MATEMATICAS APLICADAS - MA26B
PAUTA CONTROL 1, OTOÑO 2007

PAUTA CONTROL 1

P1. Una partícula se mueve sobre el manto del cilindro $x^2 + y^2 = 1$, de forma tal que la altura $z = z(\theta)$ satisface la ecuación diferencial:

$$\frac{d^2 z}{d\theta^2} = z$$

con condiciones iniciales $z(0) = 1$; $\frac{dz}{d\theta}(0) = 0$, donde (ρ, θ, z) representan las coordenadas cilíndricas del punto.

(a) (1 punto) Encuentre una parametrización de la trayectoria Γ descrita por la partícula (use el ángulo θ como parámetro para describir la curva).
(b) (1.5 puntos) Calcule la longitud de Γ si $\theta \in [0, 2\pi]$.
(c) (2 puntos) Calcule los vectores tangentes, normal y binormal, así como la curvatura y torsión de Γ.
(d) (1.5 puntos) Calcule el trabajo efectuado por el campo $F(x,y,z) = (e^{y+2z}, xe^{y+2z}, 2xe^{y+2z})$, a lo largo de una vuelta de la curva Γ.

Solución.

(a) Resolviendo la EDO obtenemos $z(\theta) = \cosh(\theta)$. Así, usando coordenadas polares (ρ, θ, z) y notando que $\rho = 1$, una parametrización de Γ sería:

$$\vec{\sigma}(\theta) = (\cos(\theta), \sin(\theta), \cosh(\theta)) = \hat{\rho} + \cosh(\theta)\hat{k} \quad \theta \in [0, 2\pi]$$

(b) Notemos que

$$\frac{d\vec{\sigma}}{d\theta} = \hat{\theta} + \sinh(\theta)\hat{k} \quad \Rightarrow \quad \|\frac{d\vec{\sigma}}{d\theta}\| = \cosh(\theta).$$

Luego, $L(\Gamma) = \int_0^{2\pi} \cosh(\theta) d\theta = \sinh(2\pi)$

(c) Se tiene que $\hat{T} = \frac{\frac{d\vec{\sigma}}{d\theta}}{\|\frac{d\vec{\sigma}}{d\theta}\|} = \frac{1}{\cosh(\theta)}(\hat{\theta} + \sinh(\theta)\hat{k})$. Luego,

$$\frac{d\hat{T}}{d\theta} = \frac{1}{\cosh^2(\theta)}(-\cosh(\theta)\hat{\rho} - \sinh(\theta)\hat{\theta} + \hat{k}) \quad \Rightarrow \quad \kappa = \frac{\|\frac{d\hat{T}}{d\theta}\|}{\|\frac{d\vec{\sigma}}{d\theta}\|} = \sqrt{2}$$

Entonces $\hat{N} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\hat{\rho} - \tanh(\theta)\hat{\theta} + \frac{1}{\cosh(\theta)}\hat{k})$

$$\Rightarrow \hat{B} = \hat{T} \times \hat{N} = \frac{1}{\sqrt{2}\cosh(\theta)}(\cosh(\theta)\hat{\rho} - \sinh(\theta)\hat{\theta} + \hat{k}) = \hat{N} + \sqrt{2}\hat{\rho}.$$

Tenemos entonces que

$$\frac{d\hat{B}}{d\theta} = \frac{d\hat{N}}{d\theta} + \sqrt{2}\hat{\theta} = \frac{1}{\cosh(\theta)}(\tau\hat{B} - \kappa\hat{T}) + \sqrt{2}\hat{\theta}$$

$$\Rightarrow \tau = \left(-\frac{\frac{d\hat{B}}{d\theta}}{\|\frac{d\vec{\sigma}}{d\theta}\|} \right) \cdot \hat{N} = \frac{\sinh(\theta)}{\cosh^2(\theta)}$$

(d) Notamos primero que el campo proviene de el potencial $V(x,y,z) = -xe^{y+2z}$ pues $-\nabla V = \vec{F}$. Notemos también que al evaluar V en la parametrización, queda $V(\theta) = \cos(\theta)e^{\sin(\theta)+2\cosh(\theta)}$. Así,

$$\int_\Gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = V(0) - V(2\pi) = e^2 - e^{2\cosh(2\pi)}$$

P2.

