Universidad de Chile.
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas.
Departamento de Ingeniería Matemática.
Santiago, 23 de Septiembre de 2008. Tiempo: 3:00 hrs.

CONTROL 1: MA2A2 Cálculo Avanzado y Aplicaciones

Problema 1.

(a) [2.0 pts.] Sea S la superficie de ecuación $x^2+y^2-(z-6)^2=0$ para $3\leq z\leq 6$. Bosqueje S, indique gráficamente una orientación sobre S y calcule el flujo neto a través de S del campo $\vec{F}=x(3-z)\hat{\imath}+y(3-z)\hat{\jmath}+(3-z)^2\hat{k}$.

(b) [2.0 pts.] Sea $\vec{F}=yx^2\hat{\imath}-xz\hat{\jmath}+3y\hat{k}$. Considere la superficie S del paraboloide $2x=z^2+y^2$ para $0\leq x\leq 2$. Bosqueje S, indique gráficamente una orientación sobre S y evalúe la integral de flujo del rotor de $\vec{F}$ a través de S.

(c) [2.0 pts.] Determine los valores de las constantes α, β y γ para que el campo vectorial $\vec{F}=(x+2y+\alpha z)\hat{\imath}+(\beta x-3y-z)\hat{\jmath}+(4x+\gamma y+2z)\hat{k}$ sea conservativo, en cuyo caso encuentre un potencial para $\vec{F}$.

Problema 2.

(a) [3.0 pts.] Sea Γ la curva que se obtiene de intersectar el casquete esférico unitario (centrado en el origen) con la superficie de ecuación $z=\sqrt{x^2+y^2}$. Considere Γ recorrida en sentido antihorario. Calcule la circulación a lo largo de Γ del siguiente campo descrito en coordenadas cilíndricas: $\vec{F}(\rho,\theta,z)=(z-\rho)\dfrac{\theta^2}{2}\hat{\rho}+z\theta\hat{\theta}+\dfrac{\theta^2}{2}\rho\hat{k}$.

(b) [3.0 pts.] Considere el campo en coordenadas esféricas dado por $\vec{F}=r^2\hat{r}+r\,\theta\,\mathrm{sen}^3\varphi\,\hat{\theta}$. Calcule $\mathrm{div}\vec{F}$ en todo punto del dominio de diferenciabilidad de $\vec{F}$, vale decir, $\mathbb{R}^3\setminus \mathrm{Eje\,Z}$. Sea Ω la región de la esfera unitaria $x^2+y^2+z^2\leq 1$ que intersecta al cono infinito $z\geq\sqrt{x^2+y^2}$. Defina $\Omega(\varepsilon)=\{(x,y,z)\in\Omega \mid x^2+y^2\geq\varepsilon^2\}$ para $\varepsilon>0$ pequeño. Bosqueje $\Omega(\varepsilon)$ y encuentre el valor de $I=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\iiint\limits_{\Omega(\varepsilon)}\mathrm{div}\vec{F}\,dV$.

Problema 3. Sea $\Omega\subseteq\mathbb{R}^3$ un abierto acotado de frontera regular a trozos $\partial\Omega$, orientada según la normal exterior. Consideremos un campo escalar ϕ de clase C^2 en un dominio $\mathcal{U}\supseteq\Omega\cup\partial\Omega$ y supongamos que ϕ es armónico en Ω, es decir, $\Delta\phi=0$ en Ω. Sea $\vec{p}\in\mathrm{int}(\Omega)$ y definamos la función $\psi(\vec{r})=1/\|\vec{r}-\vec{p}\|$ con $\vec{r}=(x,y,z)$.

(a) [2.0 pts.] Calcule $\nabla\psi(\vec{r})$ para $\vec{r}\neq\vec{p}$. Muestre que $\Delta\psi=0$ en $\mathbb{R}^3\setminus\{\vec{p}\}$.

