Pauta Control 1

Cálculo Avanzado y Aplicaciones 2013/2

Prof: J. Dávila, Auxiliares: R. Bobadilla, A. Bustos

Pregunta 1.
(a) (3 ptos.) Deteremine cuáles de los siguientes campos vectoriales en $\mathbb{R}^3$ son conservativos y calcule un potencial en caso de serlo:

$$F_1(x,y,z) = (\frac{y}{z^2+4}, \frac{x}{z^2+4}, -\frac{2xyz}{z^4+8z^2+16})$$
$$F_2(x,y,z) = (y^2, x, x).$$

(b) (3 ptos.) Calcule

$$\int_C (F_1 + F_2) \cdot d\vec{r}$$

donde la curva C es la parte en $z \leq 0$ de la elipse que resulta de intersectar $x^2 + y^2 = 1$ con $y = z$, orientada de $(1,0,0)$ a $(-1,0,0)$.

Solución.
(a) Podemos calcular

$$\operatorname{rot}(F_1) = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ \frac{y}{z^2+4} & \frac{x}{z^2+4} & -\frac{2xyz}{z^4+8z^2+16} \end{vmatrix}$$
$$= \hat{\imath}\left[-\frac{2xz}{z^4+8z^2+16} - \left(-\frac{2xz}{(z^2+4)^2}\right)\right] - \hat{\jmath}\left[-\frac{2yz}{z^4+8z^2+16} - \left(-\frac{2yz}{(z^2+4)^2}\right)\right]$$
$$+ \hat{k}\left[\frac{1}{z^2+4} - \frac{1}{z^2+4}\right] = 0$$

Esto permite afirmar que F_1 es conservativo.

Busquemos un potencial para el campo F_1 mediante integración. Suponiendo que $F_1 = \nabla\psi$ tendremos las tres ecuaciones:

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{y}{z^2+4}$$
$$\frac{\partial\psi}{\partial y} = \frac{x}{z^2+4}$$
$$\frac{\partial\psi}{\partial z} = -\frac{2xyz}{z^4+8z^2+16}$$

Mediante integración indefinida en la variable x obtenemos:

$$\psi(x,y,z) = \int \frac{y}{z^2+4}\,dx = \frac{xy}{z^2+4} + C_1(y,z)$$

donde C_1 es una función de y, z. Usando la ecuación para $\frac{\partial\psi}{\partial y}$ encontramos

$$\frac{\partial C_1}{\partial y} = 0$$

por lo que $C_1(y,z) = C_2(z)$ y usando la ecuación para $\frac{\partial \psi}{\partial z}$ tenemos $C_2'(z) = 0$, por lo que C_2 es una constante. Por lo tanto todo campo de la forma

$$\psi(x,y,z) = \frac{xy}{z^2+4} + C$$

es un potencial para F.

Puntajes:

- Con el esquema desarrollado, 0,5 por el rotor, 0,5 por saber que potencial es $\nabla\psi = F_1$ (o $-\nabla\psi = F_1$), 1 por encontrar ψ correctamente (2 ptos).
- No es necesario calcular el rotor. Si se intuye que el campo es conservativo y se busca el potencial (correctamente) asignar 0,7 por $\nabla\psi = F_1$ (o $-\nabla\psi = F_1$), 1,3 por encontrar ψ correctamente.
- Dar puntaje completo (2 ptos) si se afirma que $\psi = ...$ (fórmula correcta) es potencial o satisface $\nabla\psi = F_1$.

Para el campo F_2 tenemos

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}(F_2) &= \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ y^2 & x & x \end{vmatrix} \\ &= -\hat{\jmath} + \hat{k}(1-y^2) \neq 0 \end{aligned}$$

por lo que F_2 no es conservativo.

Puntaje: 1 por calcular rotor y concluir.

(b) Como F_1 es conservativo, utilizando el potencial encontrado anteriormente obtenemos

$$\int_C F_1 \cdot d\vec{r} = \psi(-1,0,0) - \psi(1,0,0) = \frac{(-1)\cdot 0}{0^2+4} - \frac{1\cdot 0}{0^2+4} = 0$$

1 pto por este resultado. Poner atención que es $\psi(final) - \psi(inicial)$ si $\nabla\psi = F_1$

Para calcular el trabajo de F_2 proponemos la siguiente parametrización de C

$$\vec{r}(t) = \begin{bmatrix} \cos(t) \\ -\sin(t) \\ -\sin(t) \end{bmatrix}, \quad t \in [0,\pi].$$

Notar que $\vec{r}(0) = (1,0,0)$, $\vec{r}(1) = (-1,0,0)$ por lo que esta parametrización da la orientación requerida a la curva.

