Universidad de Chile.
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas.
Departamento de Ingeniería Matemática.
Santiago, 10 de septiembre de 2009. Tiempo: 3:00 hrs.

CONTROL 1: MA2002 Cálculo Avanzado y Aplicaciones

Problema 1.

(a) (1pto) Para el campo

$$\vec{F}(\vec{r}) = (2\theta + \sqrt{2+\rho^2})\hat{\rho} + \frac{1}{\rho}e^{\theta^2}\hat{\theta} + (\theta^2 + \log(1+z^2))\hat{z}$$

expresado en coordenadas cilíndricas, calcule $\mathrm{rot}\vec{F}$.

(b) (1 pto) Bosqueje la superficie S de ecuación $x^2 + y^2 = 1$, $0 \leq z \leq x$, $y \geq 0$.

(c) (4 ptos) Calcule

$$\oint_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

donde $\vec{F}$ es el campo en la parte a) y S la superficie en la parte b) (∂S está orientada de $(1,0,0)$, a $(0,1,0)$ a $(1,0,1)$).

Problema 2.

(a) (1 pto) Definamos

$$\vec{F}(\vec{r}) = (2x + y\sin(x-y), -y + y\sin(x-y), (x^2+y^2)^{1/4} - z\sin(x-y))$$

¿En qué región puede afirmar que $\vec{F}$ es de clase C^1?

(b) (5 ptos) Calcule

$$\iint_S \vec{F} \cdot \hat{n} dA$$

donde S es la superficie $x^2 + y^2 = e^z$, y $0 \leq z \leq 1$, orientada según normales $\hat{n}$ que apunten alejándose del eje z.

Indicación: Puede argumentar que ciertas integrales que aparecen son cero por simetría.

Problema 3.

(a) (1 pto) Verifique que

$$\vec{F}(\vec{r}) = (y^2\cos(x) + z^3)\hat{\imath} + (2y\sin(x) - 4)\hat{\jmath} + (3xz^2 + 2z)\hat{k}$$

es un campo conservativo y encuentre un potencial escalar.

(b) (3 ptos) Calcule $\int_\Gamma \vec{G} \cdot d\vec{r}$ donde

$$\vec{G}(\vec{r}) = (y^2\cos(x) + 2z^3)\hat{\imath} + (2y\sin(x) - 4)\hat{\jmath} + (3xz^2 + 2z)\hat{k}$$

y Γ es la curva que consta del arco de $y = x^2$, $z = 0$ del origen al punto $(1,1,0)$ junto con el segmento recto de $(1,1,0)$ al punto $(0,0,1)$.

(c) (2 ptos) Considere una superficie regular y orientable S con campo de normales $\hat{n}$, y $\vec{F}, \vec{G} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dos campos vectoriales de clase C^1 tales que

$$\vec{F}(\vec{r}) = \vec{G}(\vec{r}) \quad \text{para todo } \vec{r} \in S.$$

Muestre que

$$(\mathrm{rot}\vec{F})(\vec{r}) \cdot \hat{n}(\vec{r}) = (\mathrm{rot}\vec{G})(\vec{r}) \cdot \hat{n}(\vec{r}) \quad \text{para todo } \vec{r} \in S.$$

De un ejemplo de S, $\vec{F}$, $\vec{G}$ que cumplan las condiciones anteriores pero

$$\mathrm{rot}\vec{F}(\vec{r}) \neq \mathrm{rot}\vec{G}(\vec{r}) \quad \text{para todo } \vec{r} \in S.$$

Indicación: Dado $\vec{r}_0 \in S$ utilice el teorema de Stokes en en una familia de superficies adecuadas (pequeñas y centradas en $\vec{r}_0$).

Divergencia y rotor y coordenadas ortogonales.