(b) [4.0 pts.] Sea $B(\vec{p},\delta)\subseteq\Omega$ la esfera de centro $\vec{p}$ y radio $\delta>0$, contenida en Ω. Pruebe que

$$\iint\limits_{\partial\Omega}(\phi\nabla\psi-\psi\nabla\phi)\cdot d\vec{S}=\iint\limits_{\partial B(\vec{p},\delta)}(\phi\nabla\psi-\psi\nabla\phi)\cdot d\vec{S}$$

Bonus.[1] Es posible mostrar que $\lim\limits_{\delta\to 0^+}\iint\limits_{\partial B(\vec{p},\delta)}(\phi\nabla\psi-\psi\nabla\phi)\cdot d\vec{S}=-4\pi\phi(\vec{p})$ (<u>no se pide que lo haga</u>), de donde se concluye que $\phi(\vec{p})=-\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{\partial\Omega}(\phi\nabla\psi-\psi\nabla\phi)\cdot d\vec{S}$. Esto prueba que es posible reconstruir ϕ en Ω a partir del conocimiento de ϕ y su gradiente $\nabla\phi$ sobre el borde $\partial\Omega$.

[1] El alumno que decida probar este límite durante el control, debe entregar su respuesta en una hoja separada. En ese caso optará a un *bonus* máximo de un punto (1.0 pts.) a sumarse a su pregunta con menor puntaje cuando corresponda, sin superar el 7.0 como nota final. Esto <u>no</u> es acumulable para futuros controles.

Control 1 : MA2A2 - 2008 1.1

Pauta Problema 1

(a) Sea $S: x^2+y^2-(z-6)^2=0, \; 3 \leq z \leq 6$

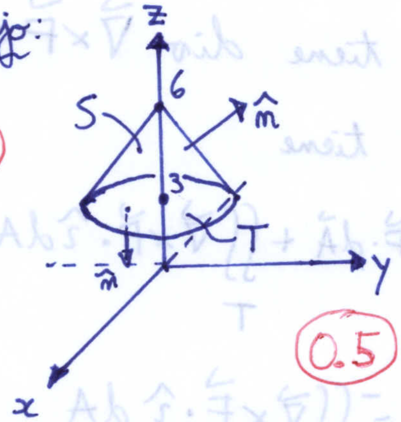
$$\Updownarrow$$

$z = 6 \pm \sqrt{x^2+y^2}$ y como $z \leq 6$ nos quedamos con la raíz negativa.

Además $z \geq 3 \Rightarrow x^2+y^2 \leq 9$. Así $S: z = 6-\sqrt{x^2+y^2}, \; x^2+y^2 \leq 9$

Bosquejo:

0.5



Se pide evaluar $\Phi = \iint_S \vec{F}\cdot d\vec{A}$

con $\vec{F} = x(3-z)\hat{\imath} + y(3-z)\hat{\jmath} + (3-z)^2\hat{k}$

Aplicamos el Teo. de la Divergencia:

0.5 $\quad \operatorname{div}\vec{F} = (3-z)+(3-z)+2(3-z)\cdot(-1) = 0$ en $\mathbb{R}^3$

Sea Ω la región encerrada por el cono incluyendo la tapa $T: z=3, \; x^2+y^2 \leq 9$

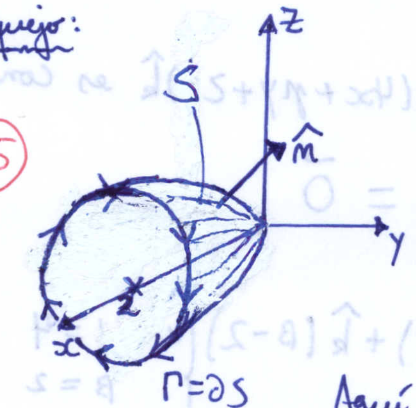
Luego $\quad 0 = \iiint_\Omega \operatorname{div}\vec{F}\, dV = \oiint_{\partial\Omega} \vec{F}\cdot d\vec{A} = \iint_S \vec{F}\cdot d\vec{A} + \iint_T \vec{F}\cdot d\vec{A}$ 0.5

0.5 Pero $\vec{F} = \vec{0}$ si $z=3$ entonces $\iint_T \vec{F}\cdot d\vec{A} = 0. \quad \therefore \Phi = 0.$

(b) Sea $S: \; 2x = z^2+y^2, \; 0 \leq x \leq 2 \iff x = \frac{1}{2}(z^2+y^2), \; z^2+y^2 \leq 4$

Bosquejo:

0.5



Se pide evaluar $\Phi = \iint_S \vec{\nabla}\times\vec{F}\cdot d\vec{A}$

con $\vec{F} = yx^2\hat{\imath} - xz\hat{\jmath} + 3y\hat{k}$

Por el Teo. de Stokes: $\iint_S \vec{\nabla}\times\vec{F}\cdot d\vec{A} = \oint_\Gamma \vec{F}\cdot d\vec{r}$

