Control 1 - Cálculo Avanzado y Aplicaciones
Escuela de Ingeniería, Universidad de Chile
Lunes 24 de Septiembre, 2012

Profesores: Carlos Conca - Raúl Gormaz
Auxiliares: Hugo Carrillo - Matías Godoy Campbell

Pregunta 1.

(a) Sean $\vec{F}$ y $\vec{G}$ dos campos vectoriales dados por $\vec{F}(x,y,z) = (xz-y)\,\hat{\imath} + (x^2y+z^3)\,\hat{\jmath} + (3xz^2-xy)\,\hat{k}$ y $\vec{G}(x,y,z) = 2xe^{-y}\,\hat{\imath} + (\cos(z) - x^2e^{-y})\,\hat{\jmath} - y\sin(z)\,\hat{k}$. Sea Γ la curva cerrada, correspondiente al rectángulo recorrido según el orden de los vértices $ABCD$ con $A=(0,0,0)$, $B=(0,0,1)$, $C=(2,0,1)$ y $D=(2,0,0)$.

(i) Demuestre que $\vec{F}$ no es conservativo, y determine el valor de $\displaystyle\oint_\Gamma \vec{F}\cdot d\vec{r}$

(ii) Demuestre que $\vec{G}$ es conservativo encontrando un potencial escalar ϕ tal que $\nabla\phi = \vec{G}$ y determine el valor de $\displaystyle\oint_\Gamma \vec{G}\cdot d\vec{r}$

(b) Considere el campo $\vec{F} = \dfrac{1}{x^2+y^2}\left[(x - y\sqrt{x^2+y^2}\arctan(z^2))\hat{\imath} + (y + x\sqrt{x^2+y^2}\arctan(z^2))\hat{\jmath} + z(x^2+y^2)\hat{k}\right]$

(i) Escriba $\vec{F}$ en coordenadas cilíndricas.
<u>Indicación</u>: Recuerde que $\hat{\rho} = \cos(\theta)\hat{\imath} + \sin(\theta)\hat{\jmath}$ y que $\hat{\theta} = -\sin(\theta)\hat{\imath} + \cos(\theta)\hat{\jmath}$

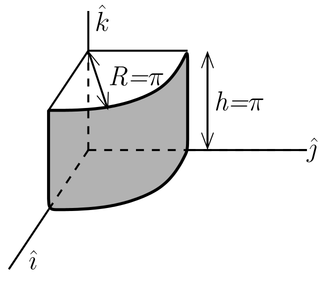
(ii) Calcule $div(\vec{F})$.

(iii) Calcule el flujo de $\vec{F}$ a través de la superficie de cualquier esfera de radio $R>0$, orientada según la normal **interior** a esta, que no intersecte al eje OZ.

Pregunta 2. Use apropiadamente el teorema de la divergencia para calcular el flujo del campo vectorial

$$\vec{F}(x,y,z) = (e^z\sin(y) + xy^2z)\hat{\imath} + (e^x\cos(z) + x^2yz)\hat{\jmath} + (x^2e^y)\hat{k}$$

sobre el **manto** (parte sombreada) del cuarto de cilíndro de radio y altura π de la figura, con la normal orientada hacia el exterior.



Pregunta 3. Considere el siguiente campo vectorial

$$\vec{F}(x,y,z) = (3x^2y - 3z + e^x\sin(z))\hat{\imath} + x^2\hat{\jmath} + (e^x\cos(z) - 3x)\hat{k}$$

(a) Calcule $rot(\vec{F})$.

