Universidad de Chile
Facultad de Cs. Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática

MA2002 Cálculo Avanzado y Aplicaciones
Profesores:Michal Kowalczyk, Mauricio Soto
Auxiliares: Ignacio Bugueño, Leonel Huerta

Control 1

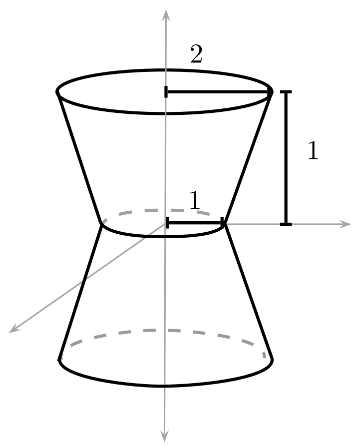
Jueves 23 de Abril de 2015

P1. Sea S la superficie de $\mathbb{R}^3$ definida por $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = (z + c(z))^2, z \in [-1, 1]\}$ donde:

$$c(z) = \begin{cases} 1 & \text{si } z \geq 0, \\ -1 & \text{si } z < 0. \end{cases}$$

(a) (1 pt.) Exprese la eccuación que define a S en coordenadas cilíndricas y esboce la superficie.

Coordenadas cilíndricas: $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$, $z = z$. Entonces



$$x^2 + y^2 = \rho^2 = (z + c(z))^2 \Longrightarrow \rho = |z + c(z)|.$$

Podemos distinguir dos casos:

- $z \in [0, 1]$: donde la ecuación queda $\rho^2 = (z+1)^2$ que es un cono desplazado en el eje z en -1.
- $z \in [-1, 0]$: donde la ecuación queda $\rho^2 = (z - 1)^2$ que es un cono desplazado en el eje z en 1.

(b) (1.5 pt.) Use coordenadas cilíndricas para encontrar una parametrización de la superficie y luego encuentre el campo de los vectores normales exteriores a esta superficie (el interior por definición es el conjunto acotado que contiene el origen). Encuentre la expresión de los vectores normales en las coordenadas cilíndricas.

La parametrización de la parte superior:

$$X_+(\rho, \theta) = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, \rho - 1), \quad \theta \in [0, 2\pi), \quad \rho \in [1, 2].$$

La parametrización de la parte inferior:

$$X_-(\rho, \theta) = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, -\rho + 1), \quad \theta \in [0, 2\pi), \quad \rho \in [1, 2]$$

(Encontrar la parametrización 0.75).

Vector normal exterior en la parte superior:

$$N = \frac{X_{+,\theta} \times X_{+,\rho}}{\|X_{+,\theta} \times X_{+,\rho}\|} = \frac{1}{2}(\cos\theta, \sin\theta, -1) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{\rho} - \hat{z}).$$

Vector normal exterior en la parte inferior:

$$N = \frac{X_{-,\theta} \times X_{-,\rho}}{\|X_{-,\theta} \times X_{-,\rho}\|} = \frac{1}{2}(\cos\theta, \sin\theta, 1) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{\rho} + \hat{z}).$$

(Encontrar el vector normal 0.75).

(c) Considere el campo vectorial $\vec{F}$ dado en coordenadas cilíndricas por $\vec{F} = \rho\,\hat{\rho}$.

(i) (2 pt.) Calcule el flujo de $\vec{F}$ a través de la superficie S usando directamente la definición de flujo.

Tenemos $\vec{F} \cdot d\vec{A} = \vec{F} \cdot N dA$. Como $\hat{\rho} \cdot \hat{z} = 0$ usando lo anterior se tiene

$$\begin{aligned}
\int_S \vec{F} \cdot d\vec{A} &= \int_{lado\ superior} F \cdot d\vec{A} + \int_{lado\ inferior} F \cdot d\vec{A} \\
&= \int_0^{2\pi} \int_1^2 \rho\hat{\rho} \cdot (\hat{\rho} - \hat{z})\rho\, d\rho d\theta + \int_0^{2\pi} \int_1^2 \rho\hat{\rho} \cdot (\hat{\rho} + \hat{z})\rho\, d\rho d\theta \\
&= 4\pi \int_1^2 \rho^2\, d\rho = \frac{28\pi}{3}.
\end{aligned}$$

(Escribir la integral de flujo corectamente en coordenadas 1.5, el resulatdo final 0.5)

(ii) (1.5 pt.) Calcule el flujo sobre la superficie por medio del teorema de la divergencia para un volumen adecuado.

