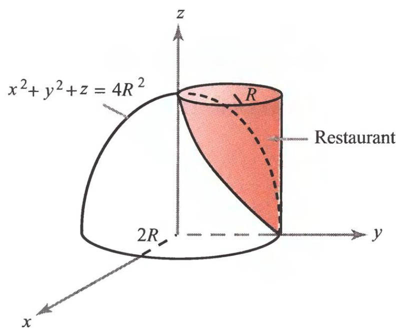
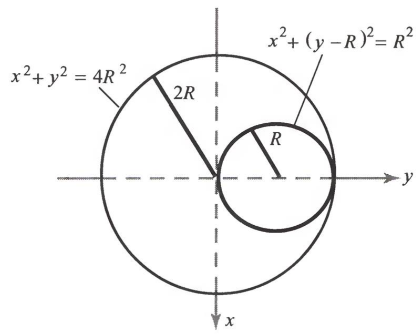
MA2002 Cálculo Avanzado y Aplicaciones. Secciones 1 y 3
Profesores: Carlos Conca - Raúl Gormaz
Auxiliares: M. Ignacia Devoto - G. Sperone - H. Carrillo - N. Godoy
10 de Octubre de 2013

Control 1

1. Están construyendo un restaurante en la ladera de una montaña. Los planos del arquitecto se muestran a continuación:





Vista lateral **Vista superior**

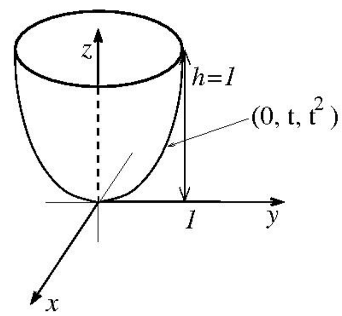
   a) **(3 puntos)** Parametrice la superficie del restaurante. Considere R como conocido.

   b) **(3 puntos)** La pared vertical curvada del restaurante será hecha de vidrio. ¿Cuánto vidrio se necesitará? Es decir, ¿cuál será el área de esta pared?

2. *a*) **(3 puntos)** Verifique el teorema de Stokes para el campo vectorial $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definido por

$$\vec{F}(x, y, z) = (z, x, y)$$

   usando como superficie de integración el paraboloide S generado por la revolución de la curva $\vec{\sigma}(t) = (0,\, t,\, t^2)$, $t \in [0, 1]$ en torno al eje z, representado en la figura siguiente:

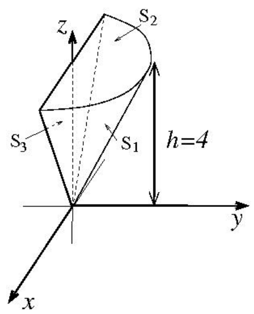


   Considere la normal apuntando hacia abajo del paraboloide.

   b) **(3 puntos)** Verifique el teorema de Gauss para el campo vectorial $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definido por

$$\vec{F}(x, y, z) = (4xz, xyz, 3z)\,,$$

   usando como volumen de integración $\Omega = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \sqrt{x^2 + y^2} \le z,\, y \ge 0,\, 0 \le z \le 4\right\}$, representado en la figura siguiente:



Calcule los flujos correspondientes a cada parte, $S_1,\ S_2\ S_3$, del borde de Ω, según se muestra en la figura.

3. *a)* **(i) (1.5 puntos)** Demuestre que el campo vectorial $\vec{G}(x,y,z) = \left(y^2z^3,\ 2xyz^3,\ 3xy^2z^2\right)$ es conservativo en $\mathbb{R}^3$ y encuentre un potencial para $\vec{G}$.

   (ii) (1.5 puntos) Calcule

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{H}\cdot d\vec{l}$$

   donde $\vec{H} = \vec{G} + (0,0,y)$ y $\mathcal{C}$ es la curva cerrada correspondiente a los 3 segmentos rectos que conectan sucesivamente los puntos A=(0,0,0), B=(0,1,0), C=(0,0,1), y regresando nuevamente a A.

   b) **(3 puntos)** Determine el trabajo realizado por el campo $\vec{F}(x,y) = \left(y^2, x\right)$ sobre la frontera de la región cuadrada $\Omega = [0,2]\times[0,2]$, orientada en sentido antihorario.

TIEMPO: 3 HORAS.

