MA2002 Cálculo Avanzado y Aplicaciones.
Profesor: Carlos Conca - Raúl Gormaz
Auxiliares: Victoria Pérez - Hugo Carrillo - Nicolás Godoy - Carlos Fuentes
23 de septiembre de 2014

Control 1

1. *a*) **(1.2 puntos)** Si $\hat{k}$ es el vector unitario según el eje Z y $\hat{r}$ el vector unitario radial de las coordenadas esféricas, demuestre (trigonometría) que $\hat{k} = \cos(\varphi)\,\hat{r} - \sin(\varphi)\,\hat{\varphi}$, donde φ es el ángulo entre $\vec{r}$ y el eje Z utilizado en las coordenadas esféricas).
Este resultado lo puede utilizar en las partes (b) y (c).

   b) **(1.2 puntos)** Considere el campo escalar $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ definido por:

$$f = \frac{\alpha}{4\pi}\frac{\hat{k}\cdot\vec{r}}{r^3}$$

donde α es un número real.

Calcule $\vec{F} = -\nabla f$, expresandolo en la base $\{\hat{r}, \hat{\varphi}, \hat{\theta}\}$ de las coordenadas esféricas. ¿Podría asegurar que $\vec{F}$ es un campo conservativo?

   c) **(1.2 puntos)** Considere el campo vectorial $\vec{A} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definido por:

$$\vec{A} = \frac{\alpha}{4\pi}\frac{\hat{k}\times\vec{r}}{r^3}$$

Calcule rot $\vec{A}$

   d) **(1.2 puntos)** Sea $B(\vec{0},\varepsilon)$ la esfera centrada en el origen y de radio ε en $\mathbb{R}^3$. Calcule

$$\iint_{B(\vec{0},\varepsilon)} \vec{F}\cdot\hat{n}\,dS$$

donde $\vec{F} = -\nabla f$ es el campo vectorial encontrado en **(b)**.

   e) **(1.2 puntos)** Calcule

$$\iint_{\Sigma} \vec{F}\cdot\hat{n}\,dS$$

donde Σ es cualquier superficie regular y cerrada, que deja al origen en su interior.

2. *a*) **(3 puntos)** La curva representada en la figura siguiente es conocida como Lemniscata de Bernoulli.

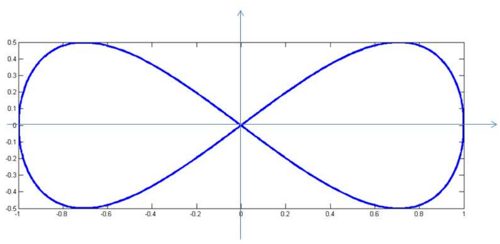

Figura 1: Lemniscata de Bernoulli

Esta curva admite la parametrización

$$\vec{\gamma}(t) \;=\; (\sin(t),\; \sin(t)\cos(t)), \quad t \in [0, 2\pi]$$

y su ecuación cartesiana es

$$x^4 \;=\; x^2 - y^2$$

Calcule el área que encierra la Lemniscata.

Hint: Utilice el Teorema de Green con un campo vectorial adecuado.

b) Considere el campo vectorial:

$$\vec{G}(x,y,z) = e^x \cos(y) z \hat{\imath} - e^x \sin(y) z \hat{\jmath} + [e^x \cos(y) + 1]\, \hat{k}$$

(i) (1.5 puntos) Encuentre un campo escalar $\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\nabla \varphi = \vec{G}$$

(ii) (1.5 puntos) Calcule el trabajo realizado por $\vec{G}$ en el arco de curva definido sobre:

$$\mathcal{C} = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;/\; 4x^2 + y^2 + 10z^2 = 4,\; 2x + y + z = 2,\; x,\, y,\, z \geq 0 \right\}$$

que va desde el punto $(1,0,0)$ al punto $(0,2,0)$.

3. *a*) Considere el campo vectorial

$$\vec{H}(x,y,z) = \left[3x^2 y - 3z + e^x \sin(z)\right] \hat{\imath} + x^2 \hat{\jmath} + [e^x \cos(z) - 3x]\, \hat{k}$$

(i) (1.5 puntos) Calcule rot $\vec{H}$.