Para aplicar el Teorema de la divergencia debemos considerar una superficie cerrada. Para ello agregamos a nuestra superficie los discos de radio 2 a alturas 1 y -1 y que llamaremos T_1 y T_2 respectivamente.

Usando la indicacción tenemos

$$\operatorname{div} \vec{F} = 2.$$

Entonces

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} + \iint_{T_1} \vec{F} \cdot d\vec{S} + \iint_{T_2} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iiint_\Omega \operatorname{div} \vec{F}\, dV = 2 \times\ volumen\,\Omega.$$

Por un lado, notamos que por simetría las integrales de ambas tapas son iguales salvo el signo del vector normal y por tanto sus aportes se cancelan. Además el volumen de Ω es 2 veces el volumen de la parte superior (por simmetría) entonces

$$\int_\Omega \operatorname{div} \vec{F}\, dV = 4 \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^{1+z} \rho\, d\rho dz d\theta = \frac{28\pi}{3}$$

Esto es consistente con la parte (i) y el teorema de divergencia. (Calculo 1.0, explicación de consistencia 0.5)

P2. Sean $\vec{F}$ y $\vec{G}$ dos campos vectoriales dados por $\vec{F}=(xz-y)\hat{\imath}+(x^2y+z^3)\hat{\jmath}+(3xz^2-xy)\hat{k}$ y $\vec{G}=2xe^{-y}\hat{\imath}+(cos(z)-x^2e^{-y})\hat{\jmath}-y\sin(z)\hat{k}$. Sea Γ la curva cerrada correspondiente al rectángulo de vértices $A=(0,0,0)$, $B=(0,0,1)$, $C=(2,0,1)$ y $D=(2,0,0)$ cuando es recorrido en el orden $ABCDA$.

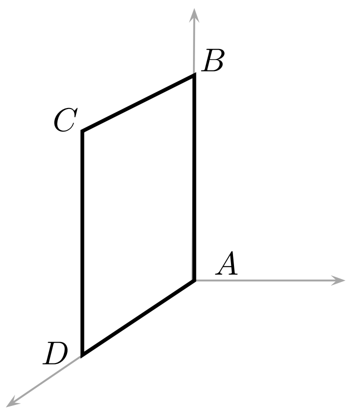
(a) (3.0 pt.) Determine $\oint_\Gamma \vec{F}\cdot d\vec{r}$ y justifique que $\vec{F}$ no es conservativo.

Una condición necesaria para que el campo $\vec{F}$ sea conservativo es que sea irrotacional, calculemos el rotor de $\vec{F}$

$$\text{rot}\vec{F}=\left(\frac{\partial F_z}{\partial y}-\frac{\partial F_y}{\partial z}\right)\hat{\imath}+\left(\frac{\partial F_x}{\partial z}-\frac{\partial F_z}{\partial x}\right)\hat{\jmath}+\left(\frac{\partial F_y}{\partial x}-\frac{\partial F_x}{\partial y}\right)\hat{k}=(-x-3z^2)\hat{\imath}+(x-3z^2+y)\hat{\jmath}+(2xy-1)\hat{k}$$

por lo tanto no puede ser conservativo. (Justificación que no es conservativo 1.0)

Para el cálculo de la integral de trabajo tenemos dos opciones: cálculo por definición o utilizando el Teorema de Stokes. (Calculo de la integral 2.0)



