CONTROL 1 - CÁCULO AVANZADO Y APLICACIONES, 2012/1

Profesores: Juan Dávila, Jaime González, Álvaro Hernández

Pregunta 1. Calcule el flujo del campo

$$\vec{F}(x,y,z) = (x\sin(z) + y^2, z^3 - y, x^2 + \cos(z))$$

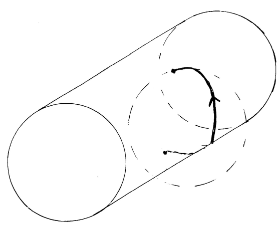
a través de la superficie S formada por el manto del cono $z = \sqrt{x^2+y^2}$, $z \leq 2$ (orientado hacia afuera del manto del cono) y el anillo $1 \leq x^2+y^2 \leq 4$, $z = 2$ (orientado hacia arriba).

Indicación: utilice el teorema de Gauss.

Pregunta 2. Considere el campo vectorial

$$\vec{F}(x,y,z) = (y^2z^3, 2xyz^3, 3xy^2z^2 + y)$$

y la curva C definida como la intersección del cilindro $x^2+z^2 = 4$ con la semi-esfera $x^2 + (y-2)^2 + z^2 = 4$, $x \leq 0$, orientada de abajo hacia arriba.



a) Calcule el rotor de $\vec{F}$ y deduzca que el campo $\vec{F}$ es la suma de dos campos $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ donde $\vec{F}_1$ es conservativo y $\vec{F}_2$ tiene la forma $\vec{F}_2(x,y,z) = (0,0,g(y))$.

b) Encuentre un potencial de $\vec{F}_1$.

c) Calcule la integral de $\vec{F}$ sobre la curva C.

Pregunta 3. Sea $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un campo de clase C^3 y considere

$D = \{(x,y,z) : x^2+y^2 < z < 1\}$

$S = \{(x,y,z) : x^2+y^2 = z, z \leq 1\}$ orientada exteriormente

$T = \{(x,y,z) : x^2+y^2 \leq 1, z = 1\}$ orientada hacia arriba

$C = \{(x,y,z) : x^2+y^2 = 1, z = 1\}$ orientado de forma antihoraria (visto desde arriba)

a) Pruebe que

$$rot(rot(\vec{F})) = \nabla(div(\vec{F})) - \Delta\vec{F}$$

donde $\Delta\vec{F} = (\Delta F_1, \Delta F_2, \Delta F_3)$, $\vec{F}$ se escribe como $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$ y Δ es el Laplaciano.

b) Demuestre que

$$\iint_S \nabla(div(\vec{F})) \cdot d\vec{S} = \oint_C rot(\vec{F}) \cdot d\vec{r} + \iint_S \Delta\vec{F} \cdot d\vec{S}$$

c) Verifique que

$$\iiint_D \Delta(div(\vec{F}))\, dV = \iint_S \nabla(div(\vec{F})) \cdot d\vec{S} + \iint_T \nabla(div(\vec{F})) \cdot d\vec{S}$$

d) Concluya que

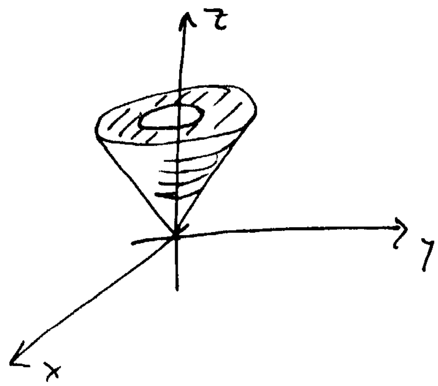
$$\iiint_D \Delta(div(\vec{F}))\, dV = \oint_C rot(\vec{F}) \cdot d\vec{r} + \iint_S \Delta\vec{F} \cdot d\vec{S} + \iint_T \nabla(div(\vec{F})) \cdot d\vec{S}$$

Indicación: usamos la notación

$$\iint_\Sigma \vec{G} \cdot d\vec{S} = \iint_\Sigma \vec{G} \cdot \hat{n}\, dA$$

Pauta Control 1 - Cálculo Avanzado y Aplicaciones 2012/1

P1)



$$\vec{F}(x,y,z) = (x \operatorname{sen}(z) + y^2, \\ z^3 - y, \\ x^2 + \cos(z))$$

Sea D la región definida por

$$\sqrt{x^2+y^2} < z < 2 .$$

Entonces $\partial D = S \cup T$ donde S es la superficie del enunciado y

$$T = \{ (x,y,z) : z = 2 , x^2 + y^2 \leq 1 \} .$$

La orientación de S es compatible con la orientación exterior a D. Por el teorema de Gauss

$$\iiint_D \operatorname{div}(\vec{F})\, dV = \iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} + \iint_T \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

donde T se orienta hacia arriba.