(a) (3 puntos) Sea S la superficie definida implícitamente por $\Phi(\rho,\theta,z)=0$, para (ρ,θ) en la región $D=[0,1]\times[0,2\pi]$ de $\mathbb{R}^2$. Observe que una parametización regular de S es:

$$\vec{\sigma}: D \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(\rho,\theta)\longmapsto(\rho,\theta,z(\rho,\theta))$$

donde $z=z(\rho,\theta)$ queda definida implícitamente por la ecuación $\Phi(\rho,\theta,z)=0$.
La idea del problema es probar la fórmula:

$$\int\int_S \left|\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right| dA = \int_0^1\int_0^{2\pi}\sqrt{\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\rho}\right)^2+\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right)^2+\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)^2}\,d\theta\,d\rho$$

Para ello, prosiga de la siguiente manera:

(i) (1 punto) Note que si define $\varphi\colon D\longmapsto\mathbb{R}$ por $\varphi(\rho,\theta)=\Phi(\rho,\theta,z(\rho,\theta))$, entonces $\varphi\equiv 0$, al igual que sus derivadas.

(ii) (2 puntos) Calcule dA usando la parametrización $\vec{\sigma}$. Concluya.

(b) (3 puntos) Sea $S\subset\mathbb{R}^3$ la superficie regular definida por las ecuaciones:

$$x^2+y^2-z^2=0,\quad x^2+y^2-2ay\le 0,\quad (a>0),\quad x\ge 0,\quad z\ge 0$$

Bosqueje S, parametrícela y calcule su área. Escoja una orientación para S y calcule el flujo del campo vectorial en coordenadas cilíndricas: $\vec{F}=\rho\hat{\rho}+\cos^2\theta\cdot e^{\cos^3\theta}\hat{\theta}$.

Solución.

(a) (i) Notamos que Φ se anula en D. Luego, como $g(x,y)=\Phi(x,y,z(x,y))$, y g está definida sobre D, se tiene directamente que g es nula. Por ser la función nula en D, sus derivadas son también nulas.

(ii) Tenemos que $dA=\|\frac{\partial\vec{\sigma}}{\partial\rho}\times\frac{\partial\vec{\sigma}}{\partial\theta}\|$. Así,

$$\frac{\partial\vec{\sigma}}{\partial\rho}=(1,0,\frac{\partial z}{\partial\rho}),\quad \frac{\partial\vec{\sigma}}{\partial\theta}=(0,1,\frac{\partial z}{\partial\theta})\quad\Rightarrow\|\frac{\partial\vec{\sigma}}{\partial\rho}\times\frac{\partial\vec{\sigma}}{\partial\theta}\|=\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial\rho}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial\theta}\right)^2}$$

Luego,

$$\int\int_S\left|\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right|dA=\int_0^{2\pi}\int_0^1\left|\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right|\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial\rho}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial\theta}\right)^2}d\rho d\theta=$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^1\sqrt{\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\rho}\right)^2+\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right)^2+\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)^2}d\rho d\theta,$$

esto último por regla de la cadena.

(b) En polares, una parametrización viene dada por:

$$\vec{\sigma}(\rho,\theta)=\rho\hat{\rho}+\rho\hat{k}\quad\rho\in[0,2a\sin(\theta)],\theta\in[0,\frac{\pi}{2}]$$

Luego, $dA=\|\frac{\partial\vec{\sigma}}{\partial\rho}\times\frac{\partial\vec{\sigma}}{\partial\theta}\|=\sqrt{2}\rho$. De este modo,

$$Area(S)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2a\sin(\theta)}\sqrt{2}\rho d\rho d\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}\pi a^2.$$

Una normal viene dada por $\hat{n}=\frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{\rho}-\hat{k})$. Así, se tiene primero que $\vec{F}\cdot\hat{n}=\frac{1}{\sqrt{2}}\rho$, y entonces la integral de flujo queda:

$$\int\int_S\vec{F}\cdot\hat{n}dS=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2a\sin(\theta)}\frac{1}{\sqrt{2}}\rho\sqrt{2}\rho d\rho d\theta=$$

$$\frac{8a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3(\theta)d\theta=\frac{8a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(\theta)(1-\cos^2(\theta))d\theta=\frac{8a^3}{3}(1+\frac{1}{3}\cos^3(\theta)|_0^{\frac{\pi}{2}})=\frac{16a^3}{9}$$