Recuerdo de algunas fórmulas

- **Teorema de Green:**

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{F}\cdot d\vec{l} \quad = \quad \iint_S \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) dxdy$$

- **Teorema de Stokes:**

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{F}\cdot d\vec{l} \quad = \quad \iint_S \mathrm{rot}(\vec{F})\cdot d\vec{S}$$

- **Teorema de Gauss:**

$$\iiint_\Omega \mathrm{div}(\vec{F})\, dV \quad = \quad \iint_S \vec{F}\cdot d\vec{S}$$

- **Divergencia en coordenadas ortogonales:**

$$\mathrm{div}(\vec{F}) \quad = \quad \frac{1}{h_1h_2h_3}\left(\frac{\partial(h_2h_3F_{u_1})}{\partial u_1} + \frac{\partial(h_1h_3F_{u_2})}{\partial u_2} + \frac{\partial(h_1h_2F_{u_3})}{\partial u_3}\right)$$

- **Rotor en coordenadas ortogonales:**

$$\mathrm{rot}(\vec{F}) \quad = \quad \frac{1}{h_1h_2h_3}\begin{vmatrix} h_1\hat{u}_1 & h_2\hat{u}_2 & h_3\hat{u}_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial u_1} & \dfrac{\partial}{\partial u_2} & \dfrac{\partial}{\partial u_3} \\ h_1F_{u_1} & h_2F_{u_2} & h_3F_{u_3} \end{vmatrix}$$

Pauta P1 - Control #1

a) La superficie del restaurant Σ se descompone en Σ_1 techo, Σ_2 pared vertical curvada y Σ_3 piso.

i) Σ_1 : techo. Se trata de un circulo de radio R, horizontal y a una altura $4R^2$ (reemplazar $(x\,y) = (0\,0)$ en la ec. del paraboloide

1pto de los cuales 0.5 corresponden a la determinación del dominio de la param.

parametrización: En cartesianas

$$(x\,y) \longrightarrow (x, y, 4R^2)$$

$$(x\,y) \in \{(x\,y) \,/\, x^2 + (y-R)^2 \le R^2\}$$

O en cilíndricas "desplazadas"

$$(\rho, \theta) \longrightarrow (\rho\cos\theta, \rho\operatorname{sen}\theta + R, 4R^2)$$

ii) Σ_2 : pared vertical curvada. Es la porción del manto del cilindro $x^2 + (y-R)^2 = R^2$, $0 \le z \le 4R^2$ que queda fuera del paraboloide $x^2+y^2+z = 4R^2$

Así $(x\,y\,z) \in \Sigma_2 \iff \begin{cases} x^2 + (y-R)^2 = R^2 & \text{(cilindro)} \\ x^2+y^2+z \geq 4R^2 & \text{(fuera del p.)} \\ 0 \le z \le 4R^2 & \text{(alturas)} \end{cases}$

1pto 0.5 son por dominio de la param

En cilíndricas desplazadas:

$$(\rho\,\theta\,z) \longrightarrow (x\,y\,z) = (\rho\cos\theta, \rho\operatorname{sen}\theta + R, z)$$

falta determinar el dominio de la parametrización usando (θ, z) como parámetros.

La ec. del cilindro dice $\boxed{\rho = R}$

La inecuación, fuera del paraboloide dice

$$\boxed{z \geq 2R^2(1-\operatorname{sen}\theta)}$$

La inecuación para z dice $\boxed{0 \le z \le 4R^2}$

parametrización

$$\phi : (\theta, z) \in D \longrightarrow (R\cos\theta, R(1+\operatorname{sen}\theta), z)$$

con $D = \{(\theta, z) / 0 \le \theta \le 2\pi \wedge 2R^2(1-\operatorname{sen}\theta) \le z \le 4R^2\}$

(esto último permite escribir los límites de integración para el cálculo del área de Σ_2).

iii) Σ_3 : piso del restaurante.

$(x\ y\ z) \in \Sigma_3$ si cumple

$$x^2+y^2+z = 4R^2 \quad \text{(paraboloide)}$$

$$x^2+(y-R)^2 \leq R^2 \quad \text{(dentro del cilindro}$$

$$0 \leq z \leq 4R^2 \quad \text{(alturas min y max.)}$$

1pto

de los cuales 0.5 x dominio de la param

Utilicemos coord. cilíndricas usuales

$$(\rho, \theta, z) \longrightarrow (\rho \cos\theta, \rho \operatorname{sen}\theta, z) = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$$

La ec. del paraboloide dice

$$\boxed{\rho^2 + z = 4R^2}$$

La inec. "dentro del cilindro" dice

$$\rho^2 - 2\rho R \operatorname{sen}\theta \leq 0 \Leftrightarrow \boxed{\rho \leq 2R\operatorname{sen}\theta}$$

