Control 1 MA2EB 2006

Profs: Alberto Mercado y Felipe Álvarez

Pauta P1

(a) Dados $a, b, c > 0$ tales que $a^2+b^2=c^2$, sea $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^3$ la curva parametrizada por $\vec{r}: [0, 2\pi c] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ con

$$\vec{r}(s) = a\cos\left(\frac{s}{c}\right)\hat{\imath} + a\,\mathrm{sen}\left(\frac{s}{c}\right)\hat{\jmath} + b\left(\frac{s}{c}\right)\hat{k}$$

(a.1) (1,5 pts) Muestre que el parámetro s es la longitud de arco sobre $\mathcal{C}$. Calcule el triedro de Frenet: vectores tangente, normal y binormal a la curva. Pruebe que las rectas tangentes a $\mathcal{C}$ forman un ángulo constante con el vector unitario $\hat{k}$.

(a.2) (1,5 pts) Pruebe que las rectas normales principales cortan al eje z en un ángulo constante igual a $\pi/2$. Calcule la curvatura $k(s)$ y la torsión $\tau(s)$ de $\mathcal{C}$ y verifique que $k/\tau = a/b$.

Sol (a):

(a.1)

Sea $l(s)$ el parámetro de longitud de arco sobre $\mathcal{C}$. Se demostrará que $l(s) \equiv s$

$$l(s) = \int_0^s \left\| \frac{d\vec{r}}{d\xi} \right\| d\xi$$

$$\frac{d\vec{r}}{ds} = -\frac{a}{c}\,\mathrm{sen}\left(\frac{s}{c}\right)\hat{\imath} + \frac{a}{c}\cos\left(\frac{s}{c}\right)\hat{\jmath} + \frac{b}{c}\hat{k}$$

$$\left\|\frac{d\vec{r}}{ds}\right\| = \sqrt{\frac{1}{c^2}\left[a^2\underbrace{\left(\mathrm{sen}^2\left(\frac{s}{c}\right)+\cos^2\left(\frac{s}{c}\right)\right)}_{1} + b^2\right]} = \frac{1}{c}\sqrt{a^2+b^2} = 1$$

$$\Rightarrow l(s) = \int_0^s d\xi = s \quad // \qquad \boxed{0{,}6 \text{ pto}}$$