Universidad de Chile.
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas.
Departamento de Ingeniería Matemática.
Santiago, 15 de Noviembre de 2011. Tiempo: 3:00 hrs.

CONTROL 1: MA2002 Cálculo Avanzado y Aplicaciones

Problema 1.

Sea S la superficie de la elipsoide de ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} + y^2 + z^2 = 1.$$

(a) (1 pto.) Dado $\vec{x} \in S$ encuentre la normal unitaria exterior $\hat{n}$ de S en $\vec{x}$. Para ello use la función

$$g(x,y,z) = \frac{x^2}{a^2} + y^2 + z^2 - 1.$$

Note que S corresponde a la superficie de nivel cero de g. Si llamamos Π al plano tangente de S en $\vec{x}$ recuerde entonces que el gradiente de g en $\vec{x}$ es perpendicular a Π.

(b) (1 pto.) Encuentre la ecuación de Π. Muestre que el vector $\vec{p} = (\vec{x} \cdot \hat{n})\hat{n}$ verifica la ecuación de Π y que es perpendicular a éste. Notar que $f = \vec{x} \cdot \hat{n}$ corresponde a la distancia entre el origen y Π.

(c) (1 pto.) Muestre que

$$\iint_S f \, dA = 4\pi a.$$

(d) (1 pto.) Considere el campo vectorial

$$\vec{F}(x,y,z) = \left(\frac{x}{a^2}, y, z\right).$$

Muestre que $\vec{F}$ es paralelo a $\hat{n}$.

(e) (1 pto.) Pruebe que $f = 1/(\vec{F} \cdot \hat{n})$ sobre S.

(f) (1 pto.) Muestre que

$$\iint_S \frac{1}{f} \, dA = \frac{4\pi}{3}\left(\frac{2a^2+1}{a}\right).$$

Problema 2.

Sea $\vec{F}$ campo vectorial de clase $\mathcal{C}^1$. Se puede mostrar que $\operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{F}) = 0$ para

$$i)\ \vec{F}(x,y,z) = (F_1(x,y,z), 0, 0); \quad ii)\ \vec{F}(x,y,z) = (0, F_2(x,y,z), 0); \quad iii)\ \vec{F}(x,y,z) = (0, 0, F_3(x,y,z)).$$

(a) (2 ptos.) Verifique la aseveración sólo en uno de los tres casos.

(b) (2 ptos.) Usando las tres afirmaciones anteriores probar que $\operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{F}) = 0$ para $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$.

(c) Sea Ω una región de $\mathbb{R}^3$ de borde $S := \partial\Omega$, superficie cerrada regular por trozos. Probar, usando los dos métodos siguientes, que

$$\iint_S \operatorname{rot} \vec{F} \cdot \hat{n} \, dS = 0$$

- (0,5 ptos.) El Teorema de Gauss.
- (1.5 ptos.) El Teorema de Stokes. Indicación: Considere cortar la superficie S en dos mediante un plano paralelo a XY

Problema 3.

La superficie S corresponde a la unión de 3 pedazos. Por una parte, 2 sectores circulares horizontales de radio 1, y centrados en el eje Z, de los cuales el primero corresponde a $\theta \in [0,\ \pi/4]$ y altura $z = 0$ y el segundo, $\theta \in [\pi/4,\ \pi/2]$ y altura $z = H$. El tercer pedazo es un rectángulo definido por $0 \leq \rho \leq 1$, $0 \leq z \leq H$ y $\theta = \pi/4$. Ver Figura 1. Se orienta la superficie de modo que la normal al sector circular superior apunte hacia arriba.
Se define el campo vectorial, en coordenadas cilíndricas, $\vec{F} = \rho^2 \hat{z} + z\rho\hat{\rho}$.

(a) (3 ptos.) Usando la definición de integral de trabajo, calcule la circulación

$$\oint_{\partial S} \vec{F} \cdot \hat{t}\, ds.$$

(b) (3 ptos.) Calcule la misma circulación, pero utilizando el Teorema de Stokes.