Si $\vec{r}(u,v,w)$ es un sistema de coordenadas ortogonal y $\vec{F} = F_u\hat{u}+F_v\hat{v}+F_w\hat{w}$ es un campo C^1, entonces

$$\operatorname{div}(\vec{F}) = \frac{1}{h_u h_v h_w}\left[\frac{\partial}{\partial u}(F_u h_v h_w) + \frac{\partial}{\partial v}(h_u F_v h_w) + \frac{\partial}{\partial w}(h_u h_v F_w)\right]$$

$$\operatorname{rot}(\vec{F}) = \frac{1}{h_u h_v h_w}\begin{vmatrix} h_u\hat{u} & h_v\hat{v} & h_w\hat{w} \\ \frac{\partial}{\partial u} & \frac{\partial}{\partial v} & \frac{\partial}{\partial w} \\ F_u h_u & F_v h_v & F_w h_w \end{vmatrix}$$

($\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}$ deben tener orientación positiva, es decir, $\hat{u} \times \hat{v} = \hat{w}$.)

PAUTA CONTROL I MA2002, 2009/2

P1.
a) (1pto) Para el campo

$$\vec{F}(\vec{r}) = (2\theta + \sqrt{2+\rho^2})\hat{\rho} + \frac{1}{\rho}e^{\theta^2}\hat{\theta} + (\theta^2 + \log(1+z^2))\hat{z}$$

expresado en coordenadas cilíndricas, calcule $\mathrm{rot}\vec{F}$.

b) (1 pto) Bosqueje la superficie S de ecuación $x^2+y^2=1$, $0 \leq z \leq x$, $y \geq 0$.

c) (4 ptos) Calcule

$$\oint_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

donde $\vec{F}$ es el campo en la parte a) y S la superficie en la parte b) (∂S está orientada de $(1,0,0)$, a $(0,1,0)$ a $(1,0,1)$).

Solución.
a) Utilizamos la fórmula

$$\mathrm{rot}(\vec{F}) = \frac{1}{h_u h_v h_w}\begin{vmatrix} h_u\hat{u} & h_v\hat{v} & h_w\hat{w} \\ \frac{\partial}{\partial u} & \frac{\partial}{\partial v} & \frac{\partial}{\partial w} \\ F_u h_u & F_v h_v & F_w h_w \end{vmatrix}$$

En coordenadas cilíndricas $(u,v,w) = (\rho,\theta,z)$ los factores escalares vienen dados por

$$h_\rho = 1, \quad h_\theta = \rho, \quad h_z = 1$$

y los vectores unitarios $\hat{\rho}$, $\hat{\theta}$, $\hat{z}$ forman un sistema positivo ($\hat{\rho}\times\hat{\theta} = \hat{z}$). Por lo tanto para un campo C^1 expresado de la forma $\vec{F} = F_\rho\hat{\rho} + F_\theta\hat{\theta} + F_z\hat{z}$ tenemos

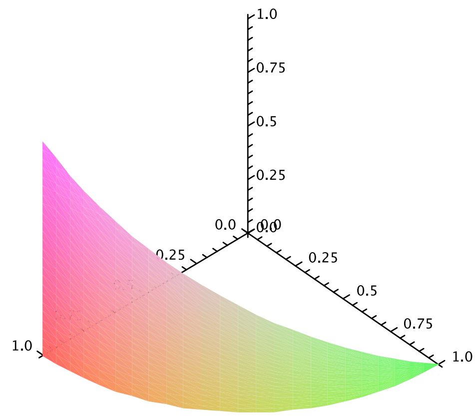
$$\mathrm{rot}(\vec{F}) = \frac{1}{\rho}\begin{vmatrix} \hat{\rho} & \rho\hat{\theta} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_\rho & F_\theta\rho & F_z \end{vmatrix}$$

Para el campo $\vec{F}$ del enunciado

$$\mathrm{rot}(\vec{F}) = \frac{1}{\rho}\begin{vmatrix} \hat{\rho} & \rho\hat{\theta} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial z} \\ (2\theta+\sqrt{2+\rho^2}) & e^{\theta^2} & (\theta^2+\log(1+z^2)) \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{\rho}2\theta\hat{\rho} - \frac{1}{\rho}2\hat{z}.$$

b) La superficie S es parte del cilindro $x^2+y^2=1$. Está limitada por los planos $z=0$, y $z=x$ y contenida en $x\geq 0$, $y \geq 0$.