Por definición: consideremos la parametrización de la curva Γ en cuatro partes

- Γ_1 : $\vec{r}_1(z)=(0,0,z)$, $z\in[0,1]$ con normal $\vec{n}=\hat{k}\Rightarrow\vec{F}(\vec{r})\cdot d\vec{r}=0$
- Γ_2 : $\vec{r}_2(x)=(x,0,1)$, $x\in[0,2]$ con normal $\vec{n}=\hat{\imath}\Rightarrow\vec{F}(\vec{r})\cdot d\vec{r}=x$
- Γ_3 : $\vec{r}_1(z)=(2,0,1-z)$, $z\in[0,1]$ con normal $\vec{n}=-\hat{k}\Rightarrow\vec{F}(\vec{r})\cdot d\vec{r}=-6(1-z)^2$
- Γ_4 : $\vec{r}_1(x)=(2-x,0,0)$, $x\in[0,1]$ con normal $\vec{n}=-\hat{\imath}\Rightarrow\vec{F}(\vec{r})\cdot d\vec{r}=0$

luego $\int_\Gamma \vec{F}\cdot d\vec{r}=\int_0^2 x\,dx-\int_0^1 6(1-z)^2\,dz=0$

Como el campo es de clase $\mathcal{C}^1$ y la superficie es simple, orientable y regular con borde simple, regular por trozos entonces podemos usar el Teorema de Stokes y por tanto el trabajo sobre la curva será igual a la integral de superficie del rotos en el cuadrado $ABCD$ que puede ser parametrizado por $\vec{\sigma}(x,z)=(x,0,z)$, $x\in[0,2]$, $z\in[0,1]$ de acuerdo a la normal $\hat{\jmath}$, luego

$$\iint_C \text{rot}\vec{F}\cdot d\vec{S}=\int_0^2\int_0^1(x-3z^3)\,dz\,dx=0$$

Notemos que a pesar de que en este caso particular la integral sobre la curva cerrada es cero el campo no es conservativo.

(b) (3.0 pt.) Demuestre que $\vec{G}$ es conservativo encontrando un potencial escalar ϕ tal que $\nabla\phi=-\vec{G}$. Luego determine el valor de $\oint_\Gamma \vec{G}\cdot d\vec{r}$.

Para que $\vec{G}$ sea conservativo enconces debe existir un campo escalar ϕ tal que $\nabla\phi=-\vec{G}$ i.e.

- $\frac{\partial\phi}{\partial x}=-2xe^{-y}\Rightarrow\phi(x,y,z)=-x^2e^{-y}+C_1(y,z)$
- $\frac{\partial\phi}{\partial y}=-x^2e^{-y}+\frac{\partial C_1(y,z)}{\partial y}=-cos(z)+x^2e^{-y}\Rightarrow\phi(x,y,z)=-x^2e^{-y}-y\cos(z)+C_2(z)$
- $\frac{\partial\phi}{\partial z}=y\sin(z)+C_z'(z)=y\sin(z)\Rightarrow C_z=C$

luego el campo posee un potencial $\phi(x,y,z)=-x^2e^{-y}-y\cos(z)+C$ y por tanto $\int_\Gamma \vec{F}\cdot d\vec{r}=0$ sobre cualquier curva cerrada.

(Calculo de potencial 1.5, calculo de la integral (directo o usando el Stokes) 1.5).

P3. De acuerdo a la teoría de Yukawa[1] para las fuerzas nucleares, la fuerza de atracción entre un protón y un neutrón tiene como potencial (en coordenadas esféricas) a $U(r) = K\frac{e^{-\alpha r}}{r}$, para ciertas constantes $K < 0$ y $\alpha > 0$.

(a) (1 pt.) Encuentre la fuerza $\vec{F} = -\nabla U$ en $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$.

Como se trata de un campo radial, entonces

$$-\nabla U(r) = -\frac{\partial U}{\partial r}\hat{r} = -K\frac{(-\alpha e^{-\alpha r}r - e^{-\alpha r})}{r^2}\hat{r}$$

(b) (2 pt.) Calcule directamente el flujo de $\vec{F}$ a través del casquete esférico de radio $a > 0$ orientado según la normal exterior.