0.5 $\quad \Gamma = \partial S$

Aquí $\Gamma: x=2, \; z^2+y^2=4$ (orientación opuesta al dibujo)

0.5 Parametrización: $\vec{r}(\theta) = 2\hat{\imath} + 2\cos\theta\,\hat{\jmath} + 2\operatorname{sen}\theta\,\hat{k}, \; \theta \in [0,2\pi]$

$\Rightarrow \oint_\Gamma \vec{F}\cdot d\vec{r} = -\int_0^{2\pi} [-2\cdot 2\operatorname{sen}\theta\,\hat{\jmath} + 3\cdot 2\cos\theta\,\hat{k}]\cdot[-2\operatorname{sen}\theta\,\hat{\jmath} + 2\cos\theta\,\hat{k}]\,d\theta = -\int_0^{2\pi} [8\operatorname{sen}^2\theta + 12\cos^2\theta]\,d\theta$

0.5 (orientación)

$= -\int_0^{2\pi} [8 + 4\cos^2\theta]\,d\theta = -\left(16\pi + 4\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\right) = -20\pi$

(b) (Continuación)

Otra alternativa: Es considerar la tapa T: $x=2$, $y^2+z^2 \le 4$

Por el Teo. de Stokes aplicado nuevamente:

$$\iint_S \vec\nabla\times\vec F\cdot d\vec A \quad \oint_\Gamma \vec F\cdot d\vec A = \int_T \vec\nabla\times\vec F\cdot(-\hat\imath)\,dA$$

O bien, como por identidad se tiene div $\vec\nabla\times\vec F = 0$,

por el Teo. de la divergencia se tiene

$$0 = \iiint \operatorname{div}\vec\nabla\times\vec F\,dV = \iint_S \vec\nabla\times\vec F\cdot d\vec A + \iint_T \vec\nabla\times\vec F\cdot\hat\imath\,dA$$

En cualquier caso,
$$\iint_S \vec\nabla\times\vec F\cdot d\vec A = -\iint_T \vec\nabla\times\vec F\cdot\hat\imath\,dA$$

Pero
$$(\vec\nabla\times\vec F)\cdot\hat\imath = \begin{vmatrix} \hat\imath & \hat\jmath & \hat k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ yx^2 & -xz & 3y \end{vmatrix}\cdot\hat\imath = 3+x$$ 0.5

Luego
$$\iint_S \vec\nabla\times\vec F\cdot d\vec A = -\iint_T (3+2)\,dA = -5\times A(T) = -20\pi$$ 0.5

(c) $\vec F = (x+2y+\alpha z)\hat\imath + (\beta x-3y-z)\hat\jmath + (4x+\gamma y+2z)\hat k$ es conservativo

0.5 $\iff \vec\nabla\times\vec F = \vec 0 \iff \begin{vmatrix} \hat\imath & \hat\jmath & \hat k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = \vec 0$

0.5 $\iff \hat\imath(\gamma+1)+\hat\jmath(-4+\alpha)+\hat k(\beta-2) = \vec 0 \iff \alpha=4,\ \beta=2,\ \gamma=-1$

1.0 Potencial: Buscamos g tq $\vec F = -\nabla g$ (o bien $\vec F = \nabla g$)

Integrando se obtiene $g(x,y,z) = -\frac{x^2}{2} - 2xy - 4xz + \frac{3}{2}y^2 + zy - z^2$ (o bien lo mismo salvo signo).

Observación: Si el potencial se encontró por inspección, entonces se debe verificar a posteriori que sirve.

(c) (Continuación)

Veamos el detalle de la integración:

0.5

Primero $\dfrac{\partial g}{\partial x} = -F_1 \Rightarrow g(x,y,z) = -\int F_1\, dx + C_1(y,z)$

$$= -\frac{x^2}{2} - 2xy - 4xz + C_1(y,z)$$

Pero $\dfrac{\partial g}{\partial y} = -F_2 \Leftrightarrow -\cancel{2x} + \dfrac{\partial C_1}{\partial y}(y,z) = -\cancel{2x} + 3y + z$

$$\Rightarrow \quad C_1(y,z) = \int (3y+z)\, dy + C_2(z) = \frac{3}{2}y^2 + yz + C_2(z)$$

0.5

Finalmente

$$\frac{\partial g}{\partial z} = -F_3 \Leftrightarrow \frac{\partial C_2}{\partial z} = 4x - y - F_3 = \cancel{4x} - \cancel{y} - \cancel{4x} + \cancel{y} - 2z \Rightarrow C_2(z) = -z^2 + C$$

$$\therefore \quad g(x,y,z) = \frac{-x^2}{2} - 2xy - 4xz + \frac{3}{2}y^2 + yz - z^2 + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

<u>Observación</u>: Si se buscó g tq. $\vec{F} = \nabla g$, está correcto siempre que haya sido consistente con los signos.