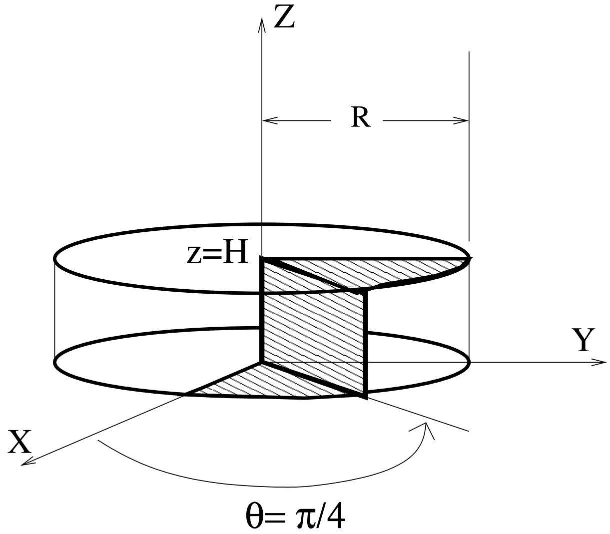


Figura 1: Superficie S del Problema 3.

Fórmulas útiles

$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{1}{h_u h_v h_w}\left[\frac{\partial}{\partial u}(F_u h_v h_w) + \frac{\partial}{\partial v}(h_u F_v h_w) + \frac{\partial}{\partial w}(h_u h_v F_w)\right]; \quad \operatorname{rot} \vec{F} = \frac{1}{h_u h_v h_w}\begin{vmatrix} h_u\hat{u} & h_v\hat{v} & h_w\hat{w} \\ \frac{\partial}{\partial u} & \frac{\partial}{\partial v} & \frac{\partial}{\partial w} \\ F_u h_u & F_v h_v & F_w h_w \end{vmatrix}$$

Pauta Control 1 Cálculo Avanzado y Aplicaciones MA2002-2, 2011

P1

1.1 $\hat{n}(\vec{x}) = \dfrac{\nabla E(\vec{x})}{\|\nabla E(x)\|}$

$\nabla E(\vec{x}) = \left(\dfrac{2x}{a^2}, 2y, 2z\right)$

$$\hat{n} = \hat{n}(\vec{x}) = \frac{\left(\frac{x}{a^2}, y, z\right)}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + y^2 + z^2}}, \quad \vec{x} = (x, y, z)$$

1.2 $\Pi = \{\vec{y} \in \mathbb{R}^3 \mid (\vec{y} - \vec{x}) \cdot \hat{n} = 0\}$

$\vec{p} = (\vec{x} \cdot \hat{n})\hat{n}$

$((\vec{x} \cdot \hat{n})\hat{n} - \vec{x}) \cdot \hat{n}$

$= (\vec{x} \cdot \hat{n})\, \hat{n} \cdot \hat{n} - \vec{x} \cdot \hat{n}$

$= \vec{x} \cdot \hat{n} - \vec{x} \cdot \hat{n}$

$= 0$

$\therefore \vec{p} \in \Pi.$

$\vec{p}$ es perpendicular a Π puesto que es paralelo a $\hat{n}$.

1.3 $f = \vec{x}\cdot\hat{n}$ es de clase C^1

S regular orientable, Ω = Elipsoide

$\therefore$ podemos usar el Teorema de Gauss,

$$\int_S f\,dA = \int_S \vec{x}\cdot\hat{n}\,dA = \int_\Omega \operatorname{div}(\vec{x})\,dV$$

$$= 3\int_\Omega dV = 3\,\operatorname{vol}(\Omega) = 3\,\frac{4}{3}\pi a = 4\pi a$$

1.4 $\vec{F} = \lambda\hat{n}$ con

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + y^2 + z^2}}$$

$\therefore$ $\vec{F}$ es paralelo a $\hat{n}$.

