Universidad de Chile.
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas.
Departamento de Ingeniería Matemática.
Santiago, 6 de Septiembre de 2007.

Profs.: F. Álvarez, J. Dávila, H. Ramírez.
Tiempo: 3:00 hrs.

CONTROL 1: MA26B Matemáticas Aplicadas 2007

Problema 1.

(a) (4 pts.) Sea $\vec{\sigma}:[0,L(\Gamma)]\to\mathbb{R}^3$ una parametrización en *longitud de arco* de una curva simple y regular Γ. En lo que sigue T,N,B denotan el triedro de Frenet y κ, τ la curvatura y la torsión respectivamente. Sea $S=\{(x,y,z):x^2+y^2+z^2=1\}$ la esfera unitaria y suponga que $\vec{\sigma}$ verifica:

$$\forall s\in[0,L(\Gamma)],\ \vec{\sigma}(s)\in S \text{ y } N(s) \text{ coincide con el vector } \textit{normal interior} \text{ de } S \qquad (1)$$

i) Muestre que $N(s)=-\vec{\sigma}(s)$ para todo $s\in[0,L(\Gamma)]$, y utilizando las fórmulas de Frenet pruebe que $\kappa=1$ y $\tau=0$. Deducir que Γ es una curva plana.

ii) Suponiendo adicionalmente que $\vec{\sigma}(0)=(0,1,0)$ y $\vec{\sigma}'(0)=(0,0,1)$ dar una fórmula explícita para $\vec{\sigma}(s)$.

iii) ¿Qué sucede si en (1) se reemplaza "normal interior" por *normal exterior*?

(b) (2 pts.) Calcule la integral de trabajo $\int_\Gamma \vec{F}\cdot d\vec{r}$ para el campo vectorial $\vec{F}=(x^2-yz,y^2-xz,z^2-xy)$ sobre la hélice Γ que une los puntos $P=(1,0,0)$ y $Q=(1,0,1)$ dando una sola vuelta.

Problema 2.

Considere el campo vectorial $\vec{F}(x,y,z)=\left(\frac{x}{a^2},\frac{y}{b^2},\frac{z}{c^2}\right)$ y sea S la superficie de la elipsoide de ecuación

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

(a) Muestre que el vector normal $\hat{n}$ a la superficie S en un punto $(x_0,y_0,z_0)\in S$ es paralelo al campo $\vec{F}$.

(b) Sea $d(x_0,y_0,z_0)$ la distancia desde el origen al plano tangente a la elipsoide en (x_0,y_0,z_0). Pruebe que $d=1/\vec{F}\cdot\hat{n}$ en S.

(c) Demuestre que

$$\int\int_S \frac{1}{d}dA=\frac{4\pi}{3}\left(\frac{bc}{a}+\frac{ac}{b}+\frac{ab}{c}\right).$$

Indicación: Recuerde que el volumen de la elipsoide antes descrita es igual a $\frac{4\pi}{3}abc$.

Problema 3.

(a) Sea $\varphi:\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$ una función de clase C^1. Demuestre que

$$\vec{\nabla}\times\int_a^b\varphi(\vec{r},t)dt=\int_a^b\vec{\nabla}\times\varphi(\vec{r},t)dt.$$

Indicación: Puede usar la regla de Leibnitz: $\frac{\partial}{\partial u}\int_a^b\varphi(\vec{r},t)dt=\int_a^b\frac{\partial}{\partial u}\varphi(\vec{r},t)dt$ donde $\vec{r}=(x,y,z)$ y u representa cualquier variable cartesiana.

(b) Considere el campo vectorial $\vec{F}(\vec{r})=g(r)\hat{\theta}$ expresado en coordenadas esféricas, donde $r=\|\vec{r}\|$ y $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ es una función escalar. Verifique que div $\vec{F}=0$ y pruebe que

$$\vec{\nabla}\times[\vec{F}(t\vec{r})\times t\vec{r}]=2t\vec{F}(t\vec{r})+t^2\frac{d}{dt}\vec{F}(t\vec{r}). \qquad (2)$$

(c) Sea ahora $\vec{F}$ un campo cualquiera tal que div $\vec{F}=0$ en una bola B de $\mathbb{R}^3$ centrada en el origen. Entonces se puede probar (no se pide que lo haga) que (2) es válida en B. Definamos el campo vectorial $\vec{G}(\vec{r})=\int_0^1[\vec{F}(t\vec{r})\times t\vec{r}]dt$. Usando lo anterior concluya que $\vec{\nabla}\times\vec{G}=\vec{F}$ en B.

