Control 1 - MA2002 Cálculo Avanzado y Aplicaciones
Escuela de Ingeniería, FCFM, U. de Chile. Semestre 2014-2

P1) (a) Hallar el área limitada por un arco de la cicloide $x = a(\theta - \sin\theta)$, $y = a(1 - \cos\theta)$, $a > 0$, $0 \le \theta \le 2\pi$ y el eje x.

(3 pts.)

(b) Evaluar la integral de línea

$$\int_\gamma 2xyz\,dx + x^2z\,dy + x^2y\,dz,$$

donde γ es una curva simple orientada desde el punto $(1,1,1)$ al punto $(1,2,4)$. Justifique su respuesta.

(3 pts.)

P2) (a) Recordar la formula de Green

$$\iiint_V (v\nabla u - u\nabla v)\,dV = \iint_S \left[v\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial v}{\partial n}\right] dS,$$

donde $\dfrac{\partial u}{\partial n} = \nabla u \cdot n$ y n es la normal exterior unitaria. Consideramos una bola $B_R(X_0)$ de radio R y centro $X_0 = (x_0, y_0, z_0)$ y una función u ármonica en B_R, $\Delta u = 0$. Definamos

$$v = \frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}}.$$

Verificar que v es ármonica en $B_R \setminus \{(x_0, y_0, z_0)\}$.

(3 pts.)

(b) Usando la formula de Green en el dominio $B_R(X_0) \setminus B_\epsilon(X_0)$, para $\varepsilon > 0$ pequeño, y tomando límite $\varepsilon \to 0$ demostrar

$$u(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{4\pi R^2} \iint_{\partial B_R(X_0)} u(x,y,z)\,dS.$$

(3 pts.)

P3) (a) Calcule la integral de flujo $\iint_S F \cdot n\ dS$, donde $F(x,y,z) = (xy, -x^2, x+z)$, S es la la porción del plano $2x + 2y + z = 6$ situada en el primer octante y n es la normal que apunta hacia arriba.

(3 pts.)

(b) Calcule la integral de línea

$$\oint_C 2yz^2dx + xz^2dy + 3xyzdz,$$

donde C es la curva de intersección de la esfera $x^2+y^2+z^2 = 4$ y el paraboloide $x^2+y^2 = 3z$, recorrida en sentido antihorario y aplicando el Teorema de Stokes.

(3 pts.)

Pauta Control 1 - MA2002 Cálculo Avanzado y Aplicaciones
Escuela de Ingeniería, FCFM, U. de Chile. Semestre 2014-2

P1) (a) Hallar el área limitada por un arco de la cicloide $x = a(\theta - \sin\theta)$, $y = a(1 - \cos\theta)$, $a > 0$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ y el eje x.

(3 pts.)

(b) Evaluar la integral de línea

$$\int_\gamma 2xyz\,dx + x^2 z\,dy + x^2 y\,dz,$$

donde γ es una curva simple orientada desde el punto $(1,1,1)$ al punto $(1,2,4)$. Justifique su respuesta.

(3 pts.)

Solución:

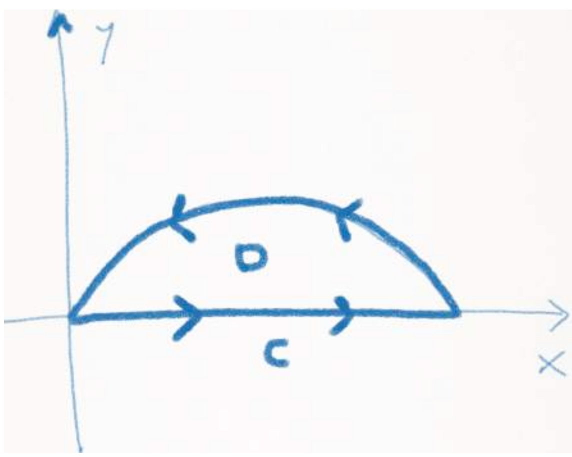
(a) Para calcular el área haremos uso del Teorema de Green, que nos dice que si C es una curva regular a trozos, cerrada y simple, y si D es la región que encierra, entonces