c) Calcular $\oint_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ por definición resulta complicado. Por ejemplo para calcular la integral sobre el arco de circunferencia $x^2+y^2=1$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z=0$ podríamos parametrizarlo por

$$\gamma(\theta) = (\cos(\theta), \sin(\theta), 0) \quad \theta \in [0, \pi/2].$$

Esto nos lleva a calcular

$$\int_0^{\pi/2} \vec{F}(\gamma(\theta)) \cdot \gamma'(\theta)\, d\theta = \int_0^{\pi/2} e^{\theta^2}\, d\theta,$$

integral para la cual no hay fórmula explícita.

Sin embargo, utilizando el teorema de Stokes

$$\oint_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S \operatorname{rot}(\vec{F}) \cdot \hat{n}\, dA$$

donde debemos elegir $\hat{n}$ de modo que sea compatible con la oriención de ∂S. Como este borde va de $(1,0,0)$ a $(0,1,0)$ y luego a $(1,0,1)$ vemos que $\hat{n} = \hat{\rho}$. Entonces

$$\operatorname{rot}(\vec{F}) \cdot \hat{n} = (2\theta\hat{\rho} - 2\hat{z}) \cdot \hat{\rho} = 2\theta \qquad \text{sobre } S.$$

Por lo tanto

$$\oint_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 2 \iint_S \theta\, dA.$$

Podemos parametrizar S en coordenadas cilíndricas, con $\rho = 1$, $\theta \in [0, \pi/2]$ y $0 \leq z \leq \cos(\theta)$ (ya que sobre el cilindro $x = \cos(\theta)$). Así

$$\iint_S \theta\, dA = \int_0^{\pi/2} \int_0^{\cos(\theta)} \theta\, dz\, d\theta = \int_0^{\pi/2} \theta \cos(\theta)\, d\theta$$

ya que el elemento de área viene dado por $dA = \rho d\theta dz$, pero $\rho = 1$ sobre el cilindro. Integrando por partes

$$\iint_S \theta\, dA = \theta \sin(\theta)\Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \sin(\theta)\, d\theta = \frac{\pi}{2} + \cos(\theta)\Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2} - 1.$$

Por lo tanto

$$\oint_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \pi - 2.$$

Indicaciones de puntajes:

a) Conocer las coordenadas cilíndricas (vectores unitarios y factores escalares): 0.5
Calcular correctamente: 0.5

b) Algunos elementos: identificar que la superficie es parte del cilindro $x^2 + y^2 = 1$; reconocer que con las desigualdades $x \geq 0$, $y \geq 0$ se está restringiendo el ángulo (en cilíndricas) a $\theta \in [0, \pi/2]$. Identificar en el dibujo la restricción $0 \leq z \leq x$.

c) Plantear el teorema de Stokes correctamente: 0.5
Reconocer la orientación de S: 0.5
Fórmula para $\mathrm{rot}(F) \cdot \hat{n}$ sobre S: 1.0
Parametrización de S para la integración. Utilizar coordenadas adecuadas, identificar correctamente el rango de los parámetros para describir la superficie.: 1.0
Cálculo de la integral.: 1.0

P2.
a) (1 pto) Definamos

$$\vec{F}(\vec{r}) = (2x + y\sin(x-y), -y + y\sin(x-y), (x^2+y^2)^{1/4} - z\sin(x-y))$$

¿En qué región puede afirmar que $\vec{F}$ es de clase C^1?

b) (5 ptos) Calcule

$$\iint_S \vec{F}\cdot\hat{n}dA$$

donde S es la superficie $x^2+y^2=e^z$, y $0\le z\le 1$, orientada según normales $\hat{n}$ que apunten alejándose del eje z.