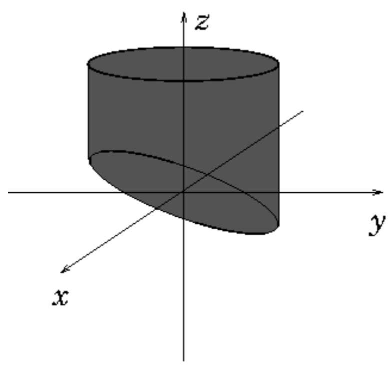
(b) Considere la curva Γ parametrizada por:

$$\Gamma: \quad \vec{\sigma}(t) = (\cos(t), \sin(t), \cos(t)) \quad t\in[0,2\pi]$$

Calcule:

$$\oint_\Gamma \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

<u>Indicación</u>: Note que Γ es el borde inferior de la porción de cilíndro de la figura siguiente:


z
y
x

Pauta Control 1 - Cálculo Avanzado y Aplicaciones
Escuela de Ingeniería, Universidad de Chile
Jueves 13 de Septiembre, 2012

Profesores: Carlos Conca - Raúl Gormaz
Auxiliares: Hugo Carrillo - Matías Godoy Campbell

Pregunta 1.

(a) Sean $\vec{F}$ y $\vec{G}$ dos campos vectoriales dados por $\vec{F}(x,y,z) = (xz-y)\,\hat{\imath} + (x^2y+z^3)\,\hat{\jmath} + (3xz^2-xy)\,\hat{k}$ y $\vec{G}(x,y,z) = 2xe^{-y}\,\hat{\imath} + (\cos(z) - x^2e^{-y})\,\hat{\jmath} - y\sin(z)\,\hat{k}$. Sea Γ la curva cerrada, correspondiente al rectángulo recorrido según el orden de los vértices $ABCD$ con $A=(0,0,0)$, $B=(0,0,1)$, $C=(2,0,1)$ y $D=(2,0,0)$.

- **(i)** Demuestre que $\vec{F}$ no es conservativo, y determine el valor de $\oint_\Gamma \vec{F}\cdot\vec{dr}$
- **(ii)** Demuestre que $\vec{G}$ es conservativo encontrando un potencial escalar ϕ tal que $\nabla\phi = \vec{G}$ y determine el valor de $\oint_\Gamma \vec{G}\cdot\vec{dr}$

(b) Considere el campo $\vec{F} = \frac{1}{x^2+y^2}\left[(x - y\sqrt{x^2+y^2}\arctan(z^2))\hat{\imath} + (y + x\sqrt{x^2+y^2}\arctan(z^2))\hat{\jmath} + z(x^2+y^2)\hat{k}\right]$

- **(i)** Escriba $\vec{F}$ en coordenadas cilíndricas.
  Indicación: Recuerde que $\hat{\rho} = \cos(\theta)\hat{\imath} + \sin(\theta)\hat{\jmath}$ y que $\hat{\theta} = -\sin(\theta)\hat{\imath} + \cos(\theta)\hat{\jmath}$
- **(ii)** Calcule $div(\vec{F})$.
- **(iii)** Calcule el flujo de $\vec{F}$ a través de la superficie de cualquier esfera de radio $R>0$, orientada según la normal **interior** a esta, que no intersecte al eje OZ.

Solución:

(a) Notemos que para verificar que $\vec{F}$ no es conservativo basta probar que $rot(\vec{F}) = 0$, veamos que esto efectivamente es así:

$$\begin{aligned} rot(\vec{F}) &= \hat{\imath}(\partial_y(3xz^2-xy) - \partial_z(x^2y+z^3)) + \hat{\jmath}(\partial_x(3xz^2-xy) - \partial_z(xz-y)) + \hat{k}(\partial_x(x^2y+z^3) - \partial_y(xz-y)) \\ &= \hat{\imath}(-x-3z^2) + \hat{\jmath}(-x+3z^2-y) + \hat{k}(2xy+1) \neq \vec{0} \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\vec{F}$ no es conservativo.