<u>Obs</u>: Consultas sobre la pauta a falvarez@dim.uchile.cl

Control 1: MA2A2 - 2008

Pauta Problema 2

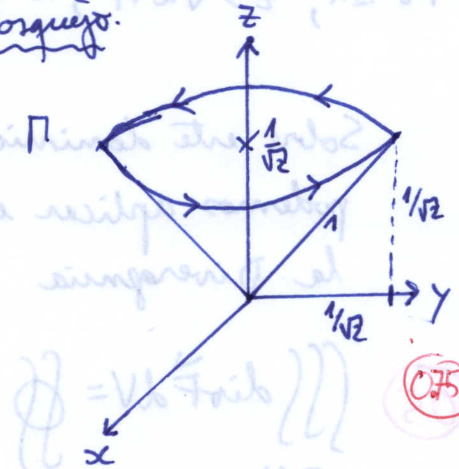
(a) Sea Γ la intersección de $x^2+y^2+z^2=1$ con $z=\sqrt{x^2+y^2}$ $(z\geq 0)$

Tenemos entonces que $z\geq 0 \wedge 2z^2=1 \Leftrightarrow z=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Así $\Gamma: z=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $x^2+y^2=\frac{1}{2}$

Bosquejo.

0.5



Se pide evaluar $\Phi = \oint \vec{F}\cdot d\vec{r}$

con $\vec{F} = (z-\rho)\frac{\theta^2}{2}\hat{\rho} + z\theta\,\hat{\theta} + \frac{\theta^2}{2}\rho\,\hat{k}$

Parametrizamos Γ en cilíndricas

0.75 $\vec{r}(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{\rho} + \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{k}$, $\theta\in[0,2\pi)$

de modo que

0.75 $d\vec{r} = \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{\theta}\,d\theta$.

Así

$$\oint_\Gamma \vec{F}\cdot d\vec{r} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{2\pi} \vec{F}\Big|_{\substack{\rho=\frac{1}{\sqrt{2}}\\ z=\frac{1}{\sqrt{2}}}}\cdot\hat{\theta}\,d\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{2\pi}\frac{1}{\sqrt{2}}\theta\,d\theta = \frac{1}{2}\frac{\theta^2}{2}\Bigg|_{\theta=0}^{\theta=2\pi} = \pi^2$$

0.5 0.5

Observación: Tal como está descrito, el campo tiene una singularidad en $\rho=0$, por lo tanto no es posible aplicar el Teo. de Stokes a una superficie que intersecte al eje Z. Más aún, el campo tiene un comportamiento distinto en $\theta=0$ y $\theta=2\pi$, lo que no afecta la integral de camino pero hace que el rotor no tenga sentido en esos extremos. El alumno que no detectó esta dificultad y por consiguiente aplicó incorrectamente el Teo. de Stokes tiene una penalización de 0.5 pts.

Un ejemplo de esto sería: (1) $\Gamma=\partial T$ con T la tapa $z=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\rho\leq\frac{1}{\sqrt{2}}$, orientada según $\hat{k}$ 0.5

(2) luego se calcula $(\vec{\nabla}\times\vec{F})\cdot\hat{k} = \frac{1}{\rho}\begin{vmatrix}\hat{\rho} & \rho\hat{\theta} & \hat{k}\\ \frac{\partial}{\partial\rho} & \frac{\partial}{\partial\theta} & \frac{\partial}{\partial z}\\ F_\rho & \rho F_\theta & F_z\end{vmatrix}\cdot\hat{k} = \theta$ 0.5 (válido en $\rho>0$ y $\theta\in(0,2\pi)$)