Solución.
a) Todos los términos que aparecen en $\vec{F}$ son C^∞ excepto $(x^2+y^2)^{1/4}$ que es C^∞ en $\mathbb{R}^3$ menos el eje z. Esta función no es diferenciable en ningún punto del eje z. Por lo tanto $\vec{F}$ es C^1 en $\mathbb{R}^3$ menos el eje z

b) Calcular esta integral por definición se ve difícil. Utilizamos el teorema de la divergencia, para lo cual calculamos

$$\mathrm{div}\vec{F} = 2 + y\cos(x-y) - 1 + \sin(x-y) - y\cos(x-y) - \sin(x-y) = 1 \quad \text{en } \mathbb{R}^3\setminus(\text{eje } z).$$

Si intentamos aplicar directamente el teorema de la divergencia en la región

$$\Omega = \{(x,y,z) : x^2+y^2 < e^z,\ 0<z<1\}$$

nos topamos con el problema de que $\vec{F}$ no es C^1 en $\bar{\Omega}$. Informalmente se llega al resultado correcto, pero para justificarlo conviene aplicar el teorema de la divergencia en

$$\Omega_\epsilon = \{(x,y,z) : \epsilon^2 < x^2+y^2 < e^z,\ 0<z<1\}$$

donde $0<\epsilon<1$. El campo $\vec{F}$ es C^1 en Ω_ϵ y por lo tanto

$$\iiint_{\Omega_\epsilon} \mathrm{div}F\,dV = \iint_{\partial\Omega_\epsilon} \vec{F}\cdot\hat{n}\,dA$$

donde $\partial\Omega_\epsilon$ debe llevar la normal exterior a Ω_ϵ. Por un lado

$$\iint_{\partial\Omega_\epsilon} \vec{F}\hat{n}\,dA = \iint_S \vec{F}\cdot\hat{n}dA + \iint_{T_{1,\epsilon}} \vec{F}\cdot\hat{n}dA + \iint_{T_{2,\epsilon}} \vec{F}\cdot\hat{n}dA + \int_{C_\epsilon} \vec{F}\cdot\hat{n}dA$$

donde $T_{1,\epsilon}$ representa la tapa de arriba, $T_{2,\epsilon}$ la de abajo y C_ϵ el cilindro $x^2+y^2=\epsilon^2$, $0\le z\le 1$. $T_{1,\epsilon}$ es un anillo a altura $z=1$ de radio exterior $e^{1/2}$ y radio interior ϵ, con normal $\hat{z}$. Luego sobre $T_{1,\epsilon}$,

$$\vec{F}\cdot\hat{n} = (x^2+y^2)^{1/4} - \sin(x-y)$$

Calculemos la integral del primer término usando coordenadas cilíndricas

$$\iint_{T_{1,\epsilon}} (x^2+y^2)^{1/4}\,dA = \int_\epsilon^{e^{1/2}}\int_0^{2\pi} \rho^{1/2}\rho\,d\theta d\rho = 2\pi\frac{2}{5}\rho^{5/2}\Big|_\epsilon^{e^{1/2}} = \frac{4}{5}\pi(e^{5/4}-\epsilon^{5/2}).$$

La integral del segundo término es cero por simetría

$$\iint_{T_{1,\epsilon}} \sin(x-y)\,dA = 0.$$

Sobre $T_{2,\epsilon}$, $\hat{n}=-\hat{z}$ y

$$\vec{F}\cdot\hat{n} = -(x^2+y^2)^{1/4}$$

Entonces

$$\iint_{T_{2,\epsilon}} \vec{F}\cdot\hat{n}\,dA = -\iint_{T_{2,\epsilon}} (x^2+y^2)^{1/4}\,dA = -\int_\epsilon^1\int_0^{2\pi} \rho^{1/2}\,d\theta d\rho = -2\pi\frac{2}{5}\rho^{5/2}\Big|_\epsilon^1$$

$$= -\frac{4}{5}\pi(1-\epsilon^{5/2}).$$

La integral sobre C_ϵ se puede acotar. Vemos que $\|\vec{F}(\vec{r})\| \leq C$ para $\vec{r}\in C_\epsilon$ y $0<\epsilon<1$, donde C es una constance que no depende de ϵ. Entonces

$$\left|\int_{C_\epsilon} \vec{F}\cdot\hat{n}dA\right| \leq \int_{C_\epsilon} \|\vec{F}\|dA \leq C\text{área}(C_\epsilon) \leq C\pi\epsilon^2.$$