Para el cálculo de la integral de línea, hay dos opciones: Hacerla por definición o utilizar el Teorema de Stokes (esto es posible pues la integral es en un camino cerrado), aquí detallaremos el desarrollo usando el Teorema de Stokes:
Por un lado es claro que la curva es regular a trozos (son segmentos de rectas), además el campo es de clase $\mathcal{C}^\infty$, notemos que la superficie S tal que $\partial S = \Gamma$ está dada por:

$$S = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid 0\le x\le 2,\ 0\le z\le 1,\ y=0\}$$

que es una superficie regular, una parametrización de esta superficie es:

$$\sigma(x,z) = (x,0,z) \quad x\in[0,2],\ z\in[0,1]$$

de donde se deduce que $dA = dxdz$ y $\hat{n} = (0,1,0)$ (dada la orientación de Γ). Por lo tanto:

$$\begin{aligned} \oint_\Gamma \vec{F}\cdot d\vec{r} &= \iint_S rot\vec{F}\cdot\hat{n}dA = \iint_S \vec{F}\cdot(0,1,0)dA \\ &= \int_0^1\int_0^2 (-x+3z^2-0)dxdz = \int_0^1\int_0^2(-x+3z^2)dxdz = 0 \end{aligned}$$

Hay que notar que esto no contradice el hecho de que $\vec{F}$ no sea conservativo, pues este es el resultado en una curva cerrada particular, el resultado conocido es que un campo es conservativo si integra 0 en **cualquier** curva cerrada.

Para ver que $\vec{G}$ es conservativo basta determinar explícitamente el campo escalar ϕ tal que $\vec{G} = \nabla\phi$. Notemos que se tiene:

$$\partial_x\phi = 2xe^{-y} \Rightarrow \phi(x,y,z) = h_1(y,z) + \int 2xe^{-y}dx = h_1(y,z) + x^2e^{-y}$$

$$\partial_y\phi = \cos(z) - x^2e^{-y} \Rightarrow \phi(x,y,z) = h_2(x,z) + \int \cos(z)dy - \int x^2e^{-y}dy = h_2(x,z) + y\cos(z) + x^2e^{-y}$$

$$\partial_z\phi = -y\sin(z) \Rightarrow \phi(x,y,z) = h_3(x,y) - \int y\sin(z)dz = h_3(x,y) + y\cos(z)$$

de estos cálculos se deduce que:

$$\phi(x,y,z) = x^2e^{-y} + y\cos(z) + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

Se verifica directamente que $\nabla\phi = \vec{G}$.

Finalmente, como $\vec{G}$ es conservativo se tiene que:

$$\oint_\Gamma \vec{G}\cdot d\vec{r} = 0$$

(b) Tenemos: $\vec{F} = \dfrac{1}{x^2+y^2}\Big[(x - y\sqrt{x^2+y^2}\arctan(z^2))\hat{\imath} + (y + x\sqrt{x^2+y^2}\arctan(z^2))\hat{\jmath} + z(x^2+y^2)\hat{k}\Big]$, luego, en cilíndricas se tiene $x = \rho\cos\theta,\ y = \rho\sin\theta,\ z = z$, por lo tanto:

$$\begin{aligned}
\vec{F} &= \frac{1}{\rho^2}[(\rho\cos\theta - \rho\sin\theta\cdot\rho\cdot\arctan z^2, \rho\sin\theta + \rho\cos\theta\cdot\rho\cdot\arctan z^2, z\rho^2)] \\
&= \frac{1}{\rho^2}(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, 0) + \frac{1}{\rho^2}(-\rho^2\sin\theta\cdot\arctan z^2, \rho^2\cos\theta\cdot\arctan z^2, 0) + \frac{1}{\rho^2}(0,0,z\rho^2) \\
&= \frac{1}{\rho^2}\cdot\rho\underbrace{(\cos\theta,\sin\theta,0)}_{\hat{\rho}} + \frac{1}{\rho^2}\cdot\rho^2\arctan z^2\underbrace{(-\sin\theta,\cos\theta,0)}_{\hat{\theta}} + \frac{1}{\rho^2}z\rho^2\underbrace{(0,0,1)}_{\hat{k}} \\
&= \frac{1}{\rho}\hat{\rho} + \arctan z^2\hat{\theta} + z\hat{k}
\end{aligned}$$

Notar que esta expresión está bien definida (y de hecho es de clase $\mathcal{C}^\infty$ en $\mathbb{R}^3 \setminus$ eje Z.