0.5

(3) Se evalúa $\iint_T \vec{\nabla}\times\vec{F}\cdot\hat{k}\,dA = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\int_0^{2\pi}\theta\rho\,d\theta\,d\rho = \frac{\pi^2}{2}$ $\left(\neq \pi^2 = \oint_\Gamma \vec{F}\cdot d\vec{r}\right)$

0.5

(b) Dado $\vec{F} = r^2\hat{r} + r\theta \operatorname{sen}^3\varphi\,\hat{\theta}$, tenemos que

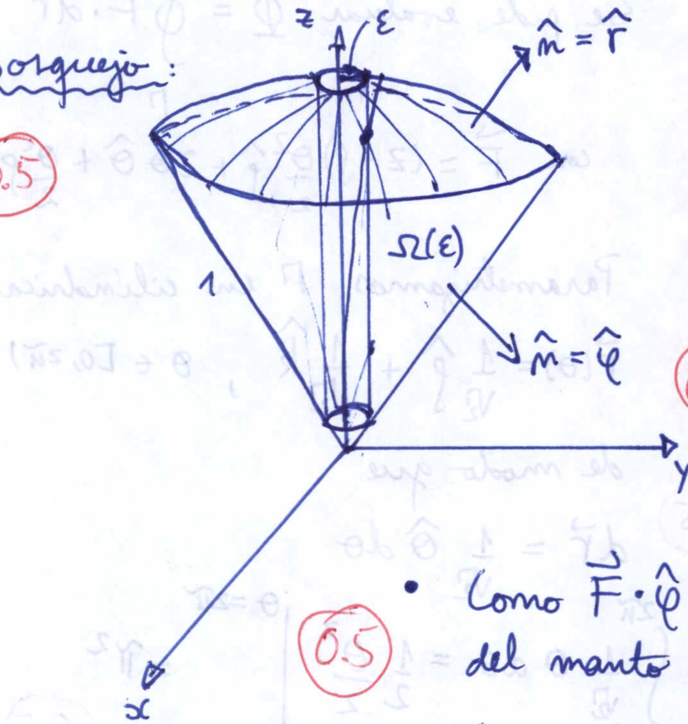
0.5 $$\operatorname{div}\vec{F} = \frac{1}{r^2\operatorname{sen}\varphi}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\, r^2 \operatorname{sen}\varphi\right) + \frac{\partial}{\partial \theta}\left(r r\theta \operatorname{sen}^3\varphi\right)\right]$$

$= 4r + \operatorname{sen}^2\varphi$, válido en $r \neq 0$ y $\varphi \neq 0, \varphi \neq \frac{\pi}{2}$ (i.e. $\vec{r} \notin$ Eje z).

Sea ahora $\Omega(\varepsilon) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 \leq 1,\ z \geq \sqrt{x^2+y^2},\ x^2+y^2 \geq \varepsilon^2\}$

Bosquejo:

0.5



Sobre este dominio $\Omega(\varepsilon)$ podemos aplicar el Teo. de la Divergencia

0.5 $$\iiint_{\Omega(\varepsilon)} \operatorname{div}\vec{F}\,dV = \oint\!\!\oint_{\partial\Omega(\varepsilon)} \vec{F}\cdot\hat{n}\,dA$$

- Como $\vec{F}\cdot\hat{\varphi} = 0$, la integral de flujo a través del manto del cono es 0. 0.5
- Sobre el casquete esférico donde $\hat{n} = \hat{r}$, se tiene $\vec{F}\cdot\hat{n} = r^2 \equiv 1$, de modo que

0.5 $$\iint \vec{F}\cdot\hat{n}\,dA = \text{Área}(\;) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \text{Área}(\;)$$

$$= \int_0^{\pi/4}\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}\varphi\,d\theta\,d\varphi$$

$$= 2\pi\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = (2-\sqrt{2})\pi.$$

0.5

- Sobre el manto del cono de radio $\varepsilon > 0$, la integral de flujo tiende a 0 (se integra un campo acotado en una superficie cuya área tiende a 0):

$$\left|\iint \vec{F}\cdot\hat{n}\,dA\right| \leq K\iint dA = K A(\;) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} K A(\;) = 0.$$

$\rightarrow$ $\boxed{I = (2-\sqrt{2})\pi}$

(b) (Continuación)

Otro camino es después de haber encontrado la divergencia, es integrarla sobre el dominio $\Omega(\varepsilon)$ parametrizado en esféricas y después pasar al límite directamente.