De esto se deduce que

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_{C_\epsilon} \vec{F}\cdot\hat{n}dA = 0.$$

Por otro lado

$$\iiint_{\Omega_\epsilon} \operatorname{div} F\,dV = \iiint_{\Omega_\epsilon} 1\,dV = \operatorname{vol}(\Omega_\epsilon) = \operatorname{vol}(\Omega) - \pi\epsilon^2.$$

El volumen de Ω_ϵ se puede encontrar con ayuda de la fórmula

$$\operatorname{vol}(\Omega) = \int_0^1 (\text{área de la sección de } \Omega \text{ intersectada con el plano } z=a)\,da$$

$$= \pi\int_0^1 e^a\,da = \pi(e-1).$$

Usando los resultados anteriores

$$\pi(e-1)-\pi\epsilon^2 = \iint_S \vec{F}\cdot\hat{n}dA + \frac{4}{5}\pi(e^{5/4}-\epsilon^{5/2}) - \frac{4}{5}\pi(1-\epsilon^{5/2}) + \int_{C_\epsilon}\vec{F}\cdot\hat{n}dA.$$

Haciendo $\epsilon\to 0$ obtenemos

$$\iint_S \vec{F}\cdot\hat{n}dA = \pi(e-1) - \frac{4}{5}\pi(e^{5/4}-1) = \pi(e-e^{5/4}-1/5).$$

Forma alterntiva. Se puede primero decomponer

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

donde

$$\vec{F}_1 = (2x+y\sin(x-y), -y+y\sin(x-y), -z\sin(x-y))$$

y

$$\vec{F}_2 = (0,0,(x^2+y^2)^{1/4})$$

Para calcular la integral de $\vec{F}_1$ sobre S precedemos como antes aplicando el teorema de la divergencia en la región

$$\Omega = \{(x,y,z) : x^2+y^2<e^z,\ 0<z<1\}$$

Esto es casi lo mismo que considerar la región Ω_ϵ anterior, pero fijando $\epsilon=0$. Entonces $\partial\Omega$ consta de S, la tapa

$$T_1 : x^2+y^2\leq e, \quad z=1$$

y la tapa

$$T_2 : x^2+y^2\leq 1, \quad z=0$$

Por el teorema de la divergencia (que ahora podemos aplicar porque F_1 es C^1)

$$\iiint_\Omega \mathrm{div}\vec{F}_1\, dV = \iint_{\partial\Omega} \vec{F}_1 \cdot \hat{n}\, dA$$

La integrales sobre T_1 y T_2 son cero por simetría, y como

$$\mathrm{div}\vec{F}_1 = 2 + y\cos(x-y) - 1 + \sin(x-y) - y\cos(x-y) - \sin(x-y) = 1 \quad \text{en } \mathbb{R}^3$$

vemos que

$$\iiint_\Omega \mathrm{div}\vec{F}_1\, dV = \mathrm{vol}(\Omega_\epsilon) = \mathrm{vol}(\Omega) = \pi(e-1).$$

Luego

$$\iint_S \vec{F}_1 \cdot \hat{n} dA = \pi(e-1)$$

Para calcular

$$\iint_S \vec{F}_2 \cdot \hat{n} dA$$

utilizamos la región

$$\Omega = \{(x,y,z) : 1 < x^2 + y^2 < e^z,\ 0 < z < 1\}$$

que es lo mismo que el Ω_ϵ anterior con $\epsilon = 1$. Su frontera ahora está formada por

$$T : 1 \le x^2 + y^2 \le e, \quad z = 0$$

y el cilindro

$$C : x^2 + y^2 = 1, \quad 0 \le z \le 1.$$

Por el teorema de la divergencia, que podemos aplicar porque $\vec{F}_2$ es C^1 en esta región, se tiene

$$0 = \iiint_\Omega \mathrm{div}\vec{F}_2\, dV = \iint_{\partial\Omega} \vec{F}_2 \cdot \hat{n}\, dA$$