1 pto parametrización, es necesario observar la orientación

Tenemos

$$\vec{r}'(t) = \begin{bmatrix} -\sin(t) \\ -\cos(t) \\ -\cos(t) \end{bmatrix}$$

y entonces

$$
\begin{aligned}
\int_C F_2 \cdot d\vec{r} &= \int_0^{\pi} (-\sin^3(t) - 2\cos^2(t))\, dt \\
&= \int_0^{\pi} (1-\cos^2(t))(-\sin(t))\, dt - \int_0^{\pi} (1+\cos(2t))\, dt \\
&= \int_1^{-1} (1-z^2)\, dz - \pi - \frac{1}{2}\sin(2t)\Big|_0^{\pi} \\
&= (\frac{1}{3}z^3 - z)\Big|_{-1}^{1} - \pi \\
&= -\frac{4}{3} - \pi.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto

$$
\int_C (F_1 + F_2) \cdot d\vec{r} = -\frac{4}{3} - \pi.
$$

0,5 por defnición de integral de línea y 0,5 por el cálculo

Pregunta 2.
(a) (4 ptos.) Sea S la superficie definida por $z^2 + x^2 = 1 + y^2$, $y \geq 0$ y C la curva obtenida al intersectar S con el cilindro $x^2 + y^2 = 1$. Calcular

$$\oint_C F \cdot d\vec{r}$$

donde el campo F está dado en coordenadas cilíndricas por

$$F = r^2 e^{z^2} \sin^4(\theta)\hat{r} + (\frac{z}{r} + \theta)\hat{\theta} + (\sin(\theta) + \sqrt{1 + r^2})\hat{z}.$$

(Elija cualquier orientación para la curva cerrada C).

(b) (2 ptos.) Pruebe que si $f : U \to \mathbb{R}$, $F : U \to \mathbb{R}^3$ son C^1 en el abierto $U \subset \mathbb{R}^3$, entonces

$$\operatorname{rot}(fF) = \nabla f \times F + f \operatorname{rot}(F).$$

Solución.
(a) Tenemos el siguiente campo:

$$\vec{F} = r^2 e^{z^2} \sin^4(\theta)\hat{r} + (\frac{z}{r} + \theta)\hat{\theta} + (\sin(\theta) + \sqrt{1 + r^2})\hat{z}$$

y las siguientes superficies a intersectar:

$$z^2 + x^2 = 1 + y^2, \quad x^2 + y^2 = 1, \quad y \geq 0.$$

Usamos el teorema de Stokes:

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_\Sigma \nabla \times \vec{F} \cdot d\vec{S},$$

con la superficie Σ definida como la parte del cilindro $x^2 + y^2 = 1$, que está en $y \geq 0$ pero además encerrada por la superficie S. Para parametrizar Σ, dado que nos movemos por el cilindro $x^2 + y^2 = 1$ es natural usar variables cilíndricas r, θ y z con $r = 1$. Entonces la parametrización será:

$$(x, y, z) = (\cos(\theta), \sin(\theta), z)$$

pero debemos determinar correctamente el rango de estas variables para describir adecuadamente Σ. Como consideramos la parte del cilindro en $y \geq 0$ es natural pedir

$$\theta \in [0, \pi].$$

Pero además queremos que esta parametrización describa la parte del cilindro encerrada por S. De la ecuación para el cilindro podemos despejar x^2 y reemplazar en la de S para obtener:

$$z^2 = 2y^2.$$

0.5 pts por hacer un despeje adecuado o alguna discusión analítica sobre la intersección

Esto quiere decir que para la superficie S, debemos tener

$$|z| \leq \sqrt{2}y, \quad y \geq 0.$$

Escribiendo esto en coordenadas cilíndricas y recordando que $r = 1$ en el cilindro:

$$|z| \leq \sqrt{2}\sin(\theta).$$

En resumen, la parametrización es

$$(x, y, z) = (\cos(\theta), \sin(\theta), z)$$
$$0 \leq \theta \leq \pi, \quad -\sqrt{2}\sin(\theta) \leq z \leq \sqrt{2}\sin(\theta).$$

1.5 pts por una parametrización bien hecha

Calculamos el rotor de $\vec{F}$:

1 pto. por el rotor; con la componente según $\hat{r}$ es suficiente

$$\begin{aligned}\nabla\times\vec{F} &= \frac{1}{r}\begin{vmatrix}\hat{r} & r\hat{\theta} & \hat{z}\\ \partial_r & \partial_\theta & \partial_z\\ r^2e^{z^2}\sin^4(\theta) & r(\frac{z}{r}+\theta) & (\sin(\theta)+\sqrt{1+r^2})\end{vmatrix}\\ &= \frac{1}{r}(\cos(\theta)-1)\hat{r}+...\end{aligned}$$

Las otras componentes no son relevantes porque se está integrando sobre una superficie sobre el cilindro y por lo tanto el vector normal es $\hat{r}$ (las otras componente en coordenadas cilíndricas de $\nabla\times\vec{F}$ son perpendiculares a $\hat{r}$).