Y la inec. de la altura: $0 \leq z \leq 4R^2$

así, usando (ρ, θ) como parametros

$$(\rho,\theta) \xrightarrow{\phi} (\rho\cos\theta, \rho\operatorname{sen}\theta, \underbrace{4R^2-\rho^2}_{z})$$

para $(\rho,\theta) \in D = \{(\rho,\theta) / 0 \leq \theta \leq \pi,\ 0 \leq \rho \leq 2R\operatorname{sen}\theta\}$

ojo, todo esta en el semi espacio $y \geq 0$

por lo tanto, solo se toma $0 \leq \theta \leq \pi$.

b) Area Σ_2, pared vertical curvada.

i) Elemento de area. Por ser coord. cilindricas

$$dA = R\,d\theta\,dz \qquad (R = \text{radio del cilindro})$$

o bien, calculando $\left\| \frac{\partial\phi}{\partial\theta} \times \frac{\partial\phi}{\partial z} \right\| \ldots$

$$\frac{\partial\phi}{\partial\theta} = (-R\,\text{sen}\,\theta,\ R\cdot\cos\theta,\ 0)$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial z} = (\ 0,\ 0,\ 1\ ) \qquad \text{como son } \perp$$

$$\left\| \frac{\partial\phi}{\partial\theta} \times \frac{\partial\phi}{\partial z} \right\| = \left\| \frac{\partial\phi}{\partial\theta} \right\| \cdot \left\| \frac{\partial\phi}{\partial z} \right\| = R$$

$$\text{area} = \int_0^{2\pi} \int_{2R^2(1-\text{sen}\,\theta)}^{4R^2} R\,dz\,d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} R\left(4R^2 - 2R^2(1-\text{sen}\,\theta)\right) d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} (2R^3 + 2R^3\,\text{sen}\,\theta)\ d\theta$$

$$= 4\pi R^3 + 2R^3 \underbrace{\int_0^{2\pi} \text{sen}\,\theta\,d\theta}_{0}$$

$$= 4\pi R^3 \,/\!/$$

Puntaje (b)
Elemento de Area 1pto

Integral con sus límites 1pto

cálculo 1pto

Si se utilizó otra parametrización, misma repartición de puntajes

PAUTA C1 CAA 2013/2.

Profs. R. Gormaz.
C. Conca

P2)

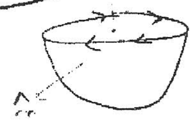
(a)

- Calculemos $\displaystyle\int_{\Gamma=\partial S} \vec{F}\cdot d\vec{r}$

param. borde

Borde (de S): es la circunferencia $F(\sigma) = (\cos\sigma, \operatorname{sen}\sigma, 1)$ 0.3

σ se recorre entre 2π y 0



$\vec{F}(\vec{r}(\sigma)) = (1, \cos\sigma, \operatorname{sen}\sigma)$

$\dfrac{d\vec{r}}{d\sigma} = (-\operatorname{sen}\sigma, \cos\sigma, 0) \quad (=\hat{\sigma})$

0.3 que se integra?

Luego $\vec{F}(\vec{r}(\sigma))\cdot \dfrac{d\vec{r}}{d\sigma} = -\operatorname{sen}\sigma + \cos^2\sigma$

$$\Rightarrow \int_{\partial S} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{2\pi}^{0} (-\operatorname{sen}\sigma + \cos^2\sigma)\,d\sigma = \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}\sigma\, d\sigma - \int_0^{2\pi}\cos^2\sigma\, d\sigma$$

$$= \cancel{-\cos\sigma\Big|_0^{2\pi}}^{\,0} - \int_0^{2\pi}\left(\frac{\cos(2\sigma)+1}{2}\right)d\sigma$$

$$= -\frac{1}{2}\cancel{\int_0^{2\pi}\cos(2\sigma)\,d\sigma}^{\,0} - \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\sigma = -\pi.$$

0.6 cálculo

- Ahora, calculemos $\displaystyle\int_S \operatorname{rot}F\cdot \vec{dA}$:

$$\operatorname{rot}\vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ z & x & y \end{vmatrix} = \hat{\imath}+\hat{\jmath}+\hat{k} = (1,1,1)$$

0.2 rotor

Parametrizar S: Notar que $z=\rho^2$

$g(\rho,\sigma) = (\rho\cos\sigma, \rho\operatorname{sen}\sigma, \rho^2) \qquad \rho\in[0,1], \quad \sigma\in[0,2\pi].$

$= \rho\hat{\rho} + \rho^2\hat{k}$

0.5 param

$\dfrac{\partial g}{\partial \rho} = \hat{\rho} + 2\rho\hat{k}$

$\dfrac{\partial g}{\partial \sigma} = \rho\hat{\sigma}$

$\Rightarrow \dfrac{\partial g}{\partial \rho}\times\dfrac{\partial g}{\partial \sigma} = (\hat{\rho}+2\rho\hat{k})\times\rho\hat{\sigma} = \rho\hat{k} - 2\rho^2\hat{\rho}$

Por la figura, debemos considerar el producto en orden inverso.