Como $x^2+y^2+z^2 \leq 1 \Rightarrow 0 \leq r \leq 1$

$z \geq \sqrt{x^2+y^2} \Rightarrow \cancel{r}\cos\varphi \geq \cancel{r}\operatorname{sen}\varphi$ 0.5

$\Rightarrow \operatorname{tg}\varphi \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \varphi \leq \pi/4$

Además

$x^2+y^2 \geq \varepsilon^2 \Rightarrow r\operatorname{sen}\varphi \geq \varepsilon$ 0.5

El ángulo $\theta \in [0, 2\pi)$ queda libre.

Notemos que $\varphi > 0$, más aún, debe tenerse que

$$1 \geq r \geq \frac{\varepsilon}{\operatorname{sen}\varphi},$$ 0.5

de donde se sigue que $\operatorname{sen}\varphi \geq \varepsilon \Rightarrow \varphi \geq \operatorname{arcsen}\varepsilon$

De este modo

$$\iiint_{\Omega(\varepsilon)} \operatorname{div}\vec{F}\, dV = \int_{\operatorname{arcsen}\varepsilon}^{\frac{\pi}{4}} \int_{\frac{\varepsilon}{\operatorname{sen}\varphi}}^{1} \int_{0}^{2\pi} \operatorname{div}\vec{F}\, \underbrace{dV}_{r^2 \operatorname{sen}\varphi\, d\theta\, dr\, d\varphi}$$ 0.5

Más otros 0.5 por desarrollar y pasar al límite.

OJO: Aquí lo esencial es el planteamiento. Si está bien planteado, tiene todo el puntaje aún cuando el valor límite no se obtenga.

Obs: Consultas sobre la pauta a falvarez@dim.uchile.cl

Control 1: MA2A2 – 2008

Pauta Problema 3

(a) Tenemos
$$\psi(\vec{r}) = \frac{1}{\|\vec{r}-\vec{p}\|}, \quad \vec{r} \neq \vec{p}$$

Tomando un sistema de coordenadas de tipo esféricas pero centrado en $\vec{p}$, es decir
$\vec{r} = \vec{r}(r,\theta,\varphi) = \vec{p} + r\,\hat{r}$, de modo que $r = \|\vec{r}-\vec{p}\|$ y $\hat{r} = \dfrac{\vec{r}-\vec{p}}{\|\vec{r}-\vec{p}\|}$.
entonces se tiene que $\psi(\vec{r}) = V(r) = \dfrac{1}{r}$

luego
$$\nabla\psi(\vec{r}) = \frac{\partial V}{\partial r}\,\hat{r} = -\frac{1}{r^2}\,\hat{r} = -\frac{\vec{r}-\vec{p}}{\|\vec{r}-\vec{p}\|^3} \qquad 1.0$$

Podemos usar la expresión del Laplaciano en esféricas (como la divergencia del gradiente)

$$\Delta\psi = \operatorname{div}\nabla\psi = \frac{1}{r^2\cancel{\operatorname{sen}\varphi}}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\cancel{\operatorname{sen}\varphi}\frac{\partial V}{\partial r}\right) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(\cancel{r^2}\cdot\frac{-1}{\cancel{r^2}}\right) = 0. \qquad 1.0$$

Obs: (1) También es posible, aunque es mucho más largo, pasar todo a cartesianas y calcular $\nabla\psi$ y $\Delta\psi$ en esas coordenadas.
(2) La otra opción es hacer el cambio $\vec{x} = \vec{r} - p$ y razonar en $\vec{x}$ usando regla de la cadena y esféricas centradas en $\vec{O}$.

(b) Consideremos el dominio $\Omega_\delta = \Omega \setminus \overline{B}(\vec{p},\delta)$ orientado según la normal exterior. 0.5

Sea $\vec{F} = \phi\nabla\psi - \psi\nabla\phi$. Notemos que 0.5

$$\operatorname{div}\vec{F} = \operatorname{div}(\phi\nabla\psi) - \operatorname{div}(\psi\nabla\phi) = \cancel{\nabla\phi\cdot\nabla\psi} + \phi\Delta\psi - \cancel{\nabla\psi\cdot\nabla\phi} - \psi\Delta\phi$$
$$= \phi\Delta\psi - \psi\Delta\phi \qquad 0.5$$

Como ψ y ϕ son armónicas en $\Omega \setminus \{p\}$,
en particular se tiene entonces que

$$\operatorname{div} \vec{F} = \phi \Delta \psi - \psi \Delta \phi = 0 \text{ en } \Omega_\delta. \quad 0.5$$

Por el Teo. de la Divergencia.

