MA2002 Cálculo Avanzado y Aplicaciones Semestre 2015/02. **Secciones 1, 4, 5 y 6**
Profesores: Raúl Gormaz, Rodrigo Lecaros, Héctor Ramírez y Mauricio Soto.

Control 1

P1. (a) **(1 punto)** Sea φ un campo escalar de clase $\mathcal{C}^2$ y $\vec{G}$ un campo vectorial de clase $\mathcal{C}^1$, ambos definidos en $\mathbb{R}^3$. Se define el campo $\vec{F}$ por $\vec{F} = \nabla\phi + \mu\vec{\nabla} \times \vec{G}$, donde μ es una constante real. Demuestre que $div(\vec{F}) = \Delta\phi$.

(b) Sobre el cuadrado $\{(x, y, 0) | \, x \in [-1, 1], \, y \in [-1, 1]\}$ se encuentra una pila de arena húmeda cuya superficie superior S está descrita por $z = (1 - x^2)(1 - y^2)$. El flujo de vapor de agua está dado por el campo $\vec{F}$ definido en (a), donde $\phi(x, y, z) = x^2 - y^2 + z^2$, $\mu = 1$ y $\vec{G}(x, y, z) = -ye^z\hat{\imath} + x^3\cos(z)\hat{\jmath} + z\sin(xy)\hat{k}$.

(i) **(1 punto)** Bosqueje la superficie S.

(ii) **(4 puntos)** Obtenga el flujo de vapor que sale hacia arriba a través de la superficie S.

P2. (a) Sea $u : B(0, R) \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función de clase $\mathcal{C}^2$ en la bola abierta centrada en el origen $B(0, R)$, donde $R > 0$. Suponga que u satisface $\Delta u = 0$ (es decir, u es armónica) en $B(0, R)$.

(i) **(2 puntos)** Demuestre que el campo $\vec{F} = -\frac{\partial u}{\partial y}\hat{\imath} + \frac{\partial u}{\partial x}\hat{\jmath}$ es conservativo en $B(0, R)$.

(ii) **(1 punto)** Concluya que existe $v : B(0, R) \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ armónica en $B(0, R)$ tal que

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

(b) **(3 puntos)** Sea $\vec{F}(x, y, z) = (6abz^3y - 20bx^3y^2)\hat{\imath} + (6abxz^3 - 10bx^4y + z\sin(yz))\hat{\jmath} + (18abxyz^2 + y\sin(yz) + 2z)\hat{k}$. Pruebe que es conservativo y determine el potencial asociado.

P3. Sea $\mathcal{C}$ la curva que se forma al intersectar las superficies definidas implícitamente por las ecuaciones: $z^2 + x^2 = 4 + y^2$ y $x^2 + y^2 = 4$ con $y \geq 0$.

(a) **(3 puntos)** Dibuje esquemáticamente las superficies y bosqueje la curva $\mathcal{C}$. Encuentre una parametrización de $\mathcal{C}$ en coordenadas cilíndricas.

(b) **(3 puntos)** Considere el campo $\vec{F}$ definido en coordenadas cilíndricas por:

$$\vec{F}(\rho, \theta, z) = (\rho\sin(\theta) + z)\hat{\rho} + (\sin(\theta)z/\rho)\hat{\theta} + (z^3 - \rho\cos(\theta))\hat{k}.$$

Obtenga el trabajo realizado por $\vec{F}$ a lo largo de $\mathcal{C}$ indicando la orientación escogida.

Divergencia y rotor y coordenadas ortogonales.

Si $\vec{r}(u, v, w)$ es un sistema de coordenadas ortogonal y $\vec{F} = F_u\hat{u} + F_v\hat{v} + F_w\hat{w}$ es un campo $\mathcal{C}^1$, entonces

$$\mathrm{div}(\vec{F}) = \frac{1}{h_u h_v h_w}\left[\frac{\partial}{\partial u}(F_u h_v h_w) + \frac{\partial}{\partial v}(h_u F_v h_w) + \frac{\partial}{\partial w}(h_u h_v F_w)\right]$$

$$\mathrm{rot}(\vec{F}) = \frac{1}{h_u h_v h_w}\begin{vmatrix} h_u\hat{u} & h_v\hat{v} & h_w\hat{w} \\ \frac{\partial}{\partial u} & \frac{\partial}{\partial v} & \frac{\partial}{\partial w} \\ F_u h_u & F_v h_v & F_w h_w \end{vmatrix}$$

($\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}$ deben tener orientación positiva, es decir, $\hat{u} \times \hat{v} = \hat{w}$.)

