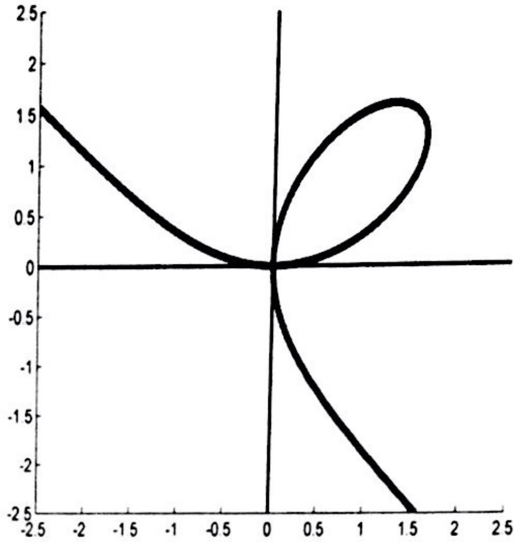
Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE
Cálculo Avanzado y Aplicaciones, 2017-1

Control 1

Profs.: Raúl Gormaz, Jorge San Martín

P1. El Folium de Descartes es la curva de ecuación $x^3 + y^3 = 3xy$.



a) *(1 ptos.)* Demuestre que para cualquier región D del plano cuya frontera es una curva regular, cerrada y simple, recorrida en el sentido antihorario, se cumple que:

$$\frac{1}{2}\oint_{\partial D}(xdy - ydx) = \text{Área de } D.$$

Usamos el Teorema de Green, así:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\oint_{\partial D}(\underbrace{x}_{N}dy \underbrace{- y}_{M}dx) &= \frac{1}{2}\int_D\Big(\overset{1}{\frac{\partial x}{\partial x}} - \overset{-1}{\frac{\partial(-y)}{\partial y}}\Big)dxdy \quad \text{(0.5 pts)}\\ &= \frac{1}{2}\int_D 2dxdy = \text{Área de } D \quad \text{(0.5 pts)}\end{aligned}$$

b) *(1 ptos.)* Para todo $t > 0$, encuentre las coordenadas de los dos puntos donde la recta $y = tx$, de pendiente t, intersecta al Folium (uno de ellos se encuentra en el interior primer cuadrante).

Reemplazando $y = tx$ en la ecuación del folium se tiene:

$$\begin{aligned}x^3 + (tx)^3 = 3x(tx) &\iff x^3(1+t^3) - 3x^2t = 0\\ &\iff \underbrace{x^2}_{1^{\circ}\,pto.}\Big[\underbrace{x(1+t^3) - 3t}_{2^{\circ}\,pto.}\Big] = 0 \quad \text{(0.5 pts)}\end{aligned}$$

De aquí se obtiene $x = 0$ (que corresponde al origen) y $x = \frac{3t}{1+t^3}$. Reemplazando en $y = tx$ se obtienen los dos puntos:

$$(0,0), \qquad \left(\frac{3t}{1+t^3}, \frac{3t^2}{1+t^3}\right) \quad \text{(0.5 pts)}$$

c) *(2 ptos.)* Use las dos partes anteriores para calcular el área encerrada por el Folium en el primer cuadrante (ver figura).

Usamos la fórmula de la parte a) con la parametrización sugerida por la parte b)

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{3t}{1+t^3}\\ \frac{3t^2}{1+t^3}\end{pmatrix} = \vec{r}(t), \quad t \in [0,\infty) \quad \text{(0.5 pts)}$$

Derivando se obtiene:

$$\vec{r}'(t) = \begin{pmatrix}\frac{3(1+t^3)-3t(3t^2)}{(1+t^3)^2}\\ \frac{6t(1+t^3)-3t^2(3t^2)}{(1+t^3)^2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{3-6t^3}{(1+t^3)^2}\\ \frac{6t-3t^4}{(1+t^3)^2}\end{pmatrix} \quad \text{(0.5 pts)}$$