$$\oint_C Pdx + Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} dA \right),$$

luego, por ejemplo,

1,0 pts

$$\oint_C xdy = -\oint_C ydx = \iint_D dA = \text{Area }(D),$$



0,5 pts

En nuestro caso tenemos dos curvas que son la recta $y = 0$ para $0 \leq x \leq 2\pi$ y el cicloide, esto es

$$\begin{aligned}
\text{Area }(D) = -\oint_C ydx &= -\int_{2\pi}^{0} (a(1-\cos\theta), 0) \cdot (a(1-\cos\theta), a\sin\theta) d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} a^2 (1-\cos\theta)^2 d\theta = \int_0^{2\pi} a^2 \left(1 - 2\cos\theta + \cos^2\theta\right) d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} a^2 \left(1 - 2\cos\theta + \frac{1+\cos(2\theta)}{2}\right) d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} a^2 \left(\frac{3}{2} - 2\cos\theta + \frac{\cos(2\theta)}{2}\right) d\theta \\
&= a^2 \left(\frac{3\theta}{2} - 2\sin\theta + \frac{\sin(2\theta)}{4}\right)_0^{2\pi} = a^2 3\pi. \quad (1)
\end{aligned}$$

1,0 pts

0,5 pts

item[(b)] En primer lugar podemos notar que si llamamos

$$F(x,y,z) = (2xyz, x^2z, x^2y)$$

es un campo regular conservativo, ya que

1,0 pts

$$F(x,y,z) = \nabla(x^2yz),$$

por lo que la integral de línda continua es independiente del camino. 0,5 pts
Así tenemos que

$$\int_\gamma 2xyz\,dx + x^2z\,dy + x^2y\,dz = \int_C F(x,y,z)\cdot dr = f(1,2,4) - f(1,1,1) = 16 - 1 = 15.$$

$(1,1,1)$ al punto $(1,2,4)$. Justifique su respuesta. 1,5 pts

(3 pts.)

P2) (a) Recordar la formula de Green

$$\iiint_V (v\triangle u - u\triangle v)\, dV = \iint_S \left[v\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial v}{\partial n}\right] dS,$$

donde $\frac{\partial u}{\partial n} = \nabla u \cdot n$ y n es la normal exterior unitaria. Consideramos una bola $B_R(X_0)$ de radio R y centro $X_0 = (x_0, y_0, z_0)$ y una función u ármonica en B_R, $\Delta u = 0$. Definamos

$$v = \frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}}.$$

Verificar que v es ármonica en $B_R \setminus \{(x_0, y_0, z_0)\}$.

(3 pts.)

(b) Usando la formula de Green en el dominio $B_R(X_0) \setminus B_\epsilon(X_0)$, para $\varepsilon > 0$ pequeño, y tomando límite $\varepsilon \to 0$ demostrar

$$u(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{4\pi R^2} \iint_{\partial B_R(X_0)} u(x, y, z)\, dS.$$

(3 pts.)

Solución:

(a) Dado que

$$v = \left((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2\right)^{-\frac{1}{2}},$$

entonces se tiene que,

$$\begin{aligned}\frac{\partial v}{\partial x} &= -\frac{1}{2}\left((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2\right)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2(x-x_0) \\ &= \frac{(x-x_0)}{((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2)^{\frac{3}{2}}}. \qquad (2)\end{aligned}$$

0,4 pts

Luego

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} &= \frac{\left((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2\right)^{\frac{3}{2}} - (x-x_0)\cdot \frac{3}{2}\left((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2\right)^{\frac{1}{2}} \cdot 2(x-x_0)}{((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2)^3} \\ &= \frac{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 - 3(x-x_0)^2}{((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2)^{\frac{5}{2}}} \\ &= \frac{(y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 - 2(x-x_0)^2}{((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2)^{\frac{5}{2}}} \qquad (3)\end{aligned}$$