2007-2 Pauta Control 1. Matemáticas Aplicadas. 1

Prof: Juan Dávila

Aux: Miguel Concha

P1) Parametricemos $\vec{\gamma}(s)$ como sigue (en longitud de arco):

$$\vec{\gamma}(s) = \left(\operatorname{sen}(\varphi(s))\cos(\theta(s)),\ \operatorname{sen}(\varphi(s))\operatorname{sen}(\theta(s)),\ \cos(\varphi(s))\right)$$

En donde $\varphi(s)$ supondremos son funciones clase $\mathcal{C}^2$, para que tenga sentido $\frac{dN}{ds}$. (Esto es sensato pues el cambio de variables a esféricas es biyectivo y diferenciable fuera del punto $\varphi=0$). Calculemos $N(s)$:

$$\hat{T} = \frac{d\hat{\gamma}}{ds}(s) = \left(\cos(\varphi(s))\cos(\theta(s)),\ \cos(\varphi(s))\operatorname{sen}(\theta(s)),\ -\operatorname{sen}(\varphi(s))\right)\varphi'(s)$$

$$+ \left(-\operatorname{sen}(\varphi(s))\operatorname{sen}(\theta(s)),\ \operatorname{sen}(\varphi(s))\cos(\theta(s)),\ 0\right)\cdot\theta'(s)$$

$$= \varphi'(s)\,\hat{\varphi} + \operatorname{sen}(\varphi(s))\,\theta'(s)\,\hat{\theta}$$

En donde $\hat{\varphi} = \hat{\varphi}(s)$; $\hat{\theta} = \hat{\theta}(s)$ $\quad \varphi' = \frac{d\varphi}{ds}$; $\theta' = \frac{d\theta}{ds}$.

$$\frac{dT}{ds} = \varphi''(s)\hat{\varphi} + (\operatorname{sen}\varphi(s)\,\theta'(s))'\hat{\theta} + (\varphi'^2(-\hat{r}) - \theta'^2\operatorname{sen}\varphi(s)(\operatorname{sen}\varphi\,\hat{r} + \cos\varphi\,\hat{\varphi})$$

Esto pues • $\dfrac{d\hat{\theta}}{ds} = \dfrac{d\hat{\theta}}{d\theta}\cdot\theta' = -\theta'(\cos\theta(s), \operatorname{sen}\theta(s), 0)$

$$= -\theta'(\operatorname{sen}\varphi\,\hat{r} + \cos\varphi\,\hat{\varphi})$$

• $\dfrac{d\hat{\varphi}}{ds} = \dfrac{d\varphi}{d\varphi}\cdot\varphi' = -\varphi'\hat{r}$

$$\Rightarrow \frac{dT}{ds} = (\varphi''(s) - \theta'^2\operatorname{sen}\varphi(s)\cos\varphi(s))\hat{\varphi} + (\operatorname{sen}\varphi(s)\,\theta'(s))'\hat{\theta} - (\varphi'^2 + \theta'^2\operatorname{sen}^2\varphi(s))\hat{r}$$

Como la Normal debe ser proporcional a $-\hat{r}$ entonces

- $\varphi''(s) - \theta'^2\operatorname{sen}\varphi(s)\cos\varphi(s) = 0 \quad \forall s \in [0, L(\Gamma)]$
- $(\operatorname{sen}\varphi(s)\,\theta'(s))' = 0$;

$\Rightarrow \quad \hat{N} = -\hat{r} \quad$ es decir $\quad N(s) = -\bar{r}(s)$ ∎

Además la segunda ecuación de Frenet dice:

$$\frac{dN}{ds} = -KT + \tau B \Rightarrow -\frac{d\bar{r}(s)}{ds} = -KT + \tau B$$