Así el área queda:

$$\begin{aligned}
\text{Área} &= \frac{1}{2}\int_0^{\infty}\Big(\overset{x}{\frac{3t}{1+t^3}}\overbrace{\Big[\frac{6t-3t^4}{(1+t^3)^2}\Big]}^{\vec{r}_y\,'}-\overset{y}{\frac{3t^2}{1+t^3}}\overbrace{\Big[\frac{3-6t^3}{(1+t^3)^2}\Big]}^{\vec{r}_x\,'}\Big)dt\\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\infty}\Big(\frac{18t^2-9t^5}{(1+t^3)^3}-\frac{9t^2-18t^5}{(1+t^3)^3}\Big)dt\\
&= \frac{3}{2}\int_0^{\infty}(1+t^3)^{-2}3t^2dt = \frac{3}{2}(1+t^3)^{-1}\Big|_{\infty}^{0} = \frac{3}{2}
\end{aligned}$$

1.0 pts

d) *(2 ptos.)* Calcule el trabajo realizado por el campo vectorial

$$\vec{F}(x,y) = (\underbrace{\overbrace{x^3y^4}^{M}}_{F_x}, \underbrace{\overbrace{x^4y^3-x}^{N}}_{F_y})$$

al recorrer la parte del Folium del primer cuadrante en el sentido antihorario.

Usamos nuevamente Green: 0.5 pts

$$\begin{aligned}
\oint_{\partial D}(F_x dx + F_y dy) &= \int_D\Big(\frac{\partial(x^4y^3-x)}{\partial x}-\frac{\partial(x^3y^4)}{\partial y}\Big)dxdy\\
&= \int_D\Big((4x^3y^3-1)-4x^3y^3\Big)dxdy = \int_D(-1)dxdy = -\text{Área} = -\frac{3}{2}
\end{aligned}$$

0.5 pts

1.0 pts

P2. *a)* *(1 ptos.)* **Demuestre que si $\vec{F}$ es un campo vectorial de clase $\mathscr{C}^2$ entonces se cumple la identidad**

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{F}) = \nabla(\operatorname{div} \vec{F}) - \Delta \vec{F}. \tag{1}$$

Calculamos $\nabla \times (\nabla \times \vec{F})$.

$$\begin{aligned}
\{\nabla \times (\nabla \times \vec{F})\}_i &= \epsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j}((\nabla \times \vec{F})_k) && \text{0.3 pts} \\
&= \epsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j}(\epsilon_{kpq} \frac{\partial F_q}{\partial x_p}) = \epsilon_{ijk}\epsilon_{pqk} \frac{\partial^2 F_q}{\partial x_j \partial x_p} && \text{0.3 pts} \\
&= (\delta_{ip}\delta_{jq} - \delta_{iq}\delta_{jp}) \frac{\partial^2 F_q}{\partial x_j \partial x_p} \\
&= \delta_{ip}\delta_{jq} \frac{\partial^2 F_q}{\partial x_j \partial x_p} - \delta_{iq}\delta_{jp} \frac{\partial^2 F_q}{\partial x_j \partial x_p} = \frac{\partial^2 F_j}{\partial x_j \partial x_i} - \frac{\partial^2 F_i}{\partial x_j \partial x_j} \\
&= \frac{\partial}{\partial x_i}(\operatorname{div} \vec{F}) - \Delta F_i = \{\nabla(\operatorname{div} \vec{F}) - \Delta \vec{F}\}_i && \text{0.4 pts}
\end{aligned}$$

b) *(0.5 ptos.)* Demuestre que si ϕ es un campo escalar de clase $\mathscr{C}^2$, descrito en coordenadas curvilíneas ortogonales como $\phi(w_1, w_2, w_3)$ entonces su laplaciano se puede calcular mediante la fórmula:

$$\Delta \phi = \frac{1}{H} \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial w_j} \left[\frac{H}{h_j^2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial w_j} \right) \right]. \tag{2}$$

donde $H = h_1 h_2 h_3$ es el producto de los tres factores de escala.