1.5
$$\vec{F}\cdot\hat{n} = \frac{\left(\frac{x}{a^2}, y, z\right)\cdot\left(\frac{x}{a^2}, y, z\right)}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + y^2 + z^2}}$$

$$= \frac{\frac{x^2}{a^4} + y^2 + z^2}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + y^2 + z^2}} =: \frac{A}{\sqrt{A}} = \frac{A\sqrt{A}}{\sqrt{A}\sqrt{A}} = \frac{A\sqrt{A}}{A} = \sqrt{A}$$

por otro lado

$$f = \vec{x} \cdot \hat{n} = \frac{(x, y, z) \cdot \left(\frac{x}{a^2}, y, z\right)}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + y^2 + z^2}}$$

$$= \frac{\frac{x^2}{a^2} + y^2 + z^2}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + y^2 + z^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + y^2 + z^2}} \quad \left(\text{puesto que } \vec{x} \in S\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{A}}$$

$$\therefore \quad f = \frac{1}{\vec{F} \cdot \hat{n}}$$

<u>1.6</u> $\frac{1}{f} = \vec{F} \cdot \hat{n}$ $\qquad \vec{F}$ de clase C^1

$$\therefore \int_S \frac{1}{f}\, dA = \int_S \vec{F} \cdot \hat{n}\, dA = \int_\Omega \operatorname{div}(\vec{F})\, dV$$

$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{1}{a^2} + 2 = \frac{2a^2+1}{a^2}$$

$$\therefore \int_S \frac{1}{f}\, dA = \frac{2a^2+1}{a^2} \int_\Omega dV = \frac{2a^2+1}{a^2} \frac{4}{3}\pi a = \frac{2a^2+1}{a} \frac{4\pi}{3}$$

Pauta C1 MA2002 CA7A

P2

(a) verifiquemos (i)

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot}\vec{F}) = \operatorname{div}\begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ F_1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \operatorname{div}\left(\frac{\partial}{\partial z}F_1\hat{\jmath} - \frac{\partial}{\partial y}F_1\hat{k}\right)$$

$$= \frac{\partial^2 F_1}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 F_1}{\partial y \partial z} = 0$$

(b) Sea $\vec{F}_1 = F_1\hat{\imath}$, $\vec{F}_2 = F_2\hat{\jmath}$, $\vec{F}_3 = F_3\hat{k}$

luego $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3$ y

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot}\vec{F}) = \operatorname{div}(\operatorname{rot}\vec{F}_1) + \operatorname{div}(\operatorname{rot}\vec{F}_2) + \operatorname{div}(\operatorname{rot}\vec{F}_3)$$

$$= 0 + 0 + 0 = 0.$$

(c) ▪ $\vec{F}$ y S cumplen las hipótesis del T. de Gauss, luego

$$\int_S \operatorname{rot}\vec{F}\cdot\hat{n}\,dS = \int_\Omega \operatorname{div}(\operatorname{rot}\vec{F})\,dV = 0.$$

▪ Al cortar S se generan 2 superficies S_1 y S_2 unidas por una curva cerrada regular por trozos Γ, Luego

$$I := \int_S \operatorname{rot}\vec{F}\cdot\hat{n}\,dS = \int_{S_1} \operatorname{rot}\vec{F}\cdot\hat{n}_1\,dS + \int_{S_2} \operatorname{rot}\vec{F}\cdot\hat{n}_2\,dS$$

donde $\hat{n}_1$ y $\hat{n}_2$ son las normales exteriores de S_1 y S_2 respectivamente.

además dotamos a ∂S_i con orientación compatible a S_i, y que llamamos Γ^+ para S_1 y Γ^- para S_2, notar que Γ^+ y Γ^- tienen orientaciones opuestas, usando el T. de Stokes (las hipótesis se cumplen)

$$I = \int_{S_1} \operatorname{rot}F\cdot\hat{n}\,dS + \int_{S_2} \operatorname{rot}\vec{F}\cdot\hat{n}_2\,dS$$

$$= \int_{\Gamma^+} \vec{F}\cdot\hat{t}\,dl + \int_{\Gamma^-} \vec{F}\cdot\hat{t}\,dl$$

$$= \int_{\Gamma^+} \vec{F}\cdot\hat{t}\,dl - \int_{\Gamma^+} \vec{F}\cdot\hat{t}\,dl$$