Tiempo: 3 horas

MA2002-6 Cálculo Avanzado y Aplicaciones . Semestre 2015/02. **Secciones 1, 4, 5 y 6**
MA26B Matemáticas Aplicadas. Semestre 2015/02. **Secciones 1, 4, 5 y 6**
Profesores: Raúl Gomaz, Héctor Ramírez C., Rodrigo Lecaros, Mauricio Soto.

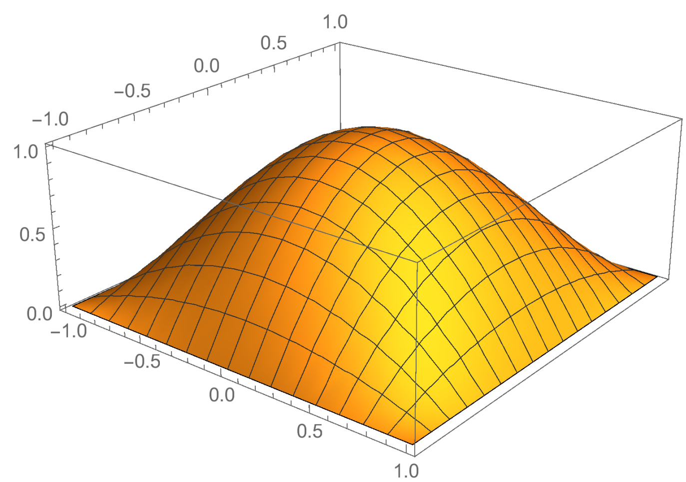
Control 1

P1. (a) **(1 punto)** Sea φ un campo escalar de clase $\mathcal{C}^2$ y $\vec{G}$ un campo vectorial de clase $\mathcal{C}^1$, ambos definidos en $\mathbb{R}^3$. Se define el campo $\vec{F}$ por $\vec{F} = \nabla\phi + \mu\vec{\nabla} \times \vec{G}$. Demuestre que $div(\vec{F}) = \Delta\phi$.

$$\begin{aligned} div(\vec{F}) &= div(\nabla\phi + \mu\vec{\nabla} \times \vec{G}) \\ &= div(\nabla\phi) + \mu \cdot div(\vec{\nabla} \times \vec{G}) && \text{linealidad de la div. } \textbf{(0.5 puntos)} \\ &= \Delta\phi && div(rot(\vec{G})) = 0)\ \textbf{(0.5 puntos)} \end{aligned}$$

(b) Sobre el cuadrado $\{(x, y, 0) |\, x \in [-1, 1],\, y \in [-1, 1]\}$ se encuentra una pila de arena húmeda cuya superficie S superior está descrita por $z = (1 - x^2)(1 - y^2)$. El flujo de vapor de agua está dado por el campo $\vec{F}$ definido en (a), donde $\phi(x, y, z) = x^2 - y^2 + z^2$, $\mu = 1$ y $\vec{G}(x, y, z) = -ye^z\hat{\imath} + x^3\cos(z)\hat{\jmath} + z\sin(xy)\hat{k}$.

(i) **(1 punto)** Bosqueje la superficie S.



(1 punto)

(ii) **(4 puntos)** Obtenga el flujo de vapor que sale hacia arriba a través de la superficie S.

Si definimos por C el cuadrado inferior y V el volumen ocupado por la pila, entonces de acuerdo al teorema de la divergencia

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \underbrace{\iiint_V div(\vec{F})\, dV}_{(1)} - \underbrace{\iint_C \vec{F} \cdot d\vec{S}}_{(2)} \qquad \textbf{(0.5 punto)}$$

De acuerdo a la parte (a), $div(\vec{F}) = \Delta\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} = 2$ **(0.5 puntos)** y por tanto

$$\begin{aligned}(1): \iiint_V div(\vec{F})\, dV &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{0}^{(1-x^2)(1-y^2)} 2\, dz\, dy\, dx \\ &== 2\int_{-1}^{1}(1-x^2)dx \int_{-1}^{1}(1-y^2)dy \\ &= \frac{32}{9} \textbf{ (0.5 puntos)}\end{aligned}$$

Para calcular (2), primero calculamos el campo

$$\vec{F} = \nabla\phi + \vec{\nabla}\times\vec{G} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} xz\cos(xy) + x^3\sin(z) \\ -ye^z - yz\cos(xy) \\ 3x^2\cos(z) + e^z \end{pmatrix} \qquad \textbf{(0.5 puntos)}$$

notemos que una parametrización posible para C es $\sigma(x,y) = (x,y,0)$, $x \in [-1,1], y \in [-1,1]$ cuya normal exterior es $-\hat{k}$ **(0.5 puntos)**. Así:

$$\begin{aligned}(2): \iint_C \vec{F}\cdot d\vec{S} &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \begin{pmatrix} 2 \\ -2-y \\ 3+3x^2 \end{pmatrix} \cdot -\vec{k}\, dx\, dy \\ &= -3\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}(1+x^2)\, dx\, dy \\ &= -6\int_{-1}^{1}(1+x^2)\, dx \\ &= -\frac{48}{3} \qquad \textbf{(1 punto)}\end{aligned}$$