Sabemos que $\Delta \phi = \operatorname{div}(\nabla \phi)$. Luego, usando reiterádamente las fórmulas de divergencia y gradiente en coordenadas curvilíneas, tenemos que:

$$\begin{aligned}
\Delta \phi &= \frac{1}{H} \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial w_j} \left(\frac{H \{\nabla \phi\}_{w_j}}{h_j} \right) && \text{0.2 pts} \\
&= \frac{1}{H} \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial w_j} \left(\frac{H (\frac{1}{h_j} \frac{\partial \phi}{\partial w_j})}{h_j} \right) = \frac{1}{H} \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial w_j} \left(\frac{H}{h_j^2} \frac{\partial \phi}{\partial w_j} \right) && \text{0.3 pts}
\end{aligned}$$

c) *(2 ptos.)* Usando las expresiones en coordenadas curvilíneas de los operadores gradiente, divergencia y rotor (ver formulario al final), pruebe que la fórmula (1) permite calcular el laplaciano de un campo vectorial $\vec{F}$ en coordenadas curvilíneas ortogonales mediante la fórmula:

$$\{\Delta \vec{F}\}_{w_i} = \sum_{j=1}^{3} \frac{1}{h_i} \frac{\partial}{\partial w_i} \left[\frac{1}{H} \frac{\partial}{\partial w_j} \left(\frac{H F_{w_j}}{h_j} \right) \right] - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{3} \frac{h_i}{H} \frac{\partial}{\partial w_j} \left[\frac{H}{h_i^2 h_j^2} \left(\frac{\partial (h_j F_{w_j})}{\partial w_i} - \frac{\partial (h_i F_{w_i})}{\partial w_j} \right) \right] \tag{3}$$

Indicación: Será útil usar la identidad siguiente (no la demuestre):

$$\sum_{k=1}^{3} \epsilon_{ijk} h_k^2 \epsilon_{kpq} = \frac{H^2}{h_i h_j h_p h_q} (\delta_{ip}\delta_{jq} - \delta_{iq}\delta_{jp})$$

Primero calculamos $\nabla(\text{div}\,\vec{F})$ en coordenadas curvilíneas:

$$\begin{aligned}\{\nabla(\text{div}\,\vec{F})\}_{w_i} &= \frac{1}{h_i}\frac{\partial}{\partial w_i}(\text{div}\,\vec{F}) \\ &= \frac{1}{h_i}\frac{\partial}{\partial w_i}\Big[\frac{1}{H}\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial w_j}\Big(\frac{HF_{w_j}}{h_j}\Big)\Big]\end{aligned}$$

0.2 pts

0.3 pts

Ahora calculamos $\nabla\times(\nabla\times\vec{F})$ en coordenadas curvilíneas

$$\begin{aligned}\{\nabla\times(\nabla\times\vec{F})\}_{w_i} &= \frac{h_i}{H}\sum_{j,k=1}^{3}\epsilon_{ijk}\frac{\partial}{\partial w_j}(h_k(\nabla\times\vec{F})_{w_k}) \\ &= \frac{h_i}{H}\sum_{j,k=1}^{3}\epsilon_{ijk}\frac{\partial}{\partial w_j}\Big[h_k\Big(\frac{h_k}{H}\sum_{p,q=1}^{3}\epsilon_{kpq}\frac{\partial(h_qF_{w_q})}{\partial w_p}\Big)\Big] \\ &= \frac{h_i}{H}\sum_{j,p,q=1}^{3}\frac{\partial}{\partial w_j}\Big[\Big\{\sum_{k=1}^{3}\epsilon_{ijk}h_k^2\epsilon_{kpq}\Big\}\Big(\frac{1}{H}\frac{\partial(h_qF_{w_q})}{\partial w_p}\Big)\Big]\end{aligned}$$