0,4 pts

Análogamente se tiene que

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{(x-x_0)^2 + (z-z_0)^2 - 2(y-y_0)^2}{((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2)^{\frac{5}{2}}} \qquad (4)$$

0,8 pts

y

$$\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = \frac{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 - 2(z-z_0)^2}{((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2)^{\frac{5}{2}}}. \qquad (5)$$

0,8 pts

Por lo que sumándolas se obtiene que

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0$$

0,6 pts

(b) Consideremos la identidad

$$\iiint_V (v\triangle u - u\triangle v)\, dV = \iint_S \left[v\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial v}{\partial n}\right] dS,$$

donde $V = B_R(X_0) \setminus B_\epsilon(X_0)$ y $S = \partial\left(B_R(X_0) \setminus B_\epsilon(X_0)\right)$, con n la normal exterior unitaria a V. Luego como

$$\triangle u = \triangle v = 0,$$

se tiene que

0,5 pts

$$\iiint_V (v\triangle u - u\triangle v)\, dV = 0.$$

Por tanto

$$\iint_S \left[v\frac{\partial u}{\partial n}\right] dS = \iint_S \left[u\frac{\partial v}{\partial n}\right] dS,$$

Por otra parte

$$\iint_S \left[v\frac{\partial u}{\partial n}\right] dS = \iint_{\partial B_R(X_0)} v\nabla u\cdot n dS + \iint_{\partial B_\epsilon(X_0)} v\nabla u\cdot n dS$$

0,3 pts

pero como v es constante en las esferas se tiene que

$$\iint_S \left[v\frac{\partial u}{\partial n}\right] dS = \frac{1}{R}\iint_{\partial B_R(X_0)} \nabla u\cdot n dS + \frac{1}{\varepsilon}\iint_{\partial B_\varepsilon(X_0)} \nabla u\cdot n dS,$$

0,3 pts

pero tenemos que del Teorema de la divergencia

$$\iint_{\partial B_R(X_0)} \nabla u\cdot n dS = \iiint_{B_R(X_0)} \operatorname{div}(\nabla u)\, dV = \iiint_{B_R(X_0)} \triangle u = 0$$

y análogamente, como n es la normal exterior a $V = B_R(X_0) \setminus B_\epsilon(X_0)$, se tiene que

0,3 pts

$$\iint_{\partial B_\varepsilon(X_0)} \nabla u\cdot n dS = -\iiint_{B_\varepsilon(X_0)} \operatorname{div}(\nabla u)\, dV = -\iiint_{B_\varepsilon(X_0)} \triangle u = 0.$$

Así tenemos que

$$\iint_S \left[u\frac{\partial v}{\partial n}\right] dS = 0,$$

0,2 pts

es decir,

$$\iint_{\partial B_R(X_0)} \left[u\frac{\partial v}{\partial n}\right] dS + \iint_{\partial B_\epsilon(X_0)} \left[u\frac{\partial v}{\partial n}\right] dS = 0.$$

Ahora analicemos cada una de las integrales de superficie anteriores. En este caso podemos observar que

$$\nabla v = \frac{1}{((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2)^{\frac{3}{2}}}(x-x_0, y-y_0, z-z_0) = \frac{(x-x_0, y-y_0, z-z_0)}{\|(x-x_0, y-y_0, z-z_0)\|^3},$$

además en este caso, la normal unitaria a la esfera está dada por

0,4 pts

$$n = \pm\frac{(x-x_0, y-y_0, z-z_0)}{\|(x-x_0, y-y_0, z-z_0)\|},$$

0,4 pts

dependiendo de la dirección de la normal.
Luego tenemos que

$$\iint_{\partial B_R(X_0)} \left[u\frac{\partial v}{\partial n}\right] dS = \iint_{\partial B_R(X_0)} u(x,y,z)\frac{R^2}{R^4}\, dS = \frac{1}{R^2}\iint_{\partial B_R(X_0)} u(x,y,z)\, dS$$