Una parametrización posible es $\vec{\sigma}(\theta, \varphi) = a\hat{\rho}$, $\theta \in [0, 2\pi]$, $\varphi \in [0, \pi]$

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} -K\frac{(-a\alpha e^{-\alpha a} - e^{-\alpha a})}{a^2}\hat{r}\cdot\hat{r}\, a\sin(\varphi)\, d\varphi\, d\theta = -K\frac{(-a\alpha e^{-\alpha a} - e^{-\alpha a})}{a^2}\cdot\text{Area(esfera)} = 4\pi K(a\alpha e^{-\alpha a} + e^{-\alpha a})$$

(Escribir correctamente la integral 1.5, resultado final 0.5)

(c) (1.5 pt.) Pruebe que $\Delta U = \alpha^2 U$ en $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$.

Sabemos que

$$\begin{aligned}
\Delta U &= \text{div}(\nabla U) \\
&= \frac{1}{r^2\sin\varphi}\frac{\partial(\frac{K}{r^2}(-\alpha e^{-\alpha r}r - e^{-\alpha r})r^2\sin\varphi)}{\partial r} \\
&= \frac{K}{r^2}\frac{\partial(-\alpha e^{-\alpha r}r - e^{-\alpha r})}{\partial r} \\
&= \alpha^2 K\frac{e^{-\alpha r}}{r} \\
&= \alpha^2 U(r)
\end{aligned}$$

(d) (1.5 pt.) Demuestre que si $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ es un abierto acotado que contiene al origen y cuya frontera es una superficie regular orientada según la normal exterior, entonces:

$$\iint_{\partial\Omega} \vec{F}\cdot d\vec{A} = 4\pi K - \alpha^2\iiint_{\Omega} U\, dV$$

.

Como vemos, el campo no es continuamente diferenciable en el origen, por lo tanto no podemos aplicar el Teorema de la Divergencia directamente. Para hacerlo Consideramos el volumen Ω sin una bola en torno al origen de radio ε. Como Ω abierto y el origen pertenece a la bola, entonces la bola está completamente contenida en Ω para ε suficientemente pequeño. Aplicando el Teorema de la Divergencia en el volumen $\Omega' = \Omega - B(0, \varepsilon)$ tenemos que de la parte (c)

$$\iint_{\Omega'} \vec{F}\cdot d\vec{S} = \iint_{\Omega'} \text{div}(\vec{-}\nabla U)\cdot d\vec{S} = \iiint_{\Omega'} = -\alpha^2\iiint_{\Omega - B(0,\varepsilon)} \Delta U\, dV$$

(Esta identidad vale 0.5)

Por otro lado de la parte (b)

$$\iint_{\Omega'} \vec{F}\cdot d\vec{S} = \iint_{\Omega} \vec{F}\cdot d\vec{S} - \iint_{B(0,\varepsilon)} \vec{F}\cdot d\vec{S} = \iint_{\Omega} \vec{F}\cdot d\vec{S} - 4\pi K(\varepsilon\alpha e^{-\alpha\varepsilon} + e^{-\alpha\varepsilon})$$

[1] El físico japonés Hideki Yukawa propuso en 1935 una teoría sobre la naturaleza de las fuerzas nucleares fuertes, haciendo uso de una nueva partícula (el mesón). Aunque estudios posteriores demostraron la inviabilidad de su teoría, su trabajo lo llevó a ser galardonado en 1949 con el Premio Nobel de Física.

luego

$$\iint_{\Omega} \vec{F} \cdot d\vec{S} = 4\pi K(a\alpha e^{-\alpha a} + e^{-\alpha a}) - \alpha^2 \iiint_{\Omega - B(0,\varepsilon)} \Delta U \, dV$$

(Esto vale 0.5)

El resultado se tiene tomando el límite cuando ε tiende a cero.

(Esto vale 0.5)