0.5 pts

0.5 pts

Aquí usamos la Indicación y queda:

$$\begin{aligned}&= \frac{h_i}{H}\sum_{j,p,q=1}^{3}\frac{\partial}{\partial w_j}\Big[\Big\{\frac{H^2}{h_ih_jh_ph_q}(\delta_{ip}\delta_{jq}-\delta_{iq}\delta_{jp})\Big\}\Big(\frac{1}{H}\frac{\partial(h_qF_{w_q})}{\partial w_p}\Big)\Big] \\ &= \frac{h_i}{H}\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial w_j}\Big[\frac{H}{h_ih_jh_ih_j}\frac{\partial(h_jF_{w_j})}{\partial w_i}-\frac{H}{h_ih_jh_jh_i}\frac{\partial(h_iF_{w_i})}{\partial w_j}\Big] \\ &= \frac{h_i}{H}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{3}\frac{\partial}{\partial w_j}\Big[\frac{H}{h_i^2h_j^2}\Big(\frac{\partial(h_jF_{w_j})}{\partial w_i}-\frac{\partial(h_iF_{w_i})}{\partial w_j}\Big)\Big]\quad;\ \text{ya que la resta es nula para } j=i\end{aligned}$$

0.5 pts

d) *(1 ptos.)* En el caso de las coordenadas cilíndricas, use (2), para probar que el laplaciano de un campo escalar $\phi(\rho,\theta,z)$ es de la forma

$$\Delta\phi = A\Big(\frac{\partial\phi}{\partial\rho}\Big)+B\Big(\frac{\partial^2\phi}{\partial\rho^2}\Big)+C\Big(\frac{\partial^2\phi}{\partial\theta^2}\Big)+D\Big(\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}\Big)$$

donde A,B,C,D son funciones de ρ que debe encontrar explícitamente.

En el caso de las coordenadas cilíndricas: $(w_1,w_2,w_3)=(\rho,\theta,z)$, $h_\rho=1$, $h_\theta=\rho$, $h_z=1$ y $H=\rho$. 0.5 pts

Por lo tanto, la fórmula (2) queda:

$$\begin{aligned}\Delta\phi &= \frac{1}{\rho}\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial w_j}\Big(\frac{\rho}{h_j^2}\frac{\partial\phi}{\partial w_j}\Big) \\ &= \frac{1}{\rho}\Big\{\frac{\partial}{\partial\rho}\Big(\rho\frac{\partial\phi}{\partial\rho}\Big)+\frac{\partial}{\partial\theta}\Big(\frac{1}{\rho}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\Big)+\frac{\partial}{\partial z}\Big(\rho\frac{\partial\phi}{\partial z}\Big)\Big\} \\ &= \frac{1}{\rho}\Big\{\frac{\partial\phi}{\partial\rho}+\rho\frac{\partial^2\phi}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial^2\phi}{\partial\theta^2}+\rho\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}\Big\} \\ &= \frac{1}{\rho}\frac{\partial\phi}{\partial\rho}+1\frac{\partial^2\phi}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\theta^2}+1\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}\end{aligned}$$

0.3 pts

0.2 pts

O sea: $A = \frac{1}{\rho}$, $B = D = 1$ y $C = \frac{1}{\rho^2}$.

e) *(1.5 ptos.)* En el caso de un campo vectorial en coordenadas cilíndricas del tipo $\vec{F} = F_\rho(\rho, \theta, z)\hat{\rho}$ demuestre que la primera componente de su laplaciano es de la forma

$$\{\Delta\vec{F}\}_\rho = \Delta F_\rho + LF_\rho$$

donde L es una función de ρ que debe encontrar explícitamente.

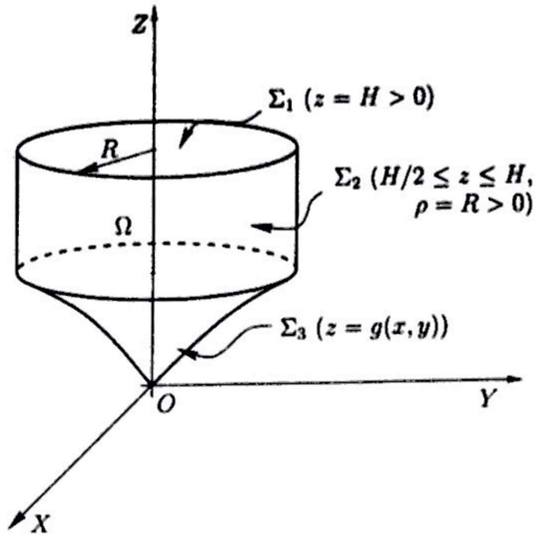
Nuevamente: $(w_1, w_2, w_3) = (\rho, \theta, z)$, $h_\rho = 1$, $h_\theta = \rho$, $h_z = 1$ y $H = \rho$.
Por lo tanto, la fórmula (3) queda:

$$\begin{aligned}
\{\Delta\vec{F}\}_\rho &= \underbrace{\sum_{j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial\rho}\Big[\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial w_j}\Big(\frac{\rho F_{w_j}}{h_j}\Big)\Big]}_{\text{solo para } w_j=\rho} - \underbrace{\sum_{\substack{j=1\\ w_j\neq\rho}}^{3} \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial w_j}\Big[\frac{\rho}{h_j^2}\Big(\frac{\partial(h_jF_{w_j})}{\partial\rho} - \frac{\partial(F_\rho)}{\partial w_j}\Big)\Big]}_{\text{solo para } w_j=\theta,z} && \text{0.5 pts} \\
&= \frac{\partial}{\partial\rho}\Big[\frac{1}{\rho}\frac{\partial\rho F_\rho}{\partial\rho}\Big] - \frac{1}{\rho}\Big\{\frac{\partial}{\partial\theta}\Big[\frac{1}{\rho}\Big(0 - \frac{\partial F_\rho}{\partial\theta}\Big)\Big] + \frac{\partial}{\partial z}\Big[\rho\Big(0 - \frac{\partial F_\rho}{\partial z}\Big)\Big]\Big\} && \text{0.5 pts} \\
&= \frac{\partial}{\partial\rho}\Big[\frac{F_\rho}{\rho} + \frac{\partial F_\rho}{\partial\rho}\Big] + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 F_\rho}{\partial\theta^2} + \rho\frac{\partial^2 F_\rho}{\partial z^2} \\
&= -\frac{F_\rho}{\rho^2} + \underbrace{\frac{1}{\rho}\frac{\partial F_\rho}{\partial\rho} + \frac{\partial^2 F_\rho}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 F_\rho}{\partial\theta^2} + \rho\frac{\partial^2 F_\rho}{\partial z^2}}_{=\Delta F_\rho} && \text{0.5 pts}
\end{aligned}$$

O sea: $L = -\frac{1}{\rho^2}$.

P3. Calcular el flujo del campo vectorial $\vec{F} = (x, 0, -z)$ en cada una de las superficies Σ_1, Σ_2, Σ_3, cuya reunión es el borde del volumen Ω de la figura. Use para su cálculo la orientación definida por la normal exterior a Ω.

Puntajes: Cada flujo vale 2 ptos. Pueden calcularlos integrando directamente o usando apropiadamente algún teorema visto en clases. En el caso de integración directa, el puntaje es: (0.5 ptos.) parametrización $\phi(u,v)$ indicando el dominio de (u,v), (0.5 ptos.) Calculo de $\frac{\partial\phi}{\partial u}, \frac{\partial\phi}{\partial v}$ y $\vec{n}dS$, (1 pto.) cálculo de la integral resultante.



Flujo en superficie Σ_1:

Parametrización: $\phi(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ H \end{pmatrix}$ donde $(x,y) \in \mathscr{B}((0,0);R)$. 0.5 pts

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{\partial\phi}{\partial y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{\partial\phi}{\partial x} \times \frac{\partial\phi}{\partial y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$ Con esto $\vec{n}dS = \hat{k}dxdy$ 0.5 pts

$$\int_{\Sigma_1} \vec{F} \cdot \vec{n}dS = \int_{\mathscr{B}(\vec{0},R)} -H\,dxdy = -H(\pi R^2)$$ 1.0 pts

Flujo en superficie Σ_2:

Parametrización: $\phi(\theta,z) = \begin{pmatrix} R\cos\theta \\ R\,\text{sen}\,\theta \\ z \end{pmatrix}$ donde $(\theta,z) \in [0,2\pi] \times [H/2, H]$ 0.5 pts

$$\frac{\partial\phi}{\partial \theta} = \begin{pmatrix} -R\,\text{sen}\,\theta \\ R\cos\theta \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{\partial\phi}{\partial z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{\partial\phi}{\partial \theta} \times \frac{\partial\phi}{\partial z} = \begin{pmatrix} R\cos\theta \\ R\,\text{sen}\,\theta \\ 0 \end{pmatrix}.$$ Con esto $\vec{n}dS = (x,y,0)d\theta dz$ 0.5 pts