0,3 pts

y además

$$\iint_{\partial B_\varepsilon(X_0)} \left[u\frac{\partial v}{\partial n}\right]\, dS = -\iint_{\partial B_\varepsilon(X_0)} u(x,y,z)\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^4}\, dS = -\frac{1}{\varepsilon^2}\iint_{\partial B_\varepsilon(X_0)} u(x,y,z)\, dS,$$

pero como u es continua y ε es pequeño, entones

0,3 pts

$$\lim_{\varepsilon\to 0} u(x,y,z) = u(x_0,y_0,z_0)$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon\to 0}\iint_{\partial B_\varepsilon(X_0)} \left[u\frac{\partial v}{\partial n}\right]\, dS &= -\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon^2}\iint_{\partial B_\varepsilon(X_0)} u(x,y,z)\, dS,\\ &= -u(x_0,y_0,z_0)\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon^2}\iint_{\partial B_\varepsilon(X_0)} dS, = -u(x_0,y_0,z_0)\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon^2}4\pi\ \varepsilon^2\\ &= -4\pi u(x_0,y_0,z_0).\end{aligned}$$

Por lo tanto tenemos que

$$\frac{1}{R^2}\iint_{\partial B_R(X_0)} u(x,y,z)\, dS - 4\pi u(x_0,y_0,z_0) = 0,$$

es decir,

$$u(x_0,y_0,z_0) = \frac{1}{4\pi R^2}\iint_{\partial B_R(X_0)} u(x,y,z)\, dS,$$

0,3 pts

lo que completa el problema.

P3) (a) Calcule la integral de flujo $\iint_S F \cdot n \, dS$, donde $F(x, y, z) = (xy, -x^2, x + z)$, S es la la porción del plano $2x + 2y + z = 6$ situada en el primer octante y n es la normal que apunta hacia arriba.

(3 pts.)

(b) Calcule la integral de línea

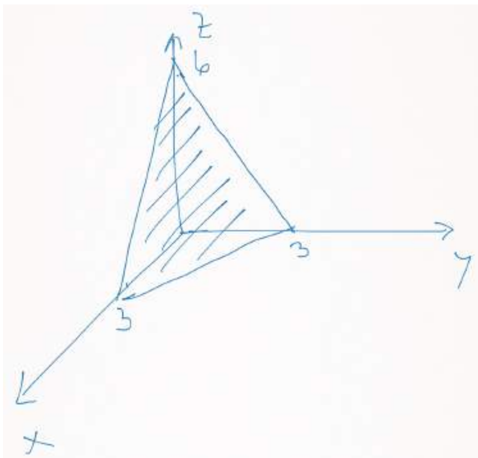
$$\oint_C 2yz^2 dx + xz^2 dy + 3xyz dz,$$

donde C es la curva de intersección de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ y el paraboloide $x^2 + y^2 = 3z$, recorrida en sentido antihorario y aplicando el Teorema de Stokes.

(3 pts.)

Solución:

(a) En este caso tenemos la superficie S correspondiente a la porción de plano en el primer octante,



0,5 pts

Así podemos considerar la parametrización de la superficie S como

$$x = x, \quad y = y \quad z = 6 - 2x - 2y, \quad 0 \le x \le 3, \; 0 \le y \le 3 - x.$$

0,5 pts

luego

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} \times \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 2\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}.$$

0,5 pts

Luego

$$\iint_S F\cdot n\, dS = \int_0^3\int_0^{3-x}(xy,-x^2,6-x-2y)\cdot(2,2,1)dydx$$

0,5 pts

$$= \int_0^3\int_0^{3-x}(2xy-2x^2+6-x-2y)dydx = \int_0^3 (xy^2-2x^2y+6y-xy-y^2)\,|_0^{3-x}dx$$