Calculamos la integral de flujo (recordando $r=1$ en el cilindro)

calcular integral: 1 pto

$$\begin{aligned}\int_\Sigma \nabla\times\vec{F}\cdot d\vec{S} &= \int_0^\pi\int_{-\sin(\theta)\sqrt{2}}^{\sin(\theta)\sqrt{2}}(\cos(\theta)-1)dzd\theta\\ &= 2\sqrt{2}\int_0^\pi(\cos(\theta)\sin(\theta)-\sin(\theta))d\theta\\ &= 2\sqrt{2}\left[\frac{\sin^2(\theta)}{2})\Big|_0^\pi+\cos(\theta)\Big|_0^\pi\right]=-4\sqrt{2}\end{aligned}$$

(b): Calculamos directamente, escribiendo

$$\vec{F}=(F_x,F_y,F_z)$$

$$\begin{aligned}\nabla\times(f\vec{F}) &= \begin{vmatrix}\hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k}\\ \partial_x & \partial_y & \partial_z\\ fF_x & fF_y & fF_z\end{vmatrix}\\ &= \hat{\imath}\left[\partial_y fF_z+f\partial_yF_z-\partial_zfF_z-f\partial_zF_y\right]\\ &\quad-\hat{\jmath}\left[\partial_xfF_z+f\partial_xF_z-\partial_zfF_x-f\partial_zF_x\right]\\ &\quad+\hat{k}\left[\partial_xfF_y+f\partial_xF_y-\partial_yfF_x-f\partial_yF_x\right]\\ &= \hat{\imath}\left[\partial_yfF_z-\partial_zfF_z\right]-\hat{\jmath}\left[\partial_xfF_z-\partial_zfF_x\right]+\hat{k}\left[\partial_xfF_y-\partial_yfF_x\right]\\ &\quad+f\hat{\imath}\left[\partial_yF_z-\partial_zF_y\right]-f\hat{\jmath}\left[\partial_xF_z-f\partial_zF_x\right]+f\hat{k}\left[\partial_xF_y-\partial_yF_x\right]\\ &= \begin{vmatrix}\hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k}\\ \partial_xf & \partial_yf & \partial_zf\\ F_x & F_y & F_z\end{vmatrix}+f\begin{vmatrix}\hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k}\\ \partial_x & \partial_y & \partial_z\\ F_x & F_y & F_z\end{vmatrix}\\ &= \nabla f\times\vec{F}+f\,\nabla\times\vec{F}.\end{aligned}$$

Nota: contar como correcto también si se analiza el caso $\vec{F} = (0, 0, F_z)$ (o alguno donde todas las componentes son cero salvo una):

$$\begin{aligned}
\nabla \times (f\vec{F}) &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ 0 & 0 & fF_z \end{vmatrix} \\
&= \frac{\partial}{\partial y}(fF_z)\hat{i} - \frac{\partial}{\partial x}(fF_z)\hat{j} \\
&= F_z\left(\frac{\partial f}{\partial y}\hat{i} - \frac{\partial f}{\partial x}\hat{j}\right) + f\left(\frac{\partial F_z}{\partial y}\hat{i} - \frac{\partial F_z}{\partial x}\hat{j}\right) \\
&= \left(\frac{\partial f}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{k}\right) \times (F_z\hat{k}) + f(\nabla \times F_z\hat{k}) \\
&= \nabla f \times \vec{F} + f(\nabla \times \vec{F})
\end{aligned}$$

y se argumenta que los otros son parecidos, y que el resultado se encuentra por linealidad.

Puntaje: 1pto por desarrollar de la manera que sea el rotor de fF y otro punto por reagrupar los términos para formar lo pedido

Pregunta 3.