La integral sobre T se hace como antes, con $\epsilon = 1$. Luego sobre T,

$$\vec{F}_2 \cdot \hat{n} = (x^2 + y^2)^{1/4}$$

Usando coordenadas cilíndricas

$$\iint_T (x^2+y^2)^{1/4}\, dA = \int_1^{e^{1/2}} \int_0^{2\pi} \rho^{1/2} \rho\, d\theta d\rho = 2\pi \frac{2}{5} \rho^{5/2} \Big|_1^{e^{1/2}} = \frac{4}{5}\pi(e^{5/4} - 1).$$

Luego calculamos la integral sobre C, que es la misma superficie anterior C_ϵ con $\epsilon = 1$. Como ahora no hacemos $\epsilon \to 0$ debemos calcular la integral. C se puede parametrizar en coordenadas cilíndricas:

$$\rho = 1, \quad \theta \in [0, 2\pi], \quad 0 \le z \le 1$$

con la normal dada por $\hat{n} = -\hat{\rho}$, ya que queremos orientar la superficie con la normal exterior a Ω. Pero entonces $\vec{F}_2 \cdot \hat{n} = \hat{k} \cdot (-\hat{\rho}) = 0$. Así deducimos

$$\iint_S \vec{F}_2 \cdot \hat{n} dA = -\frac{4}{5}\pi(e^{5/4} - 1).$$

Finalmente

$$\iint_S \vec{F} \cdot \hat{n} dA = \iint_S \vec{F}_1 \cdot \hat{n} dA + \iint_S \vec{F}_2 \cdot \hat{n} dA = \pi(e-1) - \frac{4}{5}\pi(e^{5/4} - 1).$$

Indicaciones de puntajes (1era forma):

a) Basta encontrar la región correctamente.

b) Plantear el teorema de la divergencia en una región donde el campo sea C^1: 1

Divergencia de $\vec{F}$ 1pto

Cáculo de la integral de la divergencia: 1pto

Cálculo de las integrales en las otras superficies. Hay varias otras superficies. En la solución presentada hay 3 otras superficies. En dos de ellas se se calculó la integral y en la 3ra se acotó: 1.5 ptos

Reultado final: 0.5

Como regla general, si alguien considera el sólido que se forma al agregar los discos de arriba en $z = 1$ y de abajo en $z = 0$, y usa el teorema de la divergencia en una región donde el campo no es C^1 pero haciendo bien todos los cálculos, se debe descontar 1 punto. Si además hay errores se debe descontar admás de manera consistente con los puntajes anteriores.

Indicaciones de puntajes (2a forma):

a) Basta encontrar la región correctamente.

b) 0.5: Descomponer el campo.

0.5: Divergencia de $\vec{F}_1$

0.5: Cáculo de la integral de la divergencia de $\vec{F}_1$.

0.5: Cálculo de las integrales en las otras superficies del flujo de $\vec{F}_1$. Argumento de simetría.

0.5: Flujo sobre S de $\vec{F}_1$.

0.5: Divergencia de $\vec{F}_2$ e integral.

1: Cálculo de las integrales en las otras superficies del flujo de $\vec{F}_2$.

0.5: Flujo sobre S de $\vec{F}_2$.

P3.
a) (1 pto) Verifique que

$$\vec{F}(\vec{r}) = (y^2\cos(x) + z^3)\hat{\imath} + (2y\sin(x) - 4)\hat{\jmath} + (3xz^2 + 2z)\hat{k}$$

es un campo conservativo y encuentre un potencial escalar.

b) (3 ptos) Calcule $\int_\Gamma \vec{G}\cdot d\vec{r}$ donde

$$\vec{G}(\vec{r}) = (y^2\cos(x) + 2z^3)\hat{\imath} + (2y\sin(x) - 4)\hat{\jmath} + (3xz^2 + 2z)\hat{k}$$

y Γ es la curva que consta del arco de $y = x^2$, $z = 0$ del origen al punto $(1,1,0)$ junto con el segmento recto de $(1,1,0)$ al punto $(0,0,1)$.