0.5

$$0 = \iiint_{\Omega_\delta} \operatorname{div} \vec{F} \, dV = \oiint_{\partial \Omega_\delta} \vec{F} \cdot \hat{n} \, dA$$, con $\hat{n}$ la normal exterior a Ω_δ

Pero
$$\oiint_{\partial \Omega_\delta} \vec{F} \cdot \hat{n} \, dA = \iint_{\partial \Omega} \vec{F} \cdot d\vec{S} - \iint_{\partial B(\vec{p}, \delta)} \vec{F} \cdot d\vec{S} \quad 0.5$$

siempre que en estas últimas integrales se consideren las normales exteriores a Ω y $B(\vec{p}, \delta)$ respectivamente. 0.5

De esta forma se concluye que

$$\iint_{\partial \Omega} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_{\partial B(\vec{p}, \delta)} \vec{F} \cdot d\vec{S} \quad 0.5$$

<u>Observación</u>: Una alternativa es usar la segunda identidad integral de Green sobre el dominio Ω_δ

$$\iiint_{\Omega_\delta} [\phi \Delta \psi - \psi \Delta \phi] \, dV = \iint_{\partial \Omega_\delta} [\phi \nabla \psi - \psi \nabla \phi] \cdot d\vec{S}$$

Esto reemplaza el cálculo de $\operatorname{div} \vec{F}$ y el Teo. de la divergencia, es decir 1.5 pts.

<u>Nota</u>: Consultas sobre la pauta a falvarez@dim.uchile.cl

CONTROL 1, MA2A2 - 2008

PAUTA BONUS

Sea $I_\delta = \iint\limits_{\partial B(\vec{p},\delta)} (\phi \nabla\psi - \psi\nabla\phi)\cdot d\vec{S} \underset{\text{P3,(a)}}{=} \iint\limits_{\partial B(\vec{p},\delta)} \left(-\phi(\vec{r})\frac{\vec{r}-\vec{p}}{\|\vec{r}-\vec{p}\|^3} - \frac{1}{\|\vec{r}-\vec{p}\|}\nabla\phi(\vec{r})\right)\cdot d\vec{S}$

Parametrización: $\vec{r} = \vec{p} + \delta\,\hat{r}(\theta,\varphi) = \vec{p} + (\delta \operatorname{sen}\varphi\cos\theta, \delta\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\theta, \delta\cos\varphi)$

0.4

para $\theta\in[0,2\pi)$, $\varphi\in[0,\pi]$.

Diferencial de superficie: $d\vec{S} = \hat{r}\,dA = \hat{r}\,\delta^2\operatorname{sen}\varphi\,d\theta\,d\varphi$

luego

$$I_\delta = I_\delta^1 + I_\delta^2$$

con

$$I_\delta^1 = -\int_0^\pi\int_0^{2\pi}\phi(\vec{p}+\delta\hat{r})\,\frac{\delta\hat{r}}{\delta^3}\cdot\hat{r}\,\delta^2\operatorname{sen}\varphi\,d\theta\,d\varphi$$

0.3

$$= -\int_0^\pi\int_0^{2\pi}\phi(\vec{p}+\delta\hat{r})\operatorname{sen}\varphi\,d\theta\,d\varphi \xrightarrow[\delta\to 0]{} -\int_0^\pi\int_0^{2\pi}\phi(\vec{p})\operatorname{sen}\varphi\,d\theta\,d\varphi$$

$$= -4\pi\,\phi(\vec{p}).$$

y

$$|I_\delta^2| \leq \int_0^\pi\int_0^{2\pi}\frac{1}{\delta}\|\nabla\phi(\vec{p}+\delta\vec{r})\|\,\delta^2\operatorname{sen}\varphi\,d\theta\,d\varphi$$

0.3

$$\leq \max_{\vec{r}\in B(\vec{p},\delta_0)}\|\nabla\phi(\vec{r})\|\cdot\delta\,4\pi \xrightarrow[\delta\to 0.]{} 0$$

Así

$$I_\delta \xrightarrow[\delta\to 0.]{} -4\pi\,\phi(\vec{p}) + 0$$