(a) (3 ptos.) Considere la superficie S definida por

$$(\sqrt{x^2+y^2}-3)^2+z^2=4, \quad z \leq 1$$

que corresponde a parte de un toro con círculo central en el plano xy de radio 3 y radio menor 2, orientada según la normal "exterior". Calcule

$$\int_S F \cdot \hat{n}\, dA$$

donde F es el campo

$$F(x,y,z) = (-2xye^{y^2}, e^{y^2} - \frac{yz}{1+z^2}, x^2 + \log(\sqrt{1+z^2}))$$

(b) (3 ptos.) Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie regular orientable con normal unitaria N y borde geométrico la curva regular, cerrada simple C con tangente unitaria T. Suponemos que N está definida en una vecindad abierta de S y que N y T tienen orientaciones compatibles para el teorema de Stokes. Sea $\nu = T \times N$ y F un campo vectorial C^1. Pruebe que

$$\int_C F \cdot \nu\, dl = \int_S [\mathrm{div}(F) - \mathrm{div}(N) N \cdot F - (N \cdot ((N \cdot \nabla)F))] dA$$

donde $(N \cdot \nabla)F = N \cdot \nabla F_1 \hat{\imath} + N \cdot \nabla F_2 \hat{\jmath} + N \cdot \nabla F_3 \hat{k}$.

Solución.

(a) Observemos que

$$\begin{aligned}
\mathrm{div}(F) &= \frac{\partial}{\partial x}(-2xye^{y^2}) + \frac{\partial}{\partial y}(e^{y^2} - \frac{yz}{1+z^2}) + \frac{\partial}{\partial z}(x^2 + \log(\sqrt{1+z^2}) \\
&= -2ye^{y^2} + e^{y^2}2y - \frac{z}{1+z^2} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial z}\log(1+z^2) \\
&= -2ye^{y^2} + e^{y^2}2y - \frac{z}{1+z^2} + \frac{1}{2}\frac{2z}{1+z^2} = 0.
\end{aligned}$$

Aplicamos el teorema de la divergencia a F en la región Ω definida como la parte interior del toro $(\sqrt{x^2+y^2}-3)^2+z^2=4$ que satisface $z \leq 1$, es decir,

0,5 ptos divergencia

0,5 ptos idea usar teorema divergencia

$$\Omega = \{(x,y,z) : (\sqrt{x^2+y^2}-3)^2 + z^2 < 4,\ z < 1\}.$$

Entonces $\partial\Omega = S \cup \tilde{S}$ donde $\tilde{S}$ es la superficie

0,5 identificar Ω y su frontera, o proponer una forma "razonable" de cerrar la superficie

$$\tilde{S} = \{(x,y,z) : z = 1,\ 3 - \sqrt{3} \leq \sqrt{x^2+y^2} \leq 3 + \sqrt{3}\},$$

que resulta de intersectar

$$(\sqrt{x^2+y^2}-3)^2 + z^2 \leq 4$$

con $z = 1$:

$$\begin{aligned}
&(\sqrt{x^2+y^2}-3)^2 + 1 \leq 4 \\
&|\sqrt{x^2+y^2}-3| \leq \sqrt{3} \\
&3 - \sqrt{3} \leq \sqrt{x^2+y^2} \leq 3 + \sqrt{3}.
\end{aligned}$$

La orientación de S es la exterior a Ω y asignamos a $\tilde{S}$ también la orientación exterior a Ω, esto es, $\hat{n} = \hat{k}$ en $\tilde{S}$. Por el teorema de la divergencia

$$\int_\Omega \mathrm{div}(F)\, dV = \int_S F \cdot \hat{n} dA + \int_{\tilde{S}} F \cdot \hat{n} dA.$$

