Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
MA26B: Matemáticas Aplicadas
Profesor: Felipe Álvarez D., Pauta por Cristóbal Guzmán P.

Pauta Control 1 año 2006

Problema 3
(a) Sea $\vec{r}$ el campo vectorial dado por $\vec{r}(x,y,z) = (x,y,z)$. Dada una superficie regular S un vector fijo $\vec{v_0} \in I\!R^3$, demuestre que:

$$\int\int_S \vec{v_0}\cdot d\vec{S} \quad \begin{cases} \frac{1}{2}\int_{\partial S}(\vec{v_0}\times\vec{r})\cdot d\vec{r} & \text{si } S \text{ tiene borde } \partial S \neq \emptyset \\ 0 & \text{si } S \text{ es una superficie cerrada.} \end{cases}$$

donde S y ∂S tienen orientaciones compatibles (explique).

Sol:
Caso 1: $\partial \vec{S} \neq \emptyset$
En este caso usaremos el Teorema de Stokes, notanto que se respetará el sentido de las orientaciones, con el único fin de que no existan ambigüedades en los signos (en otras palabras, respetaremos la *regla de la mano derecha*).
Consideremos el campo:

$$\vec{F}(x,y,z) = \frac{1}{2}(\vec{v_0}\times\vec{r})$$

Entonces si:

$$\vec{v_0} = (v_1,v_2,v_3) = v_1\hat{\imath} + v_2\hat{\jmath} + v_3\hat{k}$$
$$\vec{r} = (x,y,z) = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k}$$

Tenemos que:

$$\vec{v_0}\times\vec{r} = (v_2z - v_3y)\hat{\imath} - (v_1z - v_3x)\hat{\jmath} + (v_1y - v_2x)\hat{k}$$

Luego, el rotor se calcula:

$$rot(\vec{v_0}\times\vec{r}) = \nabla\times(\vec{v_0}\times\vec{r}) = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ (v_2z - v_3y) & -(v_1z - v_3x) & (v_1y - v_2x) \end{vmatrix}$$

$$= 2v_1\hat{\imath} + 2v_2\hat{\jmath} + 2v_3\hat{k} = 2v_0$$

Lo que es equivalente a:

$$\nabla\times\vec{F} = \vec{v_0}$$

Entonces se tiene lo pedido (por Stokes):

$$\int\int_S \vec{v_0}\cdot d\vec{S} = \frac{1}{2}\int_{\partial S}(\vec{v_0}\times\vec{r})\cdot d\vec{r}$$

Caso 2: $\partial S = \emptyset$
En este caso, se puede argumentar simplemente por una ley de conservación de flujo (visto en clases), o bien directamente usar el Teorema de la Divergencia, notando que si consideramos $\vec{G} = v_0$:

$$div(\vec{G}) = 0$$

Luego:

$$\int\int_S \vec{v_0} \cdot d\vec{S} = \int\int\int_{V(S)} div(G)dV = 0$$

Puntaje Asignado: Se asigna un punto a cada caso. Para el caso 1 se tienen 0,3 por usar Stokes, 0,5 por la función escogida y 0,2 por los cálculos. Para el caso 2 se asignan 0,5 por usar Teorema de la Divergencia, 0,4 por la función y 0,1 por los cálculos necesarios (si se argumenta por conservación de flujo se tiene todo el puntaje directamente).

(b) Considere la superficie S correspondiente a la sección del paraboloide de ecuación $z = 1 + x^2 + y^2$ que queda dentro del cilindro $(x-1)^2 + y^2 \leq 1$

(b.1) Bosqueje S. Encuentre una parametrización para S en coordenadas cilíndricas.
(b.2) Calcule el vector normal unitario a S y el elemento de superficie.
(b.3) Calcular la masa total de S suponiendo densidad superficial de masa:

$$f(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}$$

Sol:
(b.1) Aqu es posible obtener una parametrizacin con respecto al par (ρ, θ), o bien con el par (z, θ).
Llamaremos a las restricciones como:

$$(1) \quad z = 1 + x^2 + y^2 \qquad (2) \quad (x-1)^2 + y^2 \leq 1$$

Caso 1: (ρ, θ)
De (1) se tiene que:

$$\rho^2 = z - 1 \quad \Rightarrow \quad z(\rho) = \rho^2 + 1$$

De (2) obtenemos:

$$\rho^2 - 2\rho\cos\theta + 1 \leq 1 \quad \Rightarrow \quad \rho^2 \leq 2\rho\cos\theta \Rightarrow \quad 0 \leq \rho \leq 2\cos\theta$$

De aquí se deduce que $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, pues el coseno debe ser positivo.
Entonces, una parametrización válida es:

$$\phi(\rho,\theta) = (\rho\cos\theta, \rho\operatorname{sen}\theta, \rho^2+1)$$

con dominio de definición

$$\mathcal{D} = \{(\rho,\theta) | \theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], \quad \rho \in [0, 2\cos\theta]\}$$