0.3 vector normal $g_\rho \times g_\sigma$

$$\iint_S \operatorname{rot}\vec{F}\cdot\vec{dA} = \int_0^1\int_0^{2\pi} (1,1,1)\cdot(2\rho^2\hat{\rho} - \rho\hat{k})\,d\sigma\,d\rho$$

$$= \int_0^1\int_0^{2\pi} (1,1,1)\cdot(2\rho^2\cos\sigma, 2\rho^2\operatorname{sen}\sigma, -\rho)\,d\sigma\,d\rho$$

$$= \int_0^1\int_0^{2\pi} (2\rho^2(\cos\sigma+\operatorname{sen}\sigma) - \rho)\,d\sigma\,d\rho$$

$$= \int_0^1 \Big(2\rho^2 \cancel{\int_0^{2\pi}(\cos\sigma+\operatorname{sen}\sigma)\,d\sigma}^{\,0} - \rho\int_0^{2\pi}d\sigma\Big)d\rho$$

$$= -2\pi\int_0^1 \rho\,d\rho = -2\pi\cdot\frac{1}{2} = -\pi.$$

0.6 cálculo

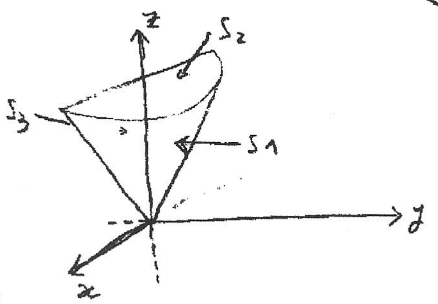
$$\therefore \int_{\Gamma=\partial S}\vec{F}\cdot d\vec{r} = \iint_S \operatorname{rot}\vec{F}\cdot\vec{dA}.$$

hipótesis

S es orientable y regular
∂S es curva cerrada simple regular } por las param.
$\vec{F}$ es C^1 ← son polinomios en cada componente
El cálculo es respetando la regla de la mano derecha

0.2

(b) • Calculemos $\iint_{\partial\Omega} \vec{F}\cdot d\vec{A}$:

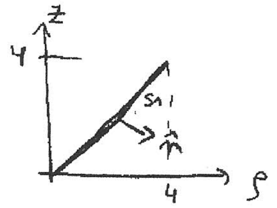


Aditiva $\partial\Omega = S_1 \cup S_2 \cup S_3$

0.2 Luego $\displaystyle\iint_{\partial\Omega} \vec{F}\cdot d\vec{A} = \underbrace{\iint_{S_1} \vec{F}\cdot d\vec{A}}_{I_1} + \underbrace{\iint_{S_2} \vec{F}\cdot d\vec{A}}_{I_2} + \underbrace{\iint_{S_3} \vec{F}\cdot d\vec{A}}_{I_3}$

"Tapa" curva S_1

I_1 / Parametrizamos S_1: $g_1(\rho,\theta) = (\rho\cos\theta, \rho\operatorname{sen}\theta, z(\rho))$



donde notamos que $\sqrt{x^2+y^2} \le z$ en Ω

0.3 $\Longrightarrow \rho = z$ en S_1

$\Longrightarrow g_1(\rho,\theta) = (\rho\cos\theta, \rho\operatorname{sen}\theta, \rho)$ con $\rho\in[0,4]$, $\theta\in[0,\pi]$

Luego $\vec{F}(g_1(\rho,\theta)) = (4\rho^2\cos\theta, \rho^3\cos\theta\operatorname{sen}\theta, 3\rho)$

Además $\dfrac{\partial g_1}{\partial\rho} = \dfrac{\partial}{\partial\rho}(\rho\hat{\rho} + \rho\hat{k}) = \hat{\rho} + \hat{k}$

$\dfrac{\partial g_1}{\partial\theta} = \dfrac{\partial}{\partial\theta}(\rho\hat{\rho} + \rho\hat{k}) = \rho\hat{\theta}$

$\Rightarrow \dfrac{\partial g_1}{\partial\rho}\times\dfrac{\partial g_1}{\partial\theta} = (\hat{\rho}+\hat{k})\times\rho\hat{\theta} = \rho\hat{k} - \rho\hat{\rho}$

0.3 vector normal

Por la figura, apunta en sentido contrario.