Calculemos ahora la divergencia de $\vec{F}$:
Recordemos que en coordenadas cilíndricas:

$$div(\vec{F}) = \frac{1}{\rho}[\partial_\rho(F_\rho\cdot\rho) + \partial_\theta(F_\theta) + \partial_z(F_z\cdot\rho)]$$

En nuestro caso: $F_\rho = \frac{1}{\rho},\ F_\theta = \arctan z^2,\ F_z = z$. Por lo tanto:

$$\begin{aligned}
div(\vec{F}) &= \frac{1}{\rho}[\partial_\rho(\frac{1}{\rho}\cdot\rho) + \partial_\theta(\arctan z^2) + \partial_z(z\cdot\rho)] \\
&= \frac{1}{\rho}[0 + 0 + \rho] = 1
\end{aligned}$$

Por lo tanto se tiene que, en $\mathbb{R}^3 \setminus$ eje Z:

$$div(\vec{F}) = 1$$

Finalmente nos piden calcular:

$$\iint_{S(\vec{x}_0,R)} \vec{F}\cdot\hat{n}dA$$

donde $S(\vec{x}_0, R)$ es la esfera de centro $\vec{x}_0$ y radio $R > 0$, tal que **no** intersecta al eje OZ, orientado según la normal **interior**.
Notemos que como la esfera no intersecta al eje OZ, entonces $\vec{F}$ es de clase $\mathcal{C}^\infty$ en un volúmen que contiene a esta superficie (por ejemplo la bola abierta $B(x_0, R+\epsilon)$ con ϵ suficientemente pequeño tal que no cruce

al eje OZ.). Luego, es posible utilizar el Teorema de la divergencia (con cuidado de notar que el cálculo de este teorema nos dará el flujo orientado con normal exterior) para calcular este flujo, por el Teorema:

$$\iint_{S(\vec{x}_0,R)} \vec{F}\cdot\hat{n}_{ext}dA = \iiint_{B(\vec{x}_0,R)} div\vec{F}dV = \iiint_{B(\vec{x}_0,R)} 1dV = \frac{4}{3}\pi R^3$$

Dado que este cálculo es con la normal exterior, entonces se concluye que:

$$\iint_{S(\vec{x}_0,R)} \vec{F}\cdot\hat{n}_{int}dA = -\iint_{S(\vec{x}_0,R)} \vec{F}\cdot\hat{n}_{ext}dA = -\frac{4}{3}\pi R^3$$

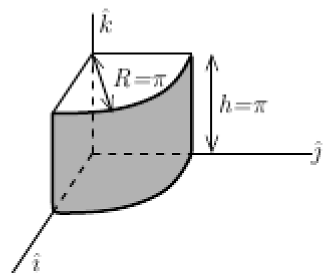
Pauta Control 1 - Cálculo Avanzado y Aplicaciones
Escuela de Ingeniería, Universidad de Chile
Jueves 13 de Septiembre, 2012

Profesores: Carlos Conca - Raúl Gormaz
Auxiliares: Hugo Carrillo - Matías Godoy Campbell

Pregunta 2. Use apropiadamente el teorema de la divergencia para calcular el flujo del campo vectorial

$$\vec{F}(x,y,z) = (e^z \sin(y) + xy^2 z)\hat{\imath} + (e^x \cos(z) + x^2 yz)\hat{\jmath} + (x^2 e^y)\hat{k}$$

sobre el **manto** (parte sombreada) del cuarto de cilíndro de radio y altura π de la figura, con la normal orientada hacia el exterior.