$$= 0$$

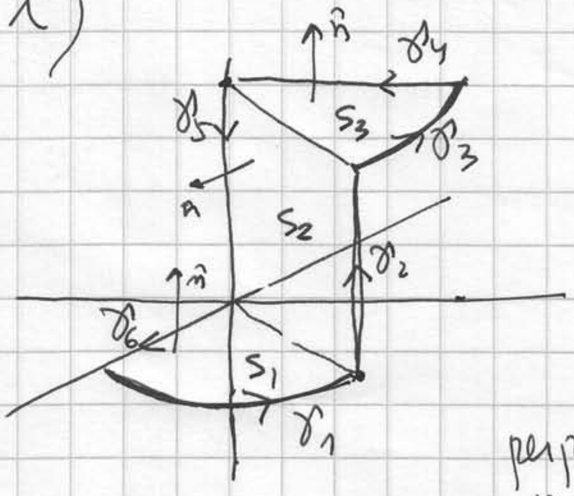
(1/2)

Pauta problema #3

Control 1 CAA

15 - nov - 2011

i)



El borde se separa en 6 arcos simples (rectos o circulares) (1pto por identificar los 6 arcos)

Lo importante es aprovechar la perpendicularidad entre la tangente $\hat{t}$ y el campo $\vec{F}$ (o de una de sus componentes)

arco	tangente	$\vec{F}\cdot\hat{t}$	$W_i = \int_{\gamma_i} \vec{F}\cdot\hat{t}\, ds$
(0.5pto) γ_1	$\hat{\theta}$	$\vec{F}\cdot\hat{t} = 0$ $(\hat{\theta}\perp\vec{F})$	$W_1 = 0$
(1pto) γ_2	$\hat{z}$	$\vec{F}\cdot\hat{t} = \rho^2$	$W_2 = H\cdot R^2$
(0.5pto) γ_3	$\hat{\theta}$	$F\cdot\hat{t} = 0$ $(\hat{\theta}\perp\vec{F})$	$W_3 = 0$
(1pto) γ_4	$-\hat{\rho}$	$F\cdot\hat{t} = -\rho z = -\rho H$	$W_4 = -\frac{1}{2} H R^2$
(0.5pto) γ_5	$-\hat{z}$	$F\cdot\hat{t} = \rho^2 = 0$ $(\rho = 0)$	$W_5 = 0$
(0.5pto) γ_6	$\hat{\rho}$	$F\cdot\hat{t} = \rho z = 0$ $(z = 0)$	$W_6 = 0$

Sumando los trabajos en cada arco

(Suma 1pto)

$$W = \int_\gamma \vec{F}\cdot\hat{t}\, ds = HR^2 - \frac{1}{2}HR^2 = \frac{1}{2}HR^2 \quad //$$

Pauta problema #3 (2/2)

ii) El rotor en cilíndricas

$$\frac{1}{\rho}\begin{vmatrix} \hat{\rho} & \rho\hat{\theta} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \rho z & 0 & \rho^2 \end{vmatrix}$$

Cálculo del rotor (2ptos)

$$= \frac{1}{\rho}\left\{ (0)\cdot\hat{\rho} - \rho\hat{\theta}(2\rho - \rho) + 0\cdot\hat{k} \right\}$$

$$= -\rho\hat{\theta}$$

determinar las normales $\hat{n}$ en cada S_i (1pto)

En S_1 y S_3, $\hat{n} = \hat{k} \perp \text{rot}\,\vec{F}$

En S_2 $\hat{n} = -\hat{\theta}$ luego

$$\iint_S \text{rot}\vec{F}\cdot\hat{n}\, dS = \iint_{S_2} (-\rho\hat{\theta})\cdot(-\hat{\theta})\, dS$$

cálculo del flujo como integral doble (2ptos)

$$= \iint \rho\, dS = \int_0^H \int_0^R \rho\, d\rho\, dz$$

$$= H\,\frac{R^2}{2} \quad //$$

resultado final (1pto)
(calcular la integral doble)