De donde el flujo buscado es $\frac{32}{9} + \frac{48}{3} = \frac{186}{9}$ **(0.5 puntos)**

P2. (a) Sea $u : B(0,R) \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función de clase $\mathcal{C}^2$ en la bola abierta centrada en el origen $B(0,R)$, donde $R > 0$. Suponga que u satisface $\Delta u = 0$ (es decir, u es armónica) en $B(0,R)$.

(i) **(2 puntos)** Demuestre que el campo $\vec{F} = -\frac{\partial u}{\partial y}\hat{\imath} + \frac{\partial u}{\partial x}\hat{\jmath}$ es conservativo en $B(0,R)$.

Para demostrar que es conservativo, demostraremos que la integral de trabajo realizada por el campo sobre toda curva cerrada contenida en $B(0,R)$ es cero **(1 punto)**.

Sea Γ una curva cerrada en $B(0,R)$ que encierra una superficie S. Por el Teorema de Green

$$\int_\Gamma u \cdot d\vec{r} = \iint_S \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right) = \iint_S \Delta u = 0 \qquad \textbf{(1 punto)}$$

(ii) (1 punto) Concluya que existe $v : B(0,R) \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ armónica en $B(0,R)$ tal que

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Dado que u es conservativo entonces existe v de clase $\mathcal{C}^2$ tal que $-\nabla v = \vec{F}$, es decir $\frac{\partial v}{\partial x} = F_x = -\frac{\partial u}{\partial y}$ y $\frac{\partial v}{\partial y} = F_y = \frac{\partial u}{\partial x}$ **(0.5 puntos)**. Además $\Delta v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = 0$ **(0.5 puntos)**.

(b) (3 puntos) Sea $\vec{F}(x,y,z) = (6abz^3y - 20bx^3y^2)\hat{\imath} + (6abxz^3 - 10bx^4y + z\sin(yz))\hat{\jmath} + (18abxyz^2 + y\sin(yz) + 2z)\hat{k}$. Pruebe que es conservativo y determine el potencial asociado.

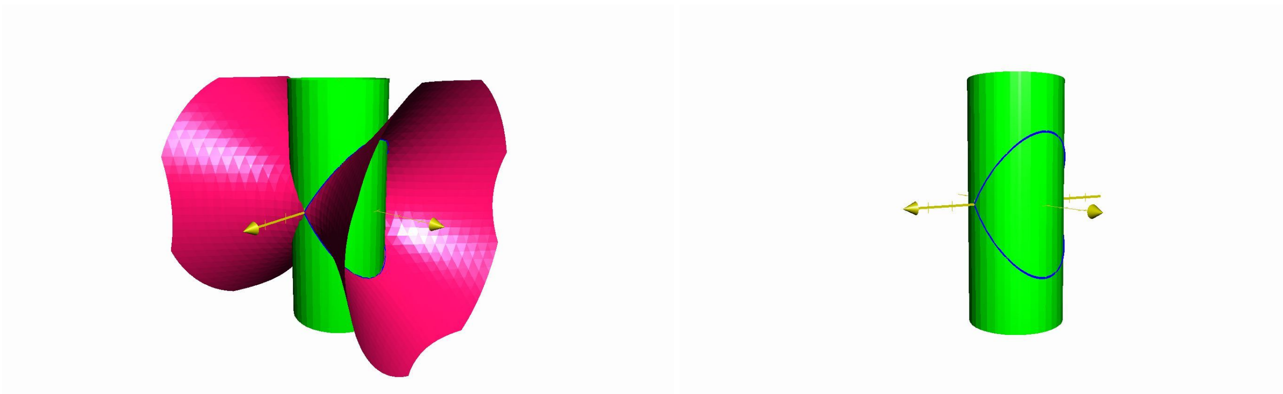
Para demostrar que el campo $\vec{F}$ es conservativo encontraremos su potencial, es decir una función $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tal que $\vec{F} = \nabla g$, o equivalentemente $\frac{\partial g}{\partial x} = F_x, \frac{\partial g}{\partial y} = F_y$ y $\frac{\partial g}{\partial z} = F_z$ **(0.5 punto)**. Luego:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g}{\partial x} &= 6abz^3y - 20bx^3y^2 \\
&\Rightarrow g(x,y,z) = 6abxz^3y - 5bx^4y^2 + C_1(y,z) \qquad \textbf{(0.5 puntos)} \\
\frac{\partial g}{\partial y} &= 6abxz^3 - 10bx^4y + \frac{\partial C_1}{\partial y} = 6abxz^3 - 10bx^4y + zsin(yz) \\
&\Rightarrow g(x,y,z) = 6abxz^3y - 5bx^4y^2 - \cos(yz) + C_2(z) \; \textbf{(1 punto)} \\
\frac{\partial g}{\partial z} &= 18abxyz^2 + y\sin(yz)\frac{\partial C_2}{\partial z} = 18abxyz^2 + y\sin(yz) + 2z \\
&\Rightarrow g(x,y,z) = 6abxz^3y - 5bx^4y^2 - \cos(yz) + z^2 + C \; \textbf{(1 punto)}
\end{aligned}$$