Se tiene entonces que:

$\vec{F}(g_1(\rho,\theta))\cdot\left(\dfrac{\partial g_1}{\partial\theta}\times\dfrac{\partial g_1}{\partial\rho}\right) = (4\rho^2\cos\theta, \rho^3\cos\theta\operatorname{sen}\theta, 3\rho)\cdot(\rho\cos\theta, \rho\operatorname{sen}\theta, -\rho)$

$= 4\rho^3\cos^2\theta + \rho^3\cos\theta\operatorname{sen}^2\theta - 3\rho^2$ y, que se integra

$\Longrightarrow \displaystyle\iint_{S_1} \vec{F}\cdot d\vec{A} = \int_0^4\int_0^\pi (4\rho^3\cos^2\theta + \rho^3\cos\theta\operatorname{sen}^2\theta - 3\rho^2)\,d\theta\,d\rho$

$\displaystyle = \int_0^4 \left(4\rho^3\int_0^\pi\cos^2\theta\,d\theta + \rho^3\int_0^\pi\cos\theta\operatorname{sen}^2\theta\,d\theta - 3\rho^2\int_0^\pi d\theta\right)d\rho$

$\boxed{\cos^2\theta = \dfrac{1+\cos 2\theta}{2}}$

El Calculo

0.3

donde • $\displaystyle\int_0^\pi\cos^2\theta\,d\theta = \frac{1}{2}\int_0^\pi d\theta + \frac{1}{2}\int_0^\pi\cos(2\theta)\,d\theta = \frac{\pi}{2}$

• $\displaystyle\int_0^\pi \underbrace{\operatorname{sen}^2\theta}_{u}\,\underbrace{\cos\theta\,d\theta}_{dv} = \operatorname{sen}^2\theta\operatorname{sen}\theta\Big|_0^\pi - \int_0^\pi 2\operatorname{sen}^2\theta\cos\theta\,d\theta$

$\displaystyle\Longrightarrow 3\int_0^\pi\operatorname{sen}^2\theta\cos\theta\,d\theta = 0 \Longrightarrow \int_0^\pi\operatorname{sen}^2\theta\cos\theta\,d\theta = 0$

• $\displaystyle\int_0^\pi d\theta = \pi$

$\displaystyle\Longrightarrow \iint_{S_1}\vec{F}\cdot d\vec{A} = \int_0^4\left(4\rho^3\frac{\pi}{2} + \cancel{\rho^3\cdot 0} - 3\rho^2\cdot\pi\right)d\rho$

$\displaystyle = 2\pi\int_0^4\rho^3\,d\rho - 3\pi\int_0^4\rho^2\,d\rho = 2\pi\cdot\frac{4^4}{4} - 3\pi\cdot\frac{4^3}{3}$

$= 2\pi\cdot 4^3 - \pi\cdot 4^3 = 4^3\cdot\pi(2-1) = 4^3\cdot\pi$

$= 64\pi$

3

Tapa arriba S_2

I_2 $\quad g_2(\rho,\theta) = \rho\hat{\rho} + 4\hat{k} = (\rho\cos\theta, \rho\,\text{sen}\theta, 4) \qquad \rho\in[0,4], \ \theta\in[0,\pi]$

$\hat{n} = \hat{k} \Rightarrow \vec{dA} = \hat{k}\,\rho\, d\rho\, d\theta$

$\vec{F}(g_2(\rho,\theta)) = (4\rho\cos\theta\cdot 4, \ \rho^2\cos\theta\,\text{sen}\theta\cdot 4, \ 3\cdot 4)$

$\Rightarrow \vec{F}(g_2(\rho,\theta))\cdot\vec{dA} = 12\rho\, d\rho\, d\theta$

$\Rightarrow \iint_{S_2}\vec{F}\cdot\vec{dA} = \int_0^{\pi}\int_0^4 12\rho\, d\rho\, d\theta = 12\cdot\int_0^{\pi}\frac{4^2}{2}\,d\theta = 6\cdot 4^2\cdot\pi$ $\quad$ 0.5

$\to$ o geométricamente, pues $\underset{\hat{n}=\hat{k}}{\vec{F}\cdot\hat{k}} = (\cancel{\ast}\cancel{0}12)$ y el área $\frac{1}{2}4^2\pi$

I_3 $\quad g_3(x,z) = (x,0,z)$ $\qquad$ (No es necesario decir las restricciones)