0.5 pts

$$\int_{\Sigma_2} \vec{F} \cdot \vec{n}dS = \int_0^{2\pi}\int_{H/2}^{H} x^2 d\theta dz = \int_0^{2\pi}\int_{H/2}^{H} R^2\cos^2\theta\, d\theta dz = R^2 \cdot \pi \cdot \frac{H}{2} = \frac{1}{2}H(\pi R^2)$$ 0.5 pts

Flujo en superficie Σ_3:

Usamos Teorema de la divergencia:

$$\int_{\Sigma_1} \vec{F} \cdot \vec{n}dS + \int_{\Sigma_2} \vec{F} \cdot \vec{n}dS + \int_{\Sigma_3} \vec{F} \cdot \vec{n}dS = \int_{\Omega} \text{div } \vec{F}dV$$ 0.5 pts

Como div $\vec{F} = \frac{\partial(x)}{\partial x} + \frac{\partial(0)}{\partial y} + \frac{\partial(-z)}{\partial z} = 1 + 0 - 1 = 0$ 1.0 pts

Así:

0.5 pts

$$\int_{\Sigma_3} \vec{F} \cdot \vec{n}dS = -\int_{\Sigma_1} \vec{F} \cdot \vec{n}dS - \int_{\Sigma_2} \vec{F} \cdot \vec{n}dS = H(\pi R^2) - \frac{1}{2}H(\pi R^2) = \frac{1}{2}H(\pi R^2).$$

Alternativa!!!! Flujo en superficie Σ_3 parametrizando:

Parametrización: $\phi(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ g(x,y) \end{pmatrix}$ donde $(x,y) \in \mathscr{B}\big((0,0);R\big)$. 0.5pts

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\partial g}{\partial x} \end{pmatrix}, \ \frac{\partial \phi}{\partial y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix}, \ \frac{\partial \phi}{\partial x} \times \frac{\partial \phi}{\partial y} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial g}{\partial x} \\ -\frac{\partial g}{\partial y} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Con esto $\vec{n} dS = \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x} \\ \frac{\partial g}{\partial y} \\ -1 \end{pmatrix} dxdy$ (sentido de $\vec{n}$ ajustado!!!) 0.5pts

$$\int_{\Sigma_3} \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \int_{\mathscr{B}(\vec{0},R)} \Big(x \frac{\partial g(x,y)}{\partial x} + g(x,y)\Big) dxdy = \int_{\mathscr{B}(\vec{0},R)} \frac{\partial x g(x,y)}{\partial x} dxdy$$

$$= \int_{y=-R}^{R} \int_{-\sqrt{R^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-y^2}} \frac{\partial x g(x,y)}{\partial x} dxdy = \int_{y=-R}^{R} \left(x g(x,y) \Big|_{-\sqrt{R^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-y^2}} \right) dy = \int_{y=-R}^{R} \left(2\sqrt{R^2-y^2} \frac{H}{2} \right) dy = \pi R^2 \frac{H}{2}$$

0.5pts 0.5pts

Tiempo: 3 horas.

Formulario

$$\{\nabla \phi\}_{w_i} = \frac{1}{h_i} \frac{\partial \phi}{\partial w_i}$$

$$\text{div } \vec{F} = \frac{1}{H} \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial w_j} \left(\frac{H F_{w_j}}{h_j} \right)$$

$$\{\nabla \times \vec{F}\}_{w_i} = \frac{h_i}{H} \sum_{j,k=1}^{3} \epsilon_{ijk} \frac{\partial (h_k F_{w_k})}{\partial w_j}$$

$$\epsilon_{ijk} \epsilon_{pqk} = \delta_{ip} \delta_{jq} - \delta_{iq} \delta_{jp}$$