(ii) (1.5 puntos) Determine el valor de

$$\oint_{\Gamma} \vec{H} \cdot d\vec{r}$$

donde Γ es la curva parametrizada por

$$\Gamma : \vec{\gamma}(t) = (\cos(t), \sin(t), -\sin(t)), \quad t \in [0, 2\pi]$$

Hint: Note que Γ es el borde inferior de la porción de cilindro de la figura:

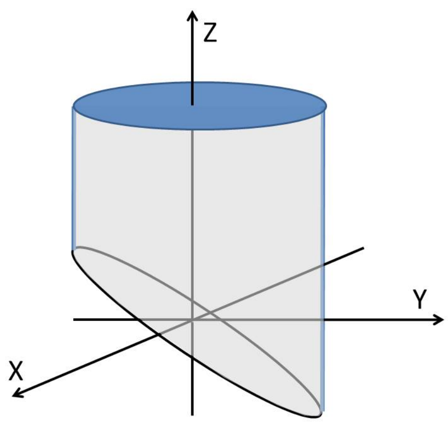

Figura 2: Porción de cilindro solo con tapa superior.

b) La siguiente es la ecuación de Euler para un fluido,

$$\rho(\nabla\cdot\vec{v})\,\vec{v}+\nabla p=-\rho g\hat{k}$$

donde ρ y g son constantes (la densidad y la constante de gravedad respctivamente), $\vec{v}$ es un campo vectorial de clase C^1 (la velocidad) y p es un campo escalar de clase C^1 (la presión).

(i) (1.5 puntos) Demuestre la siguiente identidad, válida para cualquier campo vectorial $\vec{v}$ que sea C^1:

$$(\nabla\cdot\vec{v})\,\vec{v}=\frac{1}{2}\nabla(v_1^2+v_2^2+v_3^2)-\vec{v}\times(\nabla\times\vec{v})$$

Nota: Se utilizó la notación $(\nabla\cdot\vec{v})\,\vec{v}=(\vec{v}\cdot\nabla v_1,\vec{v}\cdot\nabla v_2,\vec{v}\cdot\nabla v_3)$

(ii) (1.5 puntos) Deduzca que si $\vec{v}$ cumple Euler y es además irrotacional, entonces satisface

$$\frac{\rho}{2}(v_1^2+v_2^2+v_3^2)+p+\rho gz=\text{constante}$$

TIEMPO: 3 HORAS.

Recuerdo de algunas fórmulas

- **Teorema de Green:**

$$\int_{\mathcal{C}}\vec{F}\cdot d\vec{l} \;=\; \iint_S\left(\frac{\partial F_2}{\partial x}-\frac{\partial F_1}{\partial y}\right)dxdy$$

- **Teorema de Stokes:**

$$\int_{\mathcal{C}}\vec{F}\cdot d\vec{l} \;=\; \iint_S \operatorname{rot}(\vec{F})\cdot d\vec{S}$$

- **Teorema de Gauss:**

$$\iiint_\Omega \operatorname{div}(\vec{F})\,dV \;=\; \iint_S \vec{F}\cdot d\vec{S}$$

- **Gradiente en coordenadas ortogonales:**

$$\nabla f \;=\; \frac{1}{h_1}\frac{\partial f}{\partial u_1}\hat{u}_1+\frac{\partial f}{\partial u_2}\hat{u}_2+\frac{\partial f}{\partial u_3}\hat{u}_3$$

- **Divergencia en coordenadas ortogonales:**

$$\operatorname{div}(\vec{F}) \;=\; \frac{1}{h_1h_2h_3}\left(\frac{\partial(h_2h_3F_{u_1})}{\partial u_1}+\frac{\partial(h_1h_3F_{u_2})}{\partial u_2}+\frac{\partial(h_1h_2F_{u_3})}{\partial u_3}\right)$$

- **Rotor en coordenadas ortogonales:**

$$\operatorname{rot}(\vec{F}) \;=\; \frac{1}{h_1h_2h_3}\begin{vmatrix} h_1\hat{u}_1 & h_2\hat{u}_2 & h_3\hat{u}_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial u_1} & \dfrac{\partial}{\partial u_2} & \dfrac{\partial}{\partial u_3} \\ h_1F_{u_1} & h_2F_{u_2} & h_3F_{u_3} \end{vmatrix}$$

- **Identidades para el tensor de Levi-Civita**

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{\ell mk}=\delta_{i\ell}\delta_{jm}-\delta_{im}\delta_{j\ell} \quad , \quad \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{\ell jk}=2\delta_{i\ell} \quad \text{y} \quad \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijk}=6$$

- **Coordenadas esféricas:**