③

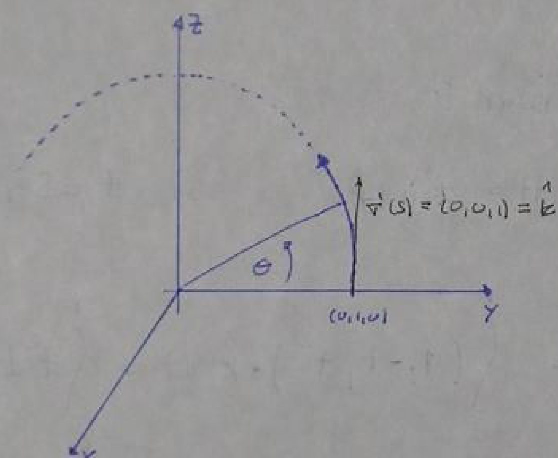
$$\Rightarrow -\hat{T} = -k\hat{T} + \tau_0 \hat{B}$$

Luego, dado que $\hat{T} \perp \hat{B}$ se concluye que

$\tau_0 = 0$ y $k = 1$.

Además, $\tau_0 = 0 \Rightarrow \Gamma$ es una curva plana. Como también Γ está contenida en S entonces Γ es un arco de circunferencia.

ii)



Esta curva queda parametrizada por:

$\vec{r}(\theta) = \cos\theta \,\hat{j} + \operatorname{sen}\theta\,\hat{k}$. Además $\|\vec{r}'(\theta)\| = 1$

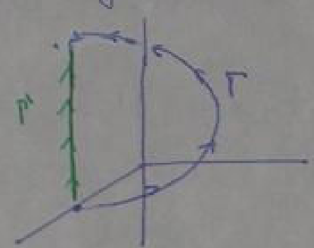
Luego $\vec{r}(\theta)$ corresponde además a la parametrización on longitud de arco. Claramente también se tiene

que $\vec{r}(0) = (0,1,0) = \hat{j}$ y que $\vec{r}\,'(0) = (0,0,1) = \hat{k}$.

b) Notemos que

$$\vec{F}(x,y,z) = \nabla\left(\frac{x^3}{3} + \frac{y^3}{3} + \frac{z^3}{3} + xyz\right)$$ De modo

que la integral de trabajo No depende del camino. $(\nabla \times \vec{F} = 0)$



Es decir $\displaystyle\int_{\Gamma} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{\Gamma'} \vec{F}\cdot d\vec{r}$

Falta parametrizar Γ'.

$\gamma(t) = \hat{j} + t\hat{k}$, con $t \in [0,1]$, de modo que

$$\int_{\Gamma'} \vec{F}\cdot dr = \int_0^1 (1,-t,t^2)\cdot\hat{k}\,dt = \int_0^1 t^2\,dt = \frac{1}{3}$$

■

2007-2 Pauta Control 1 Matemáticas Aplicadas 5

Prof: Juan Dávila

Ax: Miguel Concha

P2) a) Para esta parte hay dos formas.

1era: Se puede probar que

$$\vec{\sigma}(\theta,\varphi) = a\,\text{sen}\varphi\cos\theta\,\hat{i} + b\,\text{sen}\varphi\,\text{sen}\theta\,\hat{j} + c\cos\varphi\,\hat{k}$$

parametriza el elipsoide (con $\theta \in [0,2\pi]$, $\varphi \in [0,\pi]$.

[se prueba que $\begin{cases} |a|\,\text{sen}\varphi\cos\theta = x_0 \\ |b|\,\text{sen}\varphi\,\text{sen}\theta = y_0 \\ |c|\cos\varphi = z_0 \end{cases}$ tiene solución (para las variables θ,φ) si $\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} + \frac{z_0^2}{c^2} = 1$]

Además: $\cdot\ \frac{\partial\sigma(\theta,\varphi)}{\partial\theta} = -|a|\,\text{sen}\varphi\,\text{sen}\theta\,\hat{i} + |b|\,\text{sen}\varphi\cos\theta\,\hat{j}$

$\cdot\ \frac{\partial\sigma(\theta,\varphi)}{\partial\varphi} = |a|\cos\varphi\cos\theta\,\hat{i} + |b|\cos\varphi\,\text{sen}\theta\,\hat{j} - |c|\,\text{sen}\varphi\,\hat{k}$

$$\Rightarrow \frac{\partial\sigma(\theta,\varphi)}{\partial\varphi} \times \frac{\partial\sigma(\theta,\varphi)}{\partial\theta} = (|ab|\,\text{sen}\varphi\cos\varphi)\,\hat{k} + (|ac|\,\text{sen}^2\varphi\,\text{sen}\theta\,\hat{j}) + (|bc|\,\text{sen}^2\varphi\cos\theta)\,\hat{i}$$