Calculamos $\operatorname{div}(\vec{F}) = \frac{\partial}{\partial x}(x \operatorname{sen}(z) + y^2) + \frac{\partial}{\partial y}(z^3 - y) + \frac{\partial}{\partial z}(x^2 + \cos(z))$

$$= \operatorname{sen}(z) - 1 - \operatorname{sen}(z) = -1 .$$

Entonces

$$\iiint_D \operatorname{div}(\vec{F})\, dV = -1 \cdot \operatorname{vol}(D)$$

$$= -1 \cdot \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot 4 \cdot \pi$$

$$= -\frac{8}{3}\pi$$

Calculamos

$$\iint_T \vec{F} \cdot \vec{dS} .$$

Usamos coordenadas polares y que $\hat{n} = \hat{z}$ en T. Así

$$\iint_T \vec{F} \cdot \vec{dS} = \iint_T \left(x^2 + \cos(2)\right) dA$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^2 \cos^2\theta \;\; r\, dr\, d\theta + \cos(2) \cdot \pi$$

$$= \int_0^1 r^3 dr \int_0^{2\pi} \cos^2\theta\, d\theta + \cos(2)\,\pi$$

$$= \frac{1}{4} r^4 \Big|_0^1 \cdot \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos 2\theta}{2}\, d\theta + \cos(2)\,\pi$$

$$= \frac{1}{4}\left(\pi + \frac{1}{4}\operatorname{sen}(2\theta)\Big|_0^{2\pi}\right) + \cos(2) \cdot \pi$$

$$= \frac{\pi}{4} + \cos(2)\,\pi = \pi\left(\frac{1}{4} + \cos(2)\right).$$

Entonces $\displaystyle\iint_S \vec{F} \cdot \vec{dS} = \iiint_D \operatorname{div}(\vec{F}) - \iint_T \vec{F} \cdot \vec{dS} = -\frac{8}{3}\pi - \pi\left(\frac{1}{4} + \cos(2)\right)$

$$= -\pi\left(\frac{35}{12} + \cos(2)\right)$$

Puntajes

Puntajes si se resuelve usando el teorema de Gauss de la manera más simple.

Elegir la región D	0,5
Identificar la frontera $\partial D = S \cup T$	0,5
Comentario sobre orientaciones	0,5
Fórmula del teorema de Gauss	0,5
Cálculo $\operatorname{div}(\vec{F})$	1
Cálculo de $\iiint_D \operatorname{div}(\vec{F})\, dV$	1,2
Cálculo de $\iint_T \vec{F} \cdot d\vec{S}$	1,3
Valor de $\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$	0,5

En caso que se responda con un cálculo directo,

cálculo en $z=2$, $1 \le x^2+y^2 \le 2$	2 ptos
cálculo en el manto del cono	4 ptos.

y conversar con profesores del curso.

Pauta Control 1 - Cálculo Avanzado y Aplicaciones 2012/1

2) $\vec{F} = (y^2 z^3, 2xy\, z^3, 3xy^2z^2 + y)$

$C = \{x^2 + z^2 = 4\} \cap \{x^2 + (y-2)^2 = 4\}$

a) $rot(\vec{F}) = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \partial x & \partial y & \partial z \\ y^2z^3 & 2xyz^3 & 3xy^2z^2 + y \end{vmatrix}$