$\hat{n} = (0,-1,0)$

$\Rightarrow \vec{F}(g_3(x,z)) = (4xz, 0, 3z)$ $\Big\}$ $\vec{F}(g_3)\cdot\hat{n} = 0$

$\vec{F}\cdot\hat{n} = 0$ es lo importante

$\Rightarrow \iint_{S_3}\vec{F}\cdot\hat{n}\,dA = \iint_{S_3} 0\, dA = 0$ $\quad$ 0.5

$\therefore \iint_{\partial\Omega}\vec{F}\cdot\vec{dA} = 4^3\pi + 6\cdot 4^2\pi = 4^2\cdot\pi\cdot(4+6) = 160\pi$

- Calculemos $\iiint_{\Omega}\text{div}\vec{F}\,dV$:

$\text{div}\vec{F} = 4z + xz + 3$

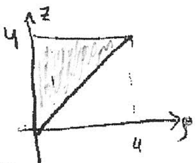
- Parametrizar Ω :

$\vec{\sigma}(\rho,\theta,z) = (\rho\cos\theta, \rho\,\text{sen}\theta, z)$ $\quad$ donde $\quad \theta\in[0,\pi]$, $\rho\in[0,4]$, $z\in[\rho,4]$

$\Rightarrow (\text{div}\vec{F})(\vec{\sigma}(\rho,\theta,z)) = 4z + z\rho\cos\theta + 3$

$dV = \rho\, d\rho\, d\theta\, dz$

0.2



que integran

$\Rightarrow \iiint_{\Omega}\text{div}\vec{F}\,dV = \int_0^4\int_{\rho}^4\int_0^{\pi}(4z + z\rho\cos\theta + 3)\rho\, d\theta\, dz\, d\rho$

$= 4\int_0^4\int_{\rho}^4\int_0^{\pi} z\rho\, d\theta\, dz\, d\rho + \cancel{\int_0^4\int_{\rho}^4\int_0^{\pi} z\rho^2\cos\theta\, d\theta\, dz\, d\rho} + 3\int_0^4\int_{\rho}^4\int_0^{\pi}\rho\, d\theta\, dz\, d\rho$

$= 2\pi\int_0^4\left(4^2 - \rho^2\right)\rho\, d\rho + 3\cdot\frac{1}{2}\text{Vol(cono)}$ $\quad \Leftarrow \left(\text{Vol(cono)} = \frac{\pi R^2 h}{3}\right)$

$= 2\pi\left(4^2\cdot\frac{4^2}{2} - \frac{4^4}{4}\right) + \cancel{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi 4^2\cdot 4}{\cancel{3}}$ $\quad$ 0.5

$= 2\pi\cdot 4^4\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \frac{4^3}{2}\pi = 2\cdot 4^4\cdot\frac{1}{4}\pi + \frac{4^3}{2}\pi = 4^3\pi\left(2 + \frac{1}{2}\right) = 160\pi$ $\quad$ Cálculo

$\therefore \iint_{\partial\Omega}\vec{F}\cdot\vec{dA} = \iiint_{\Omega}\text{div}(\vec{F})\,dV$ $\quad$ $\left[\begin{array}{l}\mathring{\Omega}\ \text{abto acot} \\ \partial\Omega\ \text{regular por pedazos} \\ \text{Ocupar } \hat{n}\ \text{exterior} \\ \vec{F}\ \text{es}\ C^1\end{array}\right]$ $\Big\}$ 0.2 $\quad$ hipótesis y verificación teorema

Pauta P3, Control 1 (primavera 2013)

ⓐ i) $\boxed{\text{Basta con encontrar el potencial para demostrar que } \vec{G}(x,y,z)=(y^2z^3, 2xyz^3, 3xy^2z^2) \text{ es conservativo.}}$ (1/2 pto)

es conservativo

O bien calcular $\text{rot}\,\vec{G}=0$ y dominio $=\mathbb{R}^3$ es simplemente conexo

Si $\exists \phi \Rightarrow \vec{G}=\nabla\phi$ (*)

Por (*) tenemos las siguientes ecuaciones

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = G_x \longrightarrow \frac{\partial \phi}{\partial x} = y^2z^3 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = G_y \longrightarrow \frac{\partial \phi}{\partial y} = 2xyz^3 \quad (2)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = G_z \longrightarrow \frac{\partial \phi}{\partial z} = 3xy^2z^2 \quad (3)$$