Solución:
Queremos calcular $\Phi = \iint_M \vec{F} \cdot \hat{n} dA$, con $\hat{n}$ la normal exterior respecto al cilíndro asociado a este manto M. Para usar el Teorema de la divergencia es necesario cerrar la superficie (de modo que la superficie sobre la cual aplicamos el teorema sea el borde geométrico de un abierto Ω, por ejemplo: $\Omega = \frac{1}{4}$ cilindro.)
Así pues, en el caso que $\Omega = \frac{1}{4}$ cilindro se tiene que: $\partial\Omega = M \cup T_1 \cup T_2 \cup T_3 \cup T_4$. Donde T_1 es la tapa ubicada en el plano XZ, T_2 es la tapa ubicada en el plano YZ, T_3 es la tapa ubicada en el plano XY y T_4 es la tapa paralela al eje XY, ubicada a altura $z = \pi$.
Notemos que $\vec{F}$ es una función de clase $\mathcal{C}^\infty$ en $\mathbb{R}^3$ y las superficies involucradas son todas regulares, luego $\partial\Omega$ es regular a trozos. Por lo tanto, en virtud del Teorema de la divergencia:

$$\iint_{M \cup T_i} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_\Omega div\vec{F} \cdot dV$$

Se tiene que:

$$div\vec{F} = \partial_x(e^z \sin(y) + xy^2 z) + \partial_y(e^x \cos(z) + x^2 yz) + \partial_z(x^2 e^y) = y^2 z + x^2 z = (x^2 + y^2)z$$

Luego, notando que $\Omega = \frac{1}{4}$ cilindro $= \{(\rho, \theta, z) : \ \rho \in [0,\pi], z \in [0,\pi], \theta \in [0, \pi/2]\}$:

$$\iiint_\Omega div\vec{F} \cdot dV = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^\pi \int_0^\pi \rho^2 z \cdot \rho d\rho dz d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^\pi \int_0^\pi \rho^3 z d\rho dz d\theta = \frac{\pi^7}{16}$$

Por otro lado:

$$\iint_{M \cup U_i} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \underbrace{\iint_M \vec{F} \cdot d\vec{S}}_{\Phi} + \sum_{i=1}^{4} \iint_{T_i} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \frac{\pi^7}{16}$$

Así:

$$\Phi = \frac{\pi^7}{16} - \left(\sum_{i=1}^{4} \iint_{T_i} \vec{F} \cdot d\vec{S} \right)$$

Notemos que T_3 es la misma superficie que T_4, excepto por su altura, T_3 está en $z = 0$ y T_4 en $z = \pi$, por otro lado:

$$\vec{F} \cdot \hat{n} = -x^2 e^y \text{ en } T_3 \text{ y } \vec{F} \cdot \hat{n} = x^2 e^y \text{ en } T_4$$

esto debido a que se debe usar la normal exterior en las tapas, en T_3 es $-\hat{k}$ y en T_4 es $\hat{k}$. Notemos que integramos functiones que NO dependen de z en superficies que solo difieren en su parametrización por el factor z. Por lo tanto, se tiene que:

$$\iint_{T_3} \vec{F} \cdot d\vec{S} + \iint_{T_4} \vec{F} \cdot d\vec{S} = 0$$

y por lo tanto:

$$\Phi = \frac{\pi^7}{16} - \iint_{T_1} \vec{F} \cdot d\vec{S} - \iint_{T_2} \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

Así que basta calcular explícitamente solo estos dos flujos.
Veamos el primero:
Debemos parametrizar la tapa T_1 que es un cuadrado de lado π en el plano XZ (ver la figura), la parametrización es:

$$\sigma(x, z) = (x, 0, z), \quad x \in [0, \pi], \; z \in [0, \pi]$$

y naturalmente la normal exterior en esta cara es:

$$\hat{n} = (0, -1, 0)$$

Luego:

$$\iint_{T_1} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} (0, e^x \cos(z) + 0, x^2 e^0) \cdot (0, -1, 0) dxdz = \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} -e^x \cos(z) dxdz = -(e^{\pi} - 1) \int_0^{\pi} \cos(z) dz = 0$$