$(= \vec{n}$ (sin normalizar) $)$

$$= |abc| \operatorname{sen}\varphi \left(\frac{|a| \operatorname{sen}\varphi \cos\theta}{a^2} \hat{i} + \frac{|b| \operatorname{sen}\varphi \cos\theta}{b^2} \hat{j} + \frac{|c| \cos\varphi}{c^2} \hat{k} \right)$$

$$= |abc| \operatorname{sen}\varphi \, \vec{F}(\vec{\nabla}(\varphi, \theta))$$

Es decir: La Normal en el punto $\vec{\nabla}(\varphi, \theta)$ es paralela a $\vec{F}(\vec{\nabla}(\varphi, \theta))$

2ª Se tiene que si $\vec{f} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable entonces ∇f es perpendicular (NORMAL) a las curvas de nivel de f. En este caso $f(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$

de modo que $\nabla f = 2\vec{F}(x, y, z) = 2\left(\frac{x}{a^2}, \frac{y}{b^2}, \frac{z}{c^2}\right)$

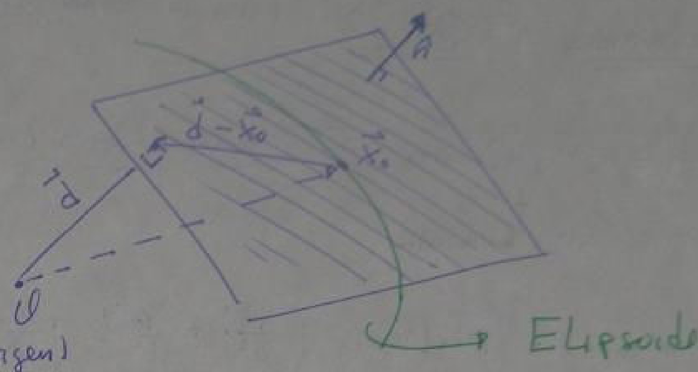
Y se tiene que $\nabla f(x, y, z)$ es ortogonal (NORMAL) a

$$S = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \right\}$$

b) Notemos que:

$\langle d\hat{n} - (x_0, y_0, z_0), \hat{n} \rangle = 0$ pues $d\hat{n}$ está en el plano tangente al punto (x_0, y_0, z_0) de la elipsoide

En efecto:



Notamos que $\vec{d}-\vec{x}_0$ está contenido en el plano.

En donde $\vec{d}$ es el vector que "mide" la distancia del origen al plano tangente. Además $\vec{d}$ es ortogonal al plano, de modo que $\vec{d} = d\hat{n}$ En donde $\hat{n}$ es el vector NORMAL al plano. De este modo

- $\langle \vec{d} - \vec{x}_0 , \hat{n} \rangle = 0$, pues $\vec{d}-\vec{x}_0 \in$ al plano tangente
- $\vec{d} = d\hat{n}$, pues $\vec{d}$ es perpendicular al plano.

De aquí $\langle d\hat{n} - \vec{x}_0 , \hat{n} \rangle = 0 \iff d\langle \hat{n}, \hat{n} \rangle = \langle \vec{x}_0 , \hat{n} \rangle$

$\iff d = \langle x_0 , \hat{n} \rangle$

(Pues se escoge $\hat{n}$ la Normal Unitaria)

Esto se hace para cualquier $\vec{x}_0$ en la elipsoide

- Calculemos $\langle \vec{x_0}, \vec{n} \rangle$ (con la normal sin normalizar) 8

$\langle \vec{x_0}, \vec{n} \rangle$ con $\vec{x_0} = \underbrace{a \operatorname{sen}\varphi_0 \cos\theta_0}_{x_0} \hat{i} + \underbrace{b \operatorname{sen}\varphi_0 \operatorname{sen}\theta_0}_{y_0} \hat{j} + \overbrace{c \cos\varphi_0}^{z_0} \hat{k}$

