{N}\cdot\vec{b}=0$

$\Rightarrow$ (por b.1)

Γ es una hélice