Por lo tanto el flujo de $\vec{F}$ a través de T_1 es 0.
Calculemos finalmente el flujo de $\vec{F}$ a través de T_2:
Ahora debemos parametrizar la tapa T_2 que es un cuadrado de lado π en el plano YZ (ver la figura), la parametrización es:

$$\sigma(y, z) = (0, y, z), \quad y \in [0, \pi], \; z \in [0, \pi]$$

y en este caso, la normal exterior es:

$$\hat{n} = (-1, 0, 0)$$

Luego:

$$\iint_{T_2} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} (e^z \sin(y), \cos(z), 0) \cdot (-1, 0, 0) dydz = \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} -e^z \sin(y) dydz = -2(e^{\pi} - 1)$$

Por lo tanto el flujo de $\vec{F}$ a través de T_1 es $-2(e^{\pi} - 1)$.
Conclusión final:

$$\Phi = \frac{\pi^7}{16} - 0 - (-2(e^{\pi} - 1)) = \frac{\pi^7}{16} + 2(e^{\pi} - 1)$$

Pauta Control 1 - Cálculo Avanzado y Aplicaciones
Escuela de Ingeniería, Universidad de Chile
Jueves 13 de Septiembre, 2012

Profesores: Carlos Conca - Raúl Gormaz
Auxiliares: Hugo Carrillo - Matías Godoy Campbell

Pregunta 3. Considere el siguiente campo vectorial

$$\vec{F}(x,y,z) = (3x^2y - 3z + e^x\sin(z))\hat{\imath} + x^2\hat{\jmath} + (e^x\cos(z) - 3x)\hat{k}$$

(a) Calcule $rot(\vec{F})$.

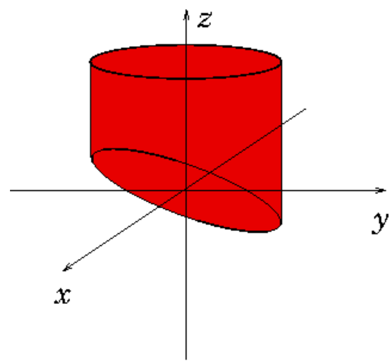
(b) Considere la curva Γ parametrizada por:

$$\Gamma : \quad \vec{\sigma}(t) = (\cos(t), \sin(t), \cos(t)) \quad t \in [0, 2\pi]$$

Calcule:

$$\oint_\Gamma \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Indicación: Note que Γ es el borde inferior de la porción de cilíndro de la figura siguiente:



Solución:

(a) Para esta parte basta aplicar directamente la fórmula del rotor en cartesianas:

$$\begin{aligned}
rot(\vec{F}) &= \det\begin{bmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ (3x^2y - 3z + e^x\sin(z)) & x^2 & e^x\cos(z) - 3x \end{bmatrix} \\
&= \hat{\imath}(\partial_y(e^x\cos(z) - 3x) - \partial_z(x^2)) + \hat{\jmath}(\partial_z(3x^2y - 3z + e^x\sin(z)) - \partial_x(e^x\cos(z) - 3x)) \\
&\quad + \hat{k}(\partial_x(x^2) - \partial_y(3x^2y - 3z + e^x\sin(z))) \\
&= \hat{\imath}(0-0) + \hat{\jmath}(-3 + e^x\cos(z) - e^x\cos(z) + 3) + \hat{k}(2x - 3x^2) \\
&= (0, 0, 2x - 3x^2)
\end{aligned}$$

(b) Para el cálculo de la integral de trabajo aplicaremos el Teorema de Stokes, para ello notemos algunas cosas básicas:

- El campo $\vec{F}$ es de clase C^∞ en todo el espacio, pues es composición de funciones C^∞, por lo tanto, podemos aplicar el Teorema en **cualquier** superficie regular a trozos cuyo borde geométrico sea Γ.
- La superficie dada en la indicación básicamente se puede ver como la sección superior de un cilíndro de altura $2z_0$ (con eje longitudinal coincidente al eje Z y $z \in [-z_0, z_0]$) al ser cortado en 'diagonal', donde este corte está parametrizado por Γ.
- Llamaremos S a esta superficie, notemos que satisface $\partial S = \Gamma$ siempre y cuando $z_0 > 1$ (es necesario pues en caso contrario el cilindro no queda bien definido). Además, al ser parte de un cilíndro, se tiene que S es una superficie regular a trozos, por lo tanto se satisfacen todas las hipótesis del Teorema de Stokes.