P3. Sea S la esfera de radio R centrada en el origen, y sea $\vec{p} \in \mathbb{R}^3 \setminus S$ un punto que se encuentra dentro ($||\vec{p}|| < R$) o bien fuera de la esfera ($||\vec{p}|| > R$), pero, no sobre la esfera. Sin perdida de generalidad suponga que se rotan los ejes de tal manera que el punto $\vec{p}$ se ubica sobre el eje Z, o sea $\vec{p} = d\hat{k}$.

(a) (2 puntos) Demuestre que:

$$\int\int_S \frac{dA}{||\vec{r} - \vec{p}||} = \begin{cases} 4\pi R & \text{si } d < R \\ 4\pi R^2/d & \text{si } d > R \end{cases}$$

(b) (1 punto) Calcule $\nabla(\frac{1}{||\vec{r} - \vec{p}||})$

(c) (3 puntos) Suponga $\vec{p} = d\hat{k}$ con $0 \leq d < R$. Pruebe que:

$$\int\int_S \nabla(\frac{1}{||\vec{r} - \vec{p}||}) \cdot \hat{k} dA = 0$$

Indicación: Si $R > d$, entonces:

$$\int_0^\pi \frac{R\cos(x)\sin(x)dx}{(R^2 + d^2 - 2Rd\cos(x))} = \frac{2d}{(R^2 - d^2)R}$$

Solución.

(a) Primero, notemos que en esféricas, $\vec{r} = (R\sin(\phi)\cos(\theta), R\sin(\phi)\sin(\theta), R\cos(\phi))$, y $\vec{p} = d\hat{k}$, entonces tenemos que $\frac{1}{\|\vec{r}-\vec{p}\|} = \frac{1}{\sqrt{R^2+d^2-2Rd\cos(\theta)}}$. Así, recordando que $dA = R^2\sin(\phi)$, tendremos que

$$\int\int_S \frac{dA}{\|\vec{r} - \vec{p}\|} = \int_0^{2\pi}\int_0^\pi \frac{R^2\sin(\phi)}{\sqrt{R^2 + d^2 - 2Rd\cos(\phi)}} d\phi d\theta =$$
$$\frac{2\pi R}{d}\sqrt{R^2 + d^2 - 2Rd\cos(\phi)}|_0^\pi = \frac{2\pi R}{d}(R + d - |R - d|),$$

con lo que se obtiene el resultado deseado.

(b)

$$\nabla(\frac{1}{\|\vec{r} - \vec{p}\|}) = -\frac{1}{\|\vec{r} - \vec{p}\|^2}\nabla\|\vec{r} - \vec{p}\| = -\frac{1}{\|\vec{r} - \vec{p}\|^2}\frac{\vec{r} - \vec{p}}{\|\vec{r} - \vec{p}\|} = -\frac{\vec{r} - \vec{p}}{\|\vec{r} - \vec{p}\|^3}$$

(c) Tenemos de las partes anteriores,

$$\int\int_S \nabla(\frac{1}{\|\vec{r} - \vec{p}\|}) \cdot \hat{k} dS = \int_0^{2\pi}\int_0^\pi R^2\sin(\phi)\frac{(R\cos(\phi) - d)}{(R^2 + d^2 - 2Rd\cos(\phi))^{\frac{3}{2}}} d\phi d\theta =$$
$$2\pi R^2\left[\int_0^\pi \frac{R\cos(\phi)\sin(\phi)}{(R^2 + d^2 - 2Rd\cos(\phi))^{\frac{3}{2}}} d\phi - \int_0^\pi \frac{d\sin(\phi)}{(R^2 + d^2 - 2Rd\cos(\phi))^{\frac{3}{2}}} d\phi\right]$$

Usando ahora la indicación, e identificando en la integral de la parte (a), queda finalmente:

$$\int\int_S \nabla(\frac{1}{\|\vec{r} - \vec{p}\|}) \cdot \hat{k} dS = 2\pi R^2\left[\frac{2d}{(R^2 - d^2)R} - \frac{2d}{(R^2 - d^2)R}\right] = 0$$