Como $\mathrm{div}(F) = 0$ obtenemos

$$\int_S F \cdot \hat{n} dA = -\int_{\tilde{S}} F \cdot \hat{n} dA.$$

0,5 identificar la normal sobre $\tilde{S}$

Calculemos esta última integral. Para esto notemos que sobre $\tilde{S}$

$$F \cdot \hat{n} = x^2 + \frac{1}{2}\log 2.$$

0,5 plantear la integral correctamente

Usando coordenadas polares

$$\begin{aligned}
\int_{\tilde{S}} F \cdot \hat{n} dA &= \int_{3-\sqrt{3}}^{3+\sqrt{3}} \int_0^{2\pi} (r^2\cos(\theta)^2 + \frac{1}{2}\log 2) r\, d\theta dr \\
&= \int_{3-\sqrt{3}}^{3+\sqrt{3}} r^3\, dr \int_0^{2\pi} \cos(\theta)^2\, d\theta + 2\pi \frac{1}{2}\log 2 \int_{3-\sqrt{3}}^{3+\sqrt{3}} r\, dr \\
&= \frac{1}{4}((3+\sqrt{3})^4 - (3-\sqrt{3})^4) \int_0^{2\pi} \frac{1+\cos(2\theta)}{2} d\theta + \pi \log 2 \frac{1}{2}((3+\sqrt{3})^2 - (3-\sqrt{3})^2) \\
&= \frac{\pi}{4}((3+\sqrt{3})^4 - (3-\sqrt{3})^4) + \frac{\pi}{2}\log 2((3+\sqrt{3})^2 - (3-\sqrt{3})^2)
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\int_S F \cdot \hat{n} dA = -\frac{\pi}{4}((3+\sqrt{3})^4 - (3-\sqrt{3})^4) - \frac{\pi}{2}\log 2((3+\sqrt{3})^2 - (3-\sqrt{3})^2).$$

0,5 cálculo correcto

Observaciones

- Si alguien parametriza la superficie S correctamente y planeta la integral de flujo correctamente: 1,5 ptos. Si el cáculo de la integral es correcto: 1,5 puntos más.
- No es necesario desarrollar $\int_0^{2\pi} \cos(\theta)^2\, d\theta = \pi$.

(b) Aplicamos el teorem de Stokes con el campo C^1 $N \times F$:

$$\int_C (N \times F) \cdot d\vec{r} = \int_S \mathrm{rot}(N \times F) \cdot N\, dA.$$

1 pto. idea de aplicar Stokes con $N \times F$

Por un lado tenemos que en la curva C, la integral de línea se puede escribir como

$$\int_C (N \times F) \cdot d\vec{r} = \int_C (N \times F) \cdot T\, dl$$

y usando una de las fórmulas

$$\begin{aligned}\int_C (N\times F)\cdot d\vec{r} &= \int_C (N\times F)\cdot T\,dl\\ &= \int_C (F\times T)\cdot N\,dl\\ &= \int_C (T\times N)\cdot F\,dl\\ &= \int_C \nu\cdot F\,dl.\end{aligned}$$

Por otro lado, usando otra de las fórmulas

1 pto. convertir integral en el borde usando identidades

$$\operatorname{rot}(N\times F) = N\operatorname{div}(F) - F\operatorname{div}(N) + (F\cdot\nabla)N - (N\cdot\nabla)F$$

por lo que

$$\operatorname{rot}(N\times F)\cdot N = \operatorname{div}(F) - \operatorname{div}(N)F\cdot N + N\cdot((F\cdot\nabla)N) - N\cdot((N\cdot\nabla)F).$$

Si comparamos con el enunciado notamos que en este no aparece el término

$$N\cdot((F\cdot\nabla)N).$$

Veamos que en efecto

$$N\cdot((F\cdot\nabla)N) = 0.$$

Escribamos el vector N como $N=(N_1,N_2,N_3)$. Entonces

$$(F\cdot\nabla)N = F\cdot\nabla N_1\hat{\imath} + F\cdot\nabla N_2\hat{\jmath} + F\cdot N_3\hat{k}$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned}N\cdot((F\cdot\nabla)N) &= N\cdot[F\cdot\nabla N_1\hat{\imath} + F\cdot\nabla N_2\hat{\jmath} + F\cdot N_3\hat{k}]\\ &= F\cdot\nabla N_1N_1 + F\cdot\nabla N_2N_2 + F\cdot\nabla N_3N_3\\ &= \frac{1}{2}F\cdot\nabla(N_1^2+N_2^2+N_3^2)\\ &= \frac{1}{2}F\cdot\nabla(1)\\ &= 0.\end{aligned}$$

1 pto. por ver que $N\cdot((F\cdot\nabla)N)=0$

Fórmulas

Rotor en coordenadas cilíndricas:

$$F(r,\theta,z) = F_r\hat{r} + F_\theta\hat{\theta} + F_z\hat{z}, \quad \operatorname{rot}(F) = \frac{1}{r}\begin{vmatrix} \hat{r} & r\hat{\theta} & \hat{z} \\ \partial_r & \partial_\theta & \partial_z \\ F_r & rF_\theta & F_z \end{vmatrix}$$

$$\operatorname{rot}(G \times F) = G\operatorname{div}(F) - F\operatorname{div}(G) + (F\cdot\nabla)G - (G\cdot\nabla)F$$

Si $a, b, c \in \mathbb{R}^3$

$$(a \times b)\cdot c = (b\times c)\cdot a = (c \times a)\cdot b$$