SIN NORMALIZAR

$$\langle \vec{x_0}, \vec{n} \rangle = (x_0, y_0, z_0) \cdot \left(|abc| \operatorname{sen}\varphi_0 \left(\frac{x_0}{a^2} \hat{i} + \frac{y_0}{b^2} \hat{j} + \frac{z_0}{c^2} \hat{k} \right) \right)$$

$$= |abc| \operatorname{sen}\varphi_0 \Big[\underbrace{\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} + \frac{z_0^2}{c^2}}_{1, \text{ pues } (x_0, y_0, z_0) \text{ está en la elipsoide}} \Big]$$

$$= |abc| \operatorname{sen}\varphi_0$$

- Calculemos $\|\vec{n}\|$

$$\|\vec{n}\| = \left\| |abc| \operatorname{sen}\varphi_0 \left(\frac{x_0}{a^2} \hat{i} + \frac{y_0}{b^2} \hat{j} + \frac{z_0}{c^2} \hat{k} \right) \right\|$$

$$= |abc| \operatorname{sen}\varphi_0 \left(\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4} + \frac{z_0^2}{c^4} \right)^{1/2} \quad \left(|\operatorname{sen}\varphi_0| = \operatorname{sen}\varphi_0 \text{ pues } \varphi_0 \in [0, \pi] \right)$$

- Calculemos $\vec{F} \cdot \vec{n}$:

$$\vec{F} \cdot \vec{n} = \underbrace{|abc| \operatorname{sen}\varphi \vec{F}(x_0, y_0, z_0)}_{\vec{n}} \cdot \vec{F}(x_0, y_0, z_0) = |abc| \operatorname{sen}\varphi \underbrace{\left(\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4} + \frac{z_0^2}{c^4} \right)}_{\|\vec{F}\|^2}$$

Luego:

- $d = \langle \vec{x}_0, \hat{n} \rangle = \dfrac{1}{\|\vec{n}\|} \langle \vec{x}_0, \vec{n} \rangle$

$$= \left(|abc| \operatorname{sen}\varphi \left(\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4} + \frac{z_0^2}{c^4} \right)^{1/2} \right)^{-1} \cdot |abc| \operatorname{sen}\varphi$$

$$= \left(\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4} + \frac{z_0^2}{c^4} \right)^{-1/2}$$

- $\vec{F} \cdot \hat{n} = \dfrac{\vec{F} \cdot \vec{n}}{\|\vec{n}\|} = \dfrac{|abc| \operatorname{sen}\varphi \left(\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4} + \frac{z_0^2}{c^4} \right)}{|abc| \operatorname{sen}\varphi \left(\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4} + \frac{z_0^2}{c^4} \right)^{1/2}}$

$$= \left(\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4} + \frac{z_0^2}{c^4} \right)^{1/2} = \frac{1}{d}$$

c) Esta parte es directa de la anterior: (10)

$$\iint_S \frac{1}{d}\,dA = \iint_S \vec{F}\cdot\hat{n}\,dA = \iiint_\Omega \operatorname{div}(\vec{F})\,dV$$

En donde Ω es el volumen encerrado por S.

¿Cuánto es $\operatorname{div}(\vec{F})$?

$$\operatorname{div}(\vec{F}) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{a^2}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{b^2}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z}{c^2}\right)$$

$$= \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$$

$$\Rightarrow \iint_S \frac{1}{d}\,dA = \iiint_\Omega \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right) dV$$

$$= \frac{4\pi}{3} abc \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right)$$

$$= \frac{4\pi}{3}\left(\frac{bc}{a} + \frac{ac}{b} + \frac{ab}{c}\right) \blacksquare$$

2007-2 Pauta Control 1. Matemáticas Aplicadas (II)

Prof: Juan Dávila

Aux: Miguel Concha.