Integrando (1), (2) y (3) por x, y, z respectivamente, tenemos:

$$(1) \longrightarrow \phi(x,y,z) = \int y^2z^3\,dx \longrightarrow \phi(x,y,z) = y^2z^3x + C_1(y,z) \quad (4)$$

$$(2) \longrightarrow \phi(x,y,z) = \int 2xyz^3\,dy \longrightarrow \phi(x,y,z) = xy^2z^3 + C_2(x,z) \quad (5)$$

$$(3) \longrightarrow \phi(x,y,z) = \int 3xy^2z^2\,dz \longrightarrow \phi(x,y,z) = xy^2z^3 + C_3(y,z) \quad (6)$$

Si se fijan de (4), (5) y (6), tenemos que C_1, C_2 y C_3 deben ser iguales, luego, solo basta encontrar una. Calculemos C_1:

Derivemos (4) por y, e igualemos con G_y.

$$\Rightarrow \cancel{2yz^3x} + \frac{\partial C_1(y,z)}{\partial y} = \cancel{2xyz^3} \Rightarrow \frac{\partial C_1(y,z)}{\partial y} = 0 \Rightarrow C_1 = \text{cte}$$

Finalmente el potencial ϕ es: **1 puntos** → Encontrar el potencial

$$\phi(x,y,z) = xy^2z^3 + cte$$

, por ende $\vec{G}$ es conservativo.

o también simple inspección $\phi = xy^2z^3$ y verificar $\nabla\phi = \vec{G}$

ii) Primero fijemonos en algo importante. $\vec{H}$ está compuesto por dos campos: Uno conservativo y otro no conservativo. (pues el rotor de $(0,0,y)$ es $\neq 0$).

Debemos calcular la integral de línea de $\vec{H}$ en una curva cerrada, es decir:

$$\oint_C \vec{H}\cdot d\vec{l} = \oint_C \vec{G}\cdot d\vec{l} + \oint_C (0,0,y)\, d\vec{l}$$

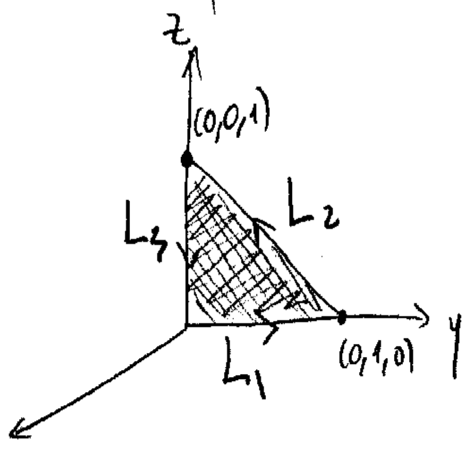
Por teorema de Stokes, tenemos que $\oint \vec{G}\cdot d\vec{l} = 0$, pues $\vec{G}$ es conservativo. Lo que nos deja la simple ~~tarea de~~ calcular la integral de flujo de $(0,0,y)$. **0.5 ptos** simplifica el cálculo

1a forma

Usemos el teorema de Stokes:

Sea $\vec{I} = (0,0,y) \longrightarrow \text{rot}\,\vec{I} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ 0 & 0 & y \end{vmatrix} = (1,0,0)$ **0.2 ptos** rotor

Ahora parametricemos la superficie:



La orientamos en sentido anti-horario y la normal sería $\hat{\imath}$

Tenemos entonces $y + z \leq 1$ con $x = 0$ para $y, z \in [0,1]$

$$\Downarrow$$

$$0 \leq y \leq 1 - z \quad \text{para } [0,1]$$

$$\Rightarrow \vec{r}(y,z) = (0,y,z) \text{ con } y \in [0, 1-z] \wedge z \in [0,1]$$

③

$$\Rightarrow \oint_C \vec{I}\cdot d\vec{l} = \iint \operatorname{rot}\vec{I}\, d\vec{S} = \int_0^1\int_0^{1-z}(1,0,0)(1,0,0)\,dy\,dz$$

0.8 pto

<u>calculo</u> de $\iint \operatorname{rot}\vec{F}\,dx\,dy$

O bien

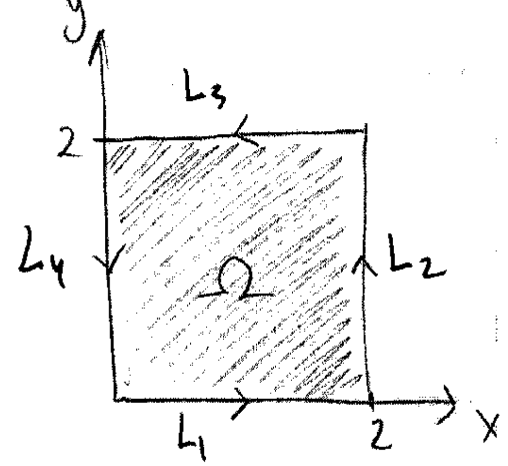
$$\iint_{\text{Triangulo}} 1\cdot dy\,dz = \frac{1}{2}\,\text{base}\times\text{altura}$$

$$= \int_0^1\int_0^{1-z} dy\,dz = \int_0^1 (1-z)\,dz = z-\frac{z^2}{2}\Big|_0^1 = 1-\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \oint_C \vec{H}\cdot d\vec{l} = 1$$

se pueden calcular 3 integrales de linea ... va hoja aparte al final

ⓑ Dado que $\vec{F}(x,y)=(y^2,x)$ es de clase C^∞, usamos el teo. de Stokes:



Parametrizamos Ω

$\vec{r}(x,y)=(x,y)$ $x\in[0,2]$ $y\in[0,2]$

donde $\hat{n}=\hat{k}$

en $\mathbb{R}^2$ (green) calcular solo $\frac{\partial}{\partial x}F_2 - \frac{\partial}{\partial y}F_1$

Calculemos el rotor de $\vec{F} \rightarrow \operatorname{rot}\vec{F} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ y^2 & x & 0\end{vmatrix} = (0,0,1-2y)$ 1pto

1pto que calcular

$$\Rightarrow \oint_{\partial\Omega}\vec{F}\cdot d\vec{l} = \iint_\Omega \operatorname{rot}\vec{F}\cdot d\vec{S} = \int_0^2\int_0^2 (0,0,1-2y)(0,0,1)\,dx\,dy = \int_0^2\int_0^2(1-2y)\,dx\,dy$$

0.2 puntos

O <u>también</u>, calculando las 4 integrales de linea $\int_{L_1}\vec{F}\cdot d\vec{l} = 0$ $\int_{L_4}\vec{F}\cdot d\vec{l} = 0$

$\int_{L_2}\vec{F}\cdot d\vec{l} = \int_0^2 (t^2,2)\cdot(0,1)\,dt = 4$ $\int_{L_3}\vec{F}\cdot d\vec{l} = -\int_0^2 (4,t)\cdot(1,0)\,dt = -8$

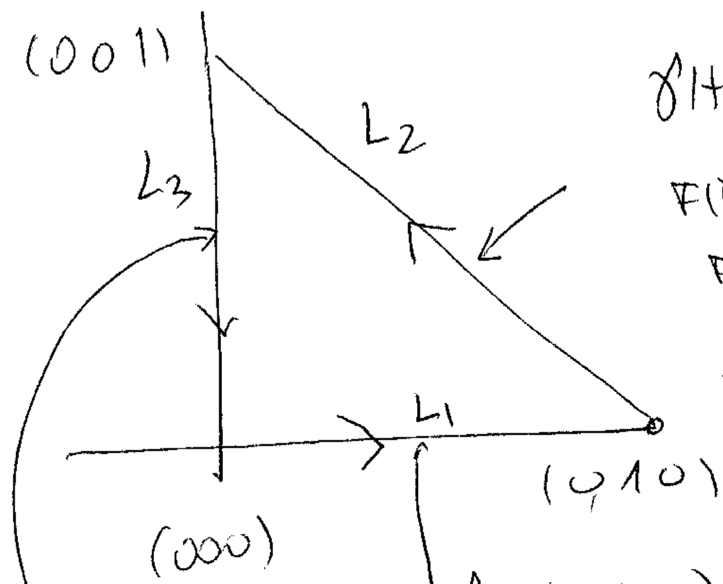
Lo sumo es -4

$$= 2\cdot(y-y^2)\Big|_0^2 = 2(2-4) = -4$$

cálculo 1pto

Pauta P3 Control 1
a - ii) forma alternativa.
Calculando 3 integrales de línea

Llamo $F(x\,y\,z) = (0, 0, y)$



$\gamma(t) = (0, 1-t, t)$ $\quad \gamma'(t) = (0, -1, 1)$

$F(\gamma(t)) = (0, 0, 1-t)$

$F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = 1-t$

$\int_{L_1} \vec{F} \cdot \vec{dl} = \int_0^1 (1-t)\, dt = 1/2$

$\int_{L_2} = 0$

$\gamma = (0, t, 0)$ $\quad \gamma' = (0, 1, 0)$

$F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = (0, 0, t) \cdot (0, 1, 0) = 0$ //

$\gamma(t) = (0, 0, t)$ pero recorrido con $t: 1 \to 0$

$F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = 0 \cdot \gamma'(t) = 0$ //

$\int_{L_3} = 0$

alternativa 0,8 punto calcular las 3 integrales de línea