c) (2 ptos) Considere una superficie regular y orientable S con campo de normales $\hat{n}$, y $\vec{F},\vec{G} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dos campos vectoriales de clase C^1 tales que

$$\vec{F}(\vec{r}) = \vec{G}(\vec{r}) \quad \text{para todo } \vec{r} \in S.$$

Usando una versión adecuada de la caracterización límite del rotor muestre que

$$(\mathrm{rot}\vec{F})(\vec{r})\cdot\hat{n}(\vec{r}) = (\mathrm{rot}\vec{G})(\vec{r})\cdot\hat{n}(\vec{r}) \quad \text{para todo } \vec{r} \in S.$$

De un ejemplo de S, $\vec{F}$, $\vec{G}$ que cumplan las condiciones anteriores pero

$$\mathrm{rot}\vec{F}(\vec{r}) \neq \mathrm{rot}\vec{G}(\vec{r}) \quad \text{para todo } \vec{r} \in S.$$

Solución.
a) Lo más simple es encontrar una función $f(x,y,z)$ escalar tal que $\nabla f = \vec{F}$. Queremos que se cumpla

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y^2\cos(x) + z^3$$

y encontramos

$$f(x,y,z) = \sin(x)y^2 + xz^3 + C(y,z).$$

Entonces

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2\sin(x)y + \frac{\partial C}{\partial y}$$

e imponemos $2\sin(x)y + \frac{\partial C}{\partial y} = 2y\sin(x) - 4$, de donde $C(y,z) = -4y + D(z)$. De donde

$$f(x,y,z) = \sin(x)y^2 + xz^3 - 4y + D(z).$$

Calculamos

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 3xz^2 + \frac{\partial D}{\partial z}$$

e imponemos que $3xz^2 + \frac{\partial D}{\partial z} = 3xz^2 + 2z$. Luego $D(z) = z^2 + A$, y finalmente encontramos

$$f(x,y,z) = \sin(x)y^2 + xz^3 - 4y + z^2$$

donde hemos escogido la constante final igual a cero.

b) Notamos que

$$\vec{G} = \vec{F} + z^3\hat{\imath}.$$

Luego

$$\int_\Gamma \vec{G}\cdot d\vec{r} = \int_\Gamma \vec{F}\cdot d\vec{r} + \int_\Gamma z^3\,dx.$$