P3) Notemos que:

$$\text{Si } \varphi(\vec{x},t) = \begin{pmatrix} \varphi_1(\vec{x},t) \\ \varphi_2(\vec{x},t) \\ \varphi_3(\vec{x},t) \end{pmatrix} \Rightarrow \int_a^b \varphi(\vec{x},t)\,dt = \begin{array}{r} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{array} \begin{pmatrix} \int_a^b \varphi_1(\vec{x},t)\,dt \\ \int_a^b \varphi_2(\vec{x},t)\,dt \\ \int_a^b \varphi_3(\vec{x},t)\,dt \end{pmatrix}$$

Luego, si llamamos $\vec{F}(\vec{x}) = \int_a^b \varphi(\vec{x},t)\,dt$ entonces:

$$\nabla \times \vec{F}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \partial_y F_3 - \partial_z F_2 \\ \partial_z F_1 - \partial_x F_3 \\ \partial_x F_2 - \partial_y F_1 \end{pmatrix}$$

en donde $\partial_u F_i = \dfrac{\partial F_i}{\partial u}$

Notemos que $\partial_u F_i(\vec{x}) = \int_a^b \partial_u \varphi_i(\vec{x},t)\,dt$ (por regla de Leibnitz)

$$\Rightarrow \nabla \times \vec{F} = \begin{pmatrix} \int_a^b \partial_y \varphi_3 - \int_a^b \partial_z \varphi_2 \\ \int_a^b \partial_z \varphi_1 - \int_a^b \partial_x \varphi_3 \\ \int_a^b \partial_x \varphi_2 - \int_a^b \partial_y \varphi_1 \end{pmatrix} = \int_a^b \begin{pmatrix} \partial_y \varphi_3 - \partial_z \varphi_2 \\ \partial_z \varphi_1 - \partial_x \varphi_3 \\ \partial_x \varphi_2 - \partial_y \varphi_1 \end{pmatrix} = \int_a^b \nabla \times \varphi\,dt.$$

b) Notemos que $\operatorname{div}(\vec{F}) = \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}\varphi}\left(\frac{\partial}{\partial\theta} r g(r)\right) = 0$ 12

Además $\vec{F}(t\vec{r}) = \vec{F}(tr\hat{r}) = g(tr)\,\hat{\theta}$

de modo que $\vec{F}(t\vec{r}) \times t\vec{r} = g(tr)\hat{\theta} \times tr\hat{r}$

$= +\, g(tr)\, tr\, \hat{\varphi}$

Luego $\vec{\nabla}\times(\vec{F}(t\vec{r})\times t\vec{r}) = \dfrac{\hat{r}\left(-\partial_\theta(r g(tr) tr)\right) + r\operatorname{sen}\varphi\left(\frac{\partial}{\partial r}(r g(tr) tr)\right)\hat{\theta}}{r^2 \operatorname{sen}\varphi}$

$$= \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}\left(t r^2 g(tr)\right)\right)\hat{\theta}$$

$$= \hat{\theta}\,\frac{t}{r}\,\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 g(tr)\right) = \hat{\theta}\,\frac{t}{r}\left(r^2 g'(tr)t + 2r g(tr)\right)$$

$$= \left(t^2 r\, g'(tr) + 2t \cdot g(tr)\right)\hat{\theta}$$

$$= t^2\left(\frac{d}{dt}\left(g(tr)\,\hat{\theta}\right)\right) + 2t\, g(tr)\,\hat{\theta}$$

$$= t^2 \frac{d}{dt}\vec{F}(tr) + 2t$$

(13)

c) Tenemos, por la parte a, que

$$\nabla \times \vec{G}(\vec{r}) = \int_0^1 \nabla \times [\vec{F}(t\vec{r}) \times t\vec{r}]\, dt$$

como además $\vec{F}$ satisface lo probado en la parte b) entonces:

$$\nabla \times \vec{G}(\vec{r}) = \int_0^1 \left(2t\,\vec{F}(t\vec{r}) + t^2 \frac{d}{dt}\vec{F}(t\vec{r})\right) dt$$

$$= \int_0^1 2t\,\vec{F}(t\vec{r})\,dt + \int_0^1 \underbrace{t^2}_{u} \underbrace{\frac{d}{dt}\vec{F}(t\vec{r})\,dt}_{dv} \quad \text{(por partes)}$$

$$= \int_0^1 2t\,\vec{F}(t\vec{r})\,dt + t^2\vec{F}(t\vec{r})\Big|_{t=0}^{t=1} - \int_0^1 2t\,\vec{F}(t\vec{r})\,dt$$

$$= \vec{F}(\vec{r}) \quad \blacksquare$$