CONTROL I CÁLCULO AVANZADO, 2017/1

Profs. J. Dávila, M. del Pino, G. Montecinos

(1) Considere el campo vectorial $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definido por

$\vec{F}(x, y, z) = (3x^2y^2z + 5y^3)\hat{\imath} + (2x^3yz + 15xy^2 - 7z)\hat{\jmath} + (x^3y^2 - 7y + 4z^3)\hat{k}$

(a) (3.5 pts) Calcule $\nabla \times \vec{F}$. Determine si $\vec{F}$ es conservativo, y de ser el caso encuentre un potencial para $\vec{F}$.

(b) (2.5 pts) Sea $C = (\mathcal{C}, \vec{\gamma})$ la curva en $\mathbb{R}^3$ parametrizada por

$$\vec{\gamma}(t) = (\sin^4 t, e^{2(\pi-t)t} \cos^5 t, (1 + t^2)^{\frac{1}{2}} \sin t), \quad t \in [0, \pi].$$

Calcule la integral de línea $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{\ell}$.

(2) (a)(2 pts) Evalúe la integral de línea

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{\ell}, \quad \vec{F}(x, y) = y^2\hat{\imath} + x^2\hat{\jmath}$$

donde C es la curva cerrada simple que es el borde del triángulo de vértices $(0, 0)$, $(1, 1)$ y $(1, 0)$ orientada en sentido antihorario.

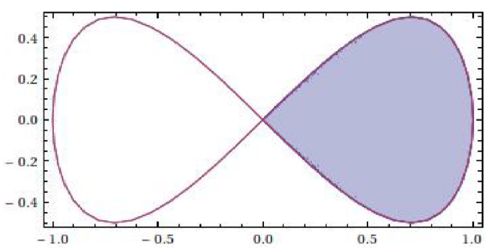
(b) (1.5 pts) Demuestre que si $C = (\mathcal{C}, \gamma)$ es una curva cerrada simple, orientada en sentido antihorario que constituye la frontera de una región $\mathcal{D}$, entonces

$$Area(\mathcal{D}) = \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{\ell}, \quad \vec{F}(x, y) = x\hat{\jmath}.$$

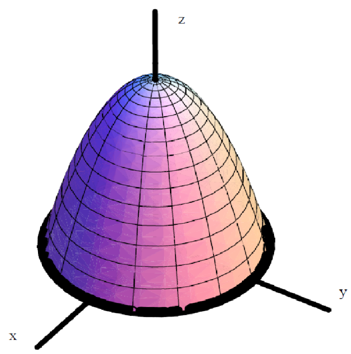
(c) (2.5 pts) La *Lemniscata de Gerono* es la curva en el plano de ecuación $x^4 = x^2 - y^2$ cuya mitad derecha está parametrizada por

$$\vec{\gamma}(t) = (\sin t, \sin t \cos t), \quad t \in [0, \pi].$$

Use la parte (b) para calcuar el área de la región encerrada por la mitad derecha de la Lemniscata.



Lemniscata de Gerono



Paraboloide $z = 4 - x^2 - y^2$.

(3) (a) (3pts) Sea S la superficie cerrada, orientada según su normal exterior, representada por las 6 caras del cubo $[0,1]\times[0,1]\times[0,1]$. Calcule la integral de flujo

$$\iint_S \vec{F}\cdot d\vec{\mathcal{A}}, \quad \vec{F}(x,y,z) = 2xy\hat{\imath} + 3ye^z\hat{\jmath} + x\sin z\hat{\mathrm{k}}.$$

(b) (3pts) Sea S la superficie definida por la región del paraboloide $z = 4 - x^2 - y^2$ con $z \geq 0$ (ver figura), orientada hacia su exterior. Calcule la integral de flujo

$$\iint_S \vec{F}\cdot d\vec{\mathcal{A}},$$

$$\vec{F}(x,y,z) = (xz\sin(yz) + x^3)\hat{\imath} + \cos(yz)\hat{\jmath} + (3zy^2 - e^{x^2+y^2})\hat{\mathrm{k}}.$$

Indicación: "cierre" el paraboloide y use el Teorema de la divergencia.