P3. Sea $\mathcal{C}$ la curva que se forma al intersectar las superficies definidas implícitamente por las ecuaciones: $z^2 + x^2 = 4 + y^2$ y $x^2 + y^2 = 4$ con $y \geq 0$.

(a) **(3 puntos)** Dibuje esquemáticamente las superficies y bosqueje la curva $\mathcal{C}$. Encuentre una parametrización de $\mathcal{C}$ en coordenadas cilíndricas.

En coordenadas cilíndricas tenemos que la primera relación impone que la curva esté en la superficie del cilindro $\rho = 2$ **(0.5 puntos)**. Notemos que la segunda ecuación nos dice que la superficie corresponde, para cada $y \in \mathbb{R}$ a una circunferencia paralela al plano XZ de radio $\sqrt{4+y^2}$ **(0.5 puntos)**(ver figura) .



(1 punto)
Luego

$$\begin{aligned} z^2 + 4\cos^2(\theta) &= 4 + 4\sin^2(\theta) \\ z^2 &= 4\sin^2(\theta) + 4(1-\cos^2(\theta)) \\ z &= \pm 2\sqrt{2}\sin(\theta) \end{aligned}$$

Una parametrización posible es la unión de las curvas:

$$\begin{aligned} \gamma_1(\theta) &= 2\hat{\rho} + 2\sqrt{2}\sin(\theta)\hat{k} & \theta \in [0,\pi] \\ \gamma_2(\theta) &= 2(\cos(\theta), -\sin(\theta), 0) + 2\sqrt{2}\sin(\theta)\hat{k} & \theta \in [\pi, 2\pi] \end{aligned}$$

(1 punto)

(b) **(3 puntos)** Considere el campo $\vec{F}$ definido en coordenadas cilíndricas por:

$$\vec{F}(\rho,\theta,z) = (\rho\sin(\theta) + z)\hat{\rho} + (\sin(\theta)z/\rho)\hat{\theta} + (z^3 - \rho\cos(\theta))\hat{k}.$$

Obtenga el trabajo realizado por $\vec{F}$ a lo largo de $\mathcal{C}$ indicando la orientación escogida.

Podemos utilizar el Teorema de Stokes en la porción del cilindro limitado por la curva en (a) y que llamaremos S **(0.5 puntos)**. De acuerdo a la orientación de la curva la normal correspondiente es $-\hat{\rho}$ (figura derecha) **(0.5 puntos)**. Una parametrización de esta superficie es

$$\sigma(\theta, z) = 2\hat{\rho} + z,\ \theta \in [0,\pi],\ z \in [-2\sqrt{2}\sin(\theta), 2\sqrt{2}\sin(\theta)] \qquad \textbf{(1 punto)}$$

Por otro lado notemos que en la superficie la normal apunta en el sentido de $\hat{\rho}$ por tanto calculamos el rotor sólo en esa componente

$$\mathrm{rot}(F)_\rho = \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial F_z}{\partial \theta} - \frac{\partial(\rho F_\theta)}{\partial z}\right) = \frac{\sin(\theta)}{2}$$

Luego

$$\begin{aligned}
\int_\Gamma \vec{F}\cdot d\vec{r} &= \iint_S rot(\vec{F})\cdot d\vec{S}\\
&= \int_0^\pi \int_{-2\sqrt{2}\sin(\theta)}^{2\sqrt{2}\sin(\theta)} (rot(F)_\rho\hat{\rho} + rot(F)_\theta\hat{\theta} + rot(F)_z\hat{z})\cdot(-\hat{\rho})\,dz\,2d\theta\\
&= -\int_0^\pi \int_{-2\sqrt{2}\sin(\theta)}^{2\sqrt{2}\sin(\theta)} \sin(\theta)\,dz\,d\theta\\
&= -4\sqrt{2}\int_0^\pi \sin^2(\theta)\,d\theta\\
&= -2\sqrt{2}\,\pi \qquad \textbf{(1 punto)}
\end{aligned}$$