Como $\vec{F} = \nabla f$
$$\int_\Gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = f(0,0,1) - f(0,0,0) = 1,$$
donde $(0,0,0)$ y $(0,01)$ son los puntos iniciales y finales de Γ respectivamente. Ahora calculamos
$$\int_\Gamma z^3\, dx = \int_{\Gamma_1} z^3\, dx + \int_{\Gamma_2} z^3\, dx$$
donde Γ_1 es el arco de $y = x^2$, $z = 0$ del origen al punto $(1,1,0)$ y Γ_2 es el segmento recto de $(1,1,0)$ al punto $(0,0,1)$. Como Γ_1 está contenido en $z = 0$, tenemos
$$\int_{\Gamma_1} z^3\, dx = 0.$$
Para calcular la segunda integral parametrizamos Γ_2 con
$$\gamma(t) = ((1-t),(1-t),t) \quad t \in [0,1].$$
Entonces
$$\int_{\Gamma_2} z^3\, dx = -\int_0^1 t^3\, dt = \frac{1}{4}.$$
De este modo
$$\int_\Gamma \vec{G} \cdot d\vec{r} = \frac{3}{4}.$$
c) Fijamos un punto $\vec{r}_0 \in S$. Dado $r > 0$ pequeño definimos S_r la superficie
$$S_r = \{\vec{r} \in S \ : \ \|\vec{r} - \vec{r}_0\| \leq r\}.$$
Por el teorema de Stokes
$$\iint_{S_r} \operatorname{rot}(\vec{F} - \vec{G}) \cdot \hat{n}\, dA = \int_{\partial S_r} (\vec{F} - \vec{G}) \cdot d\vec{r}.$$
Por la hipótesis del enunciado, es decir, que $\vec{F}$ y $\vec{G}$ coinciden sobre S, se tiene que
$$\int_{\partial S_r} (\vec{F} - \vec{G}) \cdot d\vec{r} = 0$$
Así
$$\iint_{S_r} \operatorname{rot}(\vec{F} - \vec{G}) \cdot \hat{n}\, dA = 0 \quad \forall r > 0 \text{ pequeño}.$$
La idea ahora es hacer $r \to 0$, pero debemos normalizar de modo que el límite no resulte cero. Para esto dividimos por el área de S_r:
$$\frac{1}{A(S_r)} \iint_{S_r} \operatorname{rot}(\vec{F} - \vec{G}) \cdot \hat{n}\, dA = 0 \quad \forall r > 0 \text{ pequeño}$$
y afirmamos que si $g : S \to \mathbb{R}$ es continua
$$\lim_{r \to 0} \frac{1}{A(S_r)} \iint_{S_r} g\, dA = g(\vec{r}_0). \tag{*}$$
En efecto, por la continuidad de g, dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para $\vec{r} \in S$, si $\|\vec{r} - \vec{r}_0\| \leq \delta$ entonces $|g(\vec{r}) - g(\vec{r}_0)| \leq \epsilon$. Escogiendo $0 < r < \delta$
$$\left| g(\vec{r}_0) - \frac{1}{A(S_r)} \iint_{S_r} g\, dA \right| = \left| \frac{1}{A(S_r)} \iint_{S_r} (g(\vec{r}_0) - g)\, dA \right|$$
$$\leq \frac{1}{A(S_r)} \iint_{S_r} |g(\vec{r}_0) - g|\, dA \leq \frac{1}{A(S_r)} \iint_{S_r} \epsilon\, dA = \epsilon.$$

Esto prueba por definión la fórmula (*). Aplicando esto a $g = \text{rot}(\vec{F} - \vec{G}) \cdot \hat{n}$, que por las hipótesis define una función continua sobre S, deducimos

$$\text{rot}(\vec{F} - \vec{G})(\vec{r}_0) \cdot \hat{n}(\vec{r}_0),$$

es decir

$$\text{rot}(\vec{F})(\vec{r}_0) \cdot \hat{n}(\vec{r}_0) = \text{rot}(\vec{G}) \cdot \hat{n}(\vec{r}_0).$$

Como $\vec{r}_0 \in S$ es arbitrario se deduce la igualdad en todo S.

Veamos ahora un ejemplo que muestre que en general los rotores de $\vec{F}$ y $\vec{G}$ pueden ser distintos en todo punto de S. Consideremos $\vec{F} = (0,0,0)$, $\vec{G} = (z,0,0)$ y S cualquier superficie contenida en $z = 0$ (por ejemplo el disco $x^2 + y^2 \leq 1$ en $z = 0$). Es claro que $\vec{F} = \vec{G}$ en S y que $\text{rot}(F) = (0,0,0)$. Sin embargo

$$\text{rot}(\vec{G}) = \hat{\jmath}.$$

Indicaciones de puntajes:

a) Basta encontrar f, lo que se puede hacer por inspección. No es necesario calcular el rotor antes.

b) Plantear la integral como suma de integral de un campo conservativo y z^3dx: 0.6

Evaluar la integral del campo conservativo usando el campo escalar: 1.2

Evaluar la integral de z^3dx en el camino: 1.2

Si no se sigue el esquema anterior, hacer la integral por definición resulta muy complicado. Por plantearla (con todas las curvas parametrizadas correctamente): 0.5

c) Idea de definir una superficie pequeña como S_r (hay muchas otras que sirven. Cualquier superficie borde regular tal que contenga a un punto fijo $\vec{r}_0$ y tengan diámetro tendiendo a cero sirve): 0.5

Aplicar Stokes para concluir que las integrales de rotores por la normal coinciden sobre S_r: 0.5

De alguna manera recuperar el valor del rotor por la normal en un punto como un límite: 0.5

Ejemplo: 0.5