Caso 2: (z,θ)
Aquí de (1) se tiene directamente que $\rho(z) = \sqrt{z-1}$
Y de (2) se obtiene que: $0 \leq \rho(z) \leq 2\cos\theta$ (haciendo un desarrollo análogo al del caso 1).
Aquí era posible reemplazar en la última inecuación $\rho(z)$ por el valor obtenido de la ecuación (1). Elevando al cuadrado y sumando resulta:

$$1 \leq z \leq 1 + 4\cos^2\theta$$

Entonces otra parametrización válida sería:

$$\psi(z,\theta) = (\sqrt{z-1}\cos\theta, \sqrt{z-1}\operatorname{sen}\theta, z)$$

con dominio

$$\mathcal{D}' = \{(z,\theta) | \theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], \quad z \in [1, 1+4\cos^2\theta]\}$$

(b.2) Veremos primero que en ambos casos las parametrizaciones son regulares (calculando las derivadas parciales), más aún son ortogonales. Así, tendrá sentido calcular el vector normal y el posterior cálculo de la masa.

Caso 1:

$$\frac{\partial\phi}{\partial\rho} = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, 2\rho)\frac{\partial\phi}{\partial\theta} = (-\rho\operatorname{sen}\theta, \rho\cos\theta, 0)$$

Es fácil ver que el producto interno entre estos dos vectores es 0, por lo que son ortogonales.
Ahora para obtener el vector normal a estas derivadas parciales calculamos:

$$\frac{\partial\phi}{\partial\rho}\times\frac{\partial\phi}{\partial\theta} = -\rho\operatorname{sen}^2\theta\hat{k} + 2\rho^2\operatorname{sen}\theta\hat{\jmath} - \rho\cos^2\theta\hat{k} + 2\rho^2\cos\theta\hat{\imath} = (2\rho^2\cos\theta, 2\rho^2\operatorname{sen}\theta, -\rho)$$

Y su norma:

$$||\frac{\partial\phi}{\partial\rho}\times\frac{\partial\phi}{\partial\theta}||^2 = 4\rho^4 + \rho^2 = \rho^2(4\rho^2+1)$$

Entonces la normal unitaria se escribe como sigue:

$$\hat{n} = \frac{\frac{\partial\phi}{\partial\rho}\times\frac{\partial\phi}{\partial\theta}}{||\frac{\partial\phi}{\partial\rho}\times\frac{\partial\phi}{\partial\theta}||} = \frac{(2\rho\cos\theta, 2\rho\operatorname{sen}\theta, -1)}{\sqrt{4\rho^2+1}}$$

Y el elemento de superficie:

$$dA = ||\frac{\partial \phi}{\partial \rho} \times \frac{\partial \phi}{\partial \theta}||d\rho d\theta = \rho\sqrt{4\rho^2+1}d\rho d\theta$$

Caso 2:

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} = (\frac{1}{2\sqrt{z-1}}\cos\theta, \frac{1}{2\sqrt{z-1}}\operatorname{sen}\theta, 1)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial \theta} = (-\sqrt{z-1}\operatorname{sen}\theta, \sqrt{z-1}\cos\theta, 0)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} \times \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = \frac{1}{2}\cos^2\theta\hat{k} + \frac{1}{2}\operatorname{sen}^2\theta\hat{k} - \sqrt{z-1}\operatorname{sen}\theta\hat{\jmath} - \sqrt{z-1}\cos\theta\hat{\imath}$$

$$= (-\sqrt{z-1}\cos\theta, \sqrt{z-1}\operatorname{sen}\theta, \frac{1}{2})$$

$$||\frac{\partial \psi}{\partial z} \times \frac{\partial \psi}{\partial \theta}||^2 = z - \frac{3}{4}$$

Entonces el vector normal es:

$$\hat{n} = \frac{(-\sqrt{z-1}\cos\theta, \sqrt{z-1}\operatorname{sen}\theta, \frac{1}{2})}{z-\frac{3}{4}}$$

Y el elemento de área:

$$dA = \sqrt{z-\frac{3}{4}}dzd\theta$$

(b.3) Este desarrollo solo se hará para el caso (1) (para el otro caso es análogo).

$$\mathcal{M} = \int\int_{\mathcal{D}} ||\frac{\partial \phi}{\partial \rho} \times \frac{\partial \phi}{\partial \theta}||f d\rho d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\cos\theta} \rho d\rho d\theta$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{(2\cos\theta)^2}{2}d\theta = 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta d\theta = 2[\frac{\pi}{2}] = \pi$$

Puntaje Asignado:

En la parte 1, se dieron 0,5 ptos. por el dibujo, 0,5 por cálculos y 0,5 por la parametrización correcta. En la parte 2 0,5 por el vector normal, 0,5 por el elemento de superficie y 0,5 por los cálculos. En la parte 3 se asignaron 0,5 por escribir la fórmula de la masa y 0,5 por los cálculos