$$= \int_0^3 (x(3-x)^2-2x^2(3-x)+6(3-x)-x(3-x)-(3-x)^2)dx$$

$$= \int_0^3 (x(9-6x+x^2)-2x^2(3-x)+6(3-x)-x(3-x)-(9-6x+x^2))dx$$

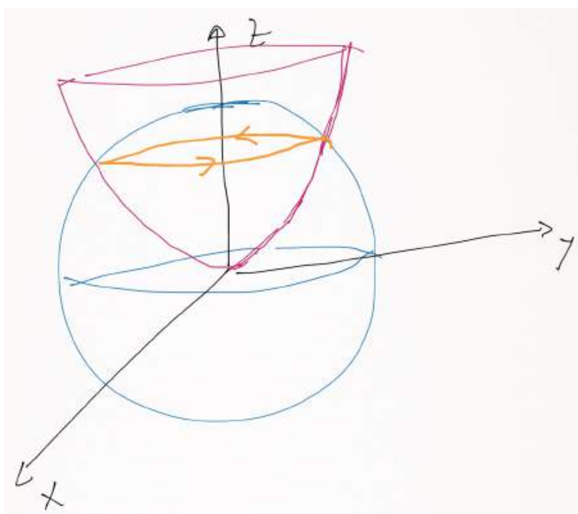
$$= \int_0^3 (9x-6x^2+x^3-6x^2+2x^3+18-6x-3x+x^2-9+6x-x^2)dx$$

$$= \int_0^3 (9+9x-12x^2+3x^3)dx = \left(9x-\frac{9}{2}x^2-4x^3+\frac{3}{4}x^4\right)|_0^3$$

$$= 27-\frac{81}{2}-108+\frac{243}{4} = -\frac{243}{4}.$$

1,0 pts

(b) Podemos observar que si interceptamos el paraboloide y la esfera se tiene la curva naranja siguiente:



0,5 pts

Luego podemos ver que se obtiene un cćirculo cuyo radio verifica

$$x^2+y^4 = 4-z^2 \quad x^2+y^2 = 3z,$$

luego

$$4-z^2 = 3z \Longrightarrow z = 1 \text{ o bien } z = -4.$$

es decir, es un cćirculo de ecuación $x^2+y^4 = 3$ paralelo al plano z=1, recorrido en sentido antihorario.

0,5 pts

Luego podemos reescribir en términos del Teorema de Stokes la integral de línda, es decir,

$$\oint_C F\cdot dr = \iint_S \text{rot } F\cdot ndS.$$

0,5 pts

En este caso

$$\text{rot } F = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 2yz^2 & xz^2 & 3xyz \end{vmatrix} = (3xz - 2xz)\,\hat{\imath} - (3yz - 4yz)\,\hat{\jmath} + \left(z^2 - 2z^2\right)\hat{k} = xz\ \hat{\imath} + yz\ \hat{\jmath} - z^2\ \hat{k}$$

0,5 pts

En este caso, consideraremos como superficie S el trozo de plano interior al círculo y paralelo al plano $z = 1$, con parametrización

$$x = r\cos\theta \quad y = r\sin\theta \quad z = 1, \quad 0 \le \theta \le 2\pi, \quad 0 \le r \le 1.$$

En este caso la normal debe ser orientada de manera que es con tercera componente positiva. Luego

$$\frac{\partial\varphi}{\partial r} \times \frac{\partial\varphi}{\partial\theta} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -r\sin\theta & r\cos\theta & 0 \end{vmatrix} = r\hat{k}.$$

0,5 pts

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \oint_C F \cdot dr = \iint_S \text{rot } F \cdot n dS &= \int_0^{2\pi}\int_0^1 \left(r\cos\theta\ \hat{\imath} + r\sin\theta\ \hat{\jmath} -\ \hat{k}\right) \cdot r\hat{k} dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^1 -r dr d\theta = \int_0^{2\pi} -\frac{r^2}{2}\ |_0^1 d\theta = -\frac{-1}{2}\int_0^{2\pi} d\theta = -\pi. \end{aligned}$$

0,5 pts

Notemos que también se pueden considerar las superficies del paraboloide o bien la de la esfera, cuyo borde sea la misma curva, en esos casos se debe ser cuidadoso con la elección de la dirección de la normal.