$= \hat{\imath}\left(6xyz^2 + 1 - 6xyz^2\right)$

$-\hat{\jmath}\left(3y^2z^2 - 3y^2z^2\right)$

$+\hat{k}\left(2yz^3 - 2yz^3\right)$

$= \hat{\imath}$

Podemos escribir $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ donde

$\vec{F}_1 = (y^2z^3, 2xyz^3, 3xy^2z^2)$ $\quad F_2 = (0, 0, y)$

y entonces $\vec{F}_1$ es conservativo

b) Buscamos $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tal que

$$-\nabla u = \vec{F}_1.$$

$$-\frac{\partial u}{\partial x} = y^2 z^3$$

$$u = -xy^2z^3 + a(y,z)$$

$$-\frac{\partial u}{\partial y} = 2xyz^3 - \frac{\partial a}{\partial y}$$

$$-\frac{\partial u}{\partial y} = 2xyz^3 \Rightarrow \frac{\partial a}{\partial y} = 0$$

$$\Rightarrow a(y,z) + b(z)$$

$$u(x,y,z) = -xy^2z^3 + b(z)$$

$$-\frac{\partial u}{\partial z} = 3xy^2z^2 - \frac{\partial b}{\partial z}$$

$$-\frac{\partial u}{\partial z} = 3xy^2z^2 \Rightarrow \frac{\partial b}{\partial z} = 0$$

$$\Rightarrow b = \text{constante}$$

$u(x,y,z) = -xy^2z^3 + C$ (C es cualquier constante).

c) $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_C \vec{F}_1 \cdot d\vec{r} + \int_C \vec{F}_2 \cdot dr$

Como $\vec{F}_1 = -\nabla u$

$$\int_C \vec{F}_1 \cdot d\vec{r} = u(p_1) - u(p_2)$$

donde p_1 es el punto inicial y p_2 es el punto final de C.

Analicemos la curva

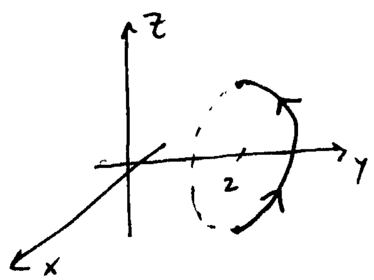
$$x^2 + z^2 = 4 \quad , \quad x^2 + (y-2)^2 + z^2 = 4 \quad , \quad x \leq 0$$

$$\Rightarrow \quad (y-2)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 2$$

y reemplazando en la ecuación de la esfera

$$x^2 + z^2 = 4, \quad x \leq 0$$

(El bosquejo en el enunciado del control no corresponde a esta curva).



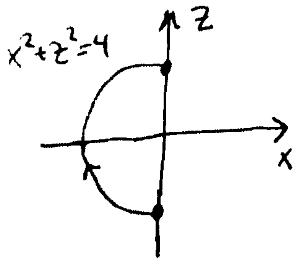
$$P_1 = (0, 2, -2)$$
$$P_2 = (0, 2, 2)$$

$$\int_C \vec{F}_1 \cdot d\vec{r} = u(0,2,-2) - u(0,2,2)$$

donde $u(x,y,z) = -x\,y^2 z^3$. Entonces

$$\int_C \vec{F}_1 \cdot d\vec{r} = 0.$$

La proyección de C sobre el plano x, z se ve



Podemos parametrizar C en coordenadas polares

$$x = 2\cos\theta \quad , \quad z = 2\,\text{sen}\,\theta \qquad \text{con} \quad \theta \in [\tfrac{\pi}{2}, 3\tfrac{\pi}{2}]$$

$$y = 2$$

Notar que esta parametrización da la orientación opuesta a la pedida, por lo que

$$\int_C \vec{F}_2 \cdot d\vec{r} = \int_C y\,dz = 2\int_C dz = -2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} 2\cos\theta\,d\theta$$

$$= -4\,(\,\text{sen}\,\theta)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} = -4(-1-1) = 8$$

Luego $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = 8$

Puntajes

2 a) → Conocer definición de rotor 0,5

→ Cálculo 1,0 (dar puntaje parcial de 0,3 o 0,7 por errores graves o pequeños)

→ descomponer $\vec{F}$ 0,5

(aquí basta con que se de una descomposición correcta; se entiende que está motivada por el cálculo del rotor. En particular no es necesario calcular el rotor de $\vec{F}_1$).

b) Ecuaciones $\frac{\partial u}{\partial x} = \ldots$

$\frac{\partial u}{\partial y} = \ldots$

$\frac{\partial u}{\partial z} = \ldots$

0,5 por cada una

0,5 conclusión.