CONTROL I CÁLCULO AVANZADO, 2017/1

Profs. J. Dávila, M. del Pino, G. Montecinos

(1) Considere el campo vectorial $\vec{F}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ definido por

$\vec{F}(x,y,z) = (3x^2y^2z+5y^3)\hat{\imath} + (2x^3yz+15xy^2-7z)\hat{\jmath} + (x^3y^2-7y+4z^3)\hat{\mathrm{k}}$

(a) (3.5 pts) Calcule $\nabla\times\vec{F}$. Determine si $\vec{F}$ es conservativo, y de ser el caso encuentre un potencial para $\vec{F}$.

(b) (2.5 pts) Sea $C=(\mathcal{C},\vec{\gamma})$ la curva en $\mathbb{R}^3$ parametrizada por

$$\vec{\gamma}(t) = (\sin^4 t, e^{2(\pi-t)t}\cos^5 t, (1+t^2)^{\frac{1}{2}}\sin t), \quad t\in[0,\pi].$$

Calcule la integral de línea $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{\ell}$.

Solución.

• Para la parte (a) calculemos (0.5 pt)

$$\nabla\times\vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{\mathrm{k}} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ 3x^2y^2z+5y^3 & 2x^3yz+15xy^2-7z & x^3y^2-7y+4z^3 \end{vmatrix}$$
$$=(2x^3y-7-(2x^3y-7))\hat{\imath} - \hat{\jmath}(3x^2y^2-3x^2y^2) + \hat{\mathrm{k}}(6x^2yz+15y^2-(6x^2yz+15y^2))$$
$$=(0,0,0).$$

El campo $\vec{F}$ es entonces conservativo ya que es de clase C^1 en $\mathbb{R}^3$, que es un dominio estrellado (0.5 pt) . Encontremos el potencial asociado, esto es una función $f(x,y,z)$ tal que $\nabla f=\vec{F}$. Queremos entonces

$$f_x = 3x^2y^2z+5y^3$$
$$f_y = 2x^3yz+15xy^2-7z$$
$$f_z = x^3y^2-7y+4z^3. \text{ (0.5 pt)}$$

De la primera ecuación obtenemos que

$$f(x,y,z) = \int(3x^2y^2z+5y^3)dx + g(y,z)$$
$$= x^3y^2z+5xy^3+g(y,z).$$

Derivando esta expresión en y y usando la segunda ecuación obtenemos

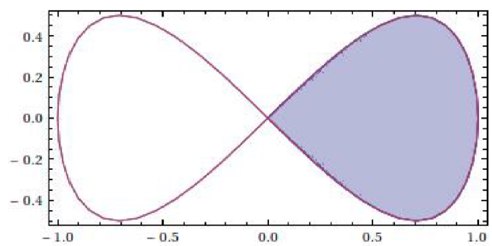
$$f_y(x,y,z) = 2x^3yz+15xy^2-7z = 2x^3yz+15xy^2+g_y(y,z). \text{ (0.5 pt)}$$

De modo que $g_y(y,z)=-7z$, y por lo tanto

$$g(y,z) = -7zy+h(z).$$

De este modo, tenemos que

$$f(x,y,z) = x^3y^2z+5xy^3-7zy+h(z).$$



Lemniscata de Gerono

Derivando en z, usando la tercera ecuación, obtenemos

$$f_z(x,y,z) = x^3y^2 - 7y + 4z^3 = x^3y^2 - 7y + h'(z). \text{ (0.5 pt)}$$

Por ende $h'(z) = 4z^3$, y por lo tanto $h(z) = z^4 + c$. Tomando $c = 0$, un potencial para $\vec{F}$ está dado entonces por

$$f(x,y,z) = x^3y^2z + 5xy^3 - 7zy + z^4. \text{ (0.5 pt)}$$

• Para la parte (b), notemos que por ser $\vec{F}$ conservativo, la integral de linea se escribe en términos del potencial f como

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = f(\vec{\gamma}(\pi)) - f(\vec{\gamma}(0)) = f(0,-1,0) - f(0,1,0) = 0. \text{ (2.5 pt)}$$

$\square