- Notar finalmente que las integrales de flujo involucradas, dada la orientación de Γ, deben calcularse con la normal exterior al cilindro.

Por lo tanto, por el Teorema de Stokes se tiene que:

$$\oint_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S rot(\vec{F}) \cdot \hat{n} dA$$

Escribamos $S = S_1 \cup S_2$ donde S_1: Manto del cilindro y S_2: Tapa a altura $z_0 > 1$. Luego:

$$\oint_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_{S_1} rot(\vec{F}) \cdot \hat{n} dA + \iint_{S_2} rot(\vec{F}) \cdot \hat{n} dA$$

del cálculo de la parte anterior se probó que el rotor solo posee componentes no nulas en $\hat{k}$ por lo tanto:

$$rot(\vec{F}) \cdot \hat{n} = 0 \quad \text{en } S_1$$

pues en S_1 se tiene que $\hat{n} = \hat{\rho}$ que es ortogonal a $\hat{k}$, por lo tanto:

$$\iint_{S_1} rot(\vec{F}) \cdot \hat{n} dA = 0$$

luego:

$$\oint_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_{S_2} rot(\vec{F}) \cdot \hat{n} dA$$

esta última integral se debe calcular por definición, primero notemos que:

$$S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 \leq 1, \ z = z_0\}$$

esto se puede parametrizar en coordenadas cilíndricas vía:

$$\vec{\sigma}(\rho, \theta) = \rho\hat{\rho} + z_0\hat{k}, \quad \rho \in [0, 1], \ \theta \in [0, 2\pi]$$

de donde se deduce que:

$$\partial_\rho \vec{\sigma} = \partial_\rho(\rho\hat{\rho} + z_0\hat{k}) = \hat{\rho}$$
$$\partial_\theta \vec{\sigma} = \partial_\theta(\rho\hat{\rho} + z_0\hat{k}) = \rho\hat{\theta}$$

pues en S_1 se tiene que $\hat{n} = \hat{\rho}$, y por lo tanto:

$$\frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial \rho} \times \frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial \theta} = \hat{\rho} \times \rho\hat{\theta} = \rho\hat{k}$$

por lo tanto $\hat{n} = \hat{k}$ en S_2, lo cual es natural, pues S_2 es la tapa superior del cilindro, y la orientación dada por Γ implica el uso de la normal exterior para el cálculo del flujo.

Por lo tanto:

$$\begin{aligned}
\iint_{S_2} rot(\vec{F}) \cdot \hat{n} dA &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} (2x - 3x^2)\hat{k} \cdot \hat{k} \rho d\theta d\rho \\
&= \int_0^1 \int_0^{2\pi} (2\rho\cos(\theta) - 3\rho^2\cos^2(\theta))\rho d\rho d\theta \\
&= \int_0^1 \int_0^{2\pi} 2\rho^2 \cos(\theta) d\rho d\theta - \int_0^1 \int_0^{2\pi} 3\rho^3 \cos^2(\theta) d\rho d\theta \\
&= 0 - 3\int_0^1 \rho^3 d\rho \int_0^{2\pi} \cos^2(\theta) d\theta \\
&= -3\int_0^1 \rho^3 d\rho \cdot \pi \\
&= -\frac{3\pi}{4}\rho^4|_0^1 = -\frac{3\pi}{4}
\end{aligned}$$

La primera de las integrales es cero pues integramos coseno en un período. Se concluye finalmente que:

$$\oint_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\frac{3\pi}{4}$$