Si se resuelve $\nabla u = \vec{F}$ (en lugar de $-\nabla u = \vec{F}$) considerar correcto.

c) → encontrar punto inicial y final de C 0,5

→ calcular $\int_C \vec{F}_1 \cdot d\vec{r}$ 0,5 (la idea es usar el potencial, pero también asignar puntaje por cálculo directo, parametrizando C).

→ parametrización de C $x(\theta), y(\theta), z(\theta)$, $\theta \in (-\theta_0, \theta_0)$

0,5

(otras parametrizaciones son posibles)

→ cálculo de $\int_C F_2 \cdot d\vec{r}$ 0,5

Pauta Control 1 – Cálculo Avanzado y Aplicaciones 2012/1

3)

a) Verifiquemos que

$$rot(rot(\vec{F})) = \nabla(div(\vec{F})) - \Delta \vec{F}.$$

$$\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$$

$$rot(\vec{F}) = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = \hat{\imath}\left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}\right) - \hat{\jmath}\left(\frac{\partial F_3}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial z}\right) + \hat{k}\left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)$$

$$rot(rot(\vec{F})) = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} & \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \end{vmatrix}$$

$$= \hat{\imath}\left(\frac{\partial^2 F_2}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 F_1}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 F_1}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 F_3}{\partial z \partial x}\right)$$

$$- \hat{\jmath}\left(\frac{\partial^2 F_2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 F_1}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 F_3}{\partial z \partial y} + \frac{\partial^2 F_2}{\partial z^2}\right)$$

$$+ \hat{k}\left(\frac{\partial^2 F_1}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 F_3}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 F_3}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F_2}{\partial y \partial z}\right)$$

Pero

$$\nabla(\operatorname{div} F) = \nabla\left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}\right)$$

$$= \hat{\imath}\left(\frac{\partial^2 F_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F_2}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 F_3}{\partial x \partial z}\right)$$
$$+ \hat{\jmath}\left(\frac{\partial^2 F_1}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 F_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F_3}{\partial y \partial z}\right)$$
$$+ \hat{k}\left(\frac{\partial^2 F_1}{\partial z \partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial z \partial y} + \frac{\partial^2 F_3}{\partial z^2}\right)$$

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot}(\vec{F})) = \nabla(\operatorname{div} \vec{F}) - \hat{\imath}\,\Delta F_1 - \hat{\jmath}\,\Delta F_2 - \hat{k}\,\Delta F_3 .$$

b) Aplicando el teorema de Stokes

$$\iint_S \operatorname{rot}(\operatorname{rot}(\vec{F})) \cdot d\vec{S} = \oint_C \operatorname{rot}(\vec{F}) \cdot d\vec{r}$$

y usando la parte a)

$$\oint_C \operatorname{rot}(\vec{F}) \cdot d\vec{r} = \iint_S \nabla(\operatorname{div} \vec{F}) \cdot d\vec{S} - \iint_S \Delta \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

$$\Rightarrow \iint_S \nabla(\operatorname{div} \vec{F}) \cdot d\vec{S} = \oint_C \operatorname{rot}(\vec{F}) \cdot d\vec{r} + \iint_S \Delta \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

c) Aplicando el teorema de Gauss

$$\iiint_D \Delta(\operatorname{div}(\vec{F}))\, dV = \iiint_D \operatorname{div}(\nabla(\operatorname{div}(\vec{F})))\, dV$$

$$= \iint_S \nabla(\operatorname{div}\vec{F}) \cdot d\vec{S} + \iint_T \nabla(\operatorname{div}\vec{F}) \cdot d\vec{S}$$

d) Por c)

$$\iiint_D \Delta(\operatorname{div}(\vec{F}))\, dV = \iint_S \nabla(\operatorname{div}\vec{F}) \cdot d\vec{S} + \iint_T \nabla(\operatorname{div}\vec{F}) \cdot d\vec{S}$$

y usando b)

$$\iiint_D \Delta(\operatorname{div}(\vec{F}))\, dV = \oint_C \operatorname{rot}(\vec{F}) \cdot d\vec{r} + \iint_S \Delta\vec{F} \cdot d\vec{S} + \iint_T \nabla(\operatorname{div}(\vec{F}))\cdot d\vec{S}$$

Puntajes

3 a) 1,5

b) aplicar teo de Stokes 0,8

conclusión 0,7

c) teorema de Gauss 0,8

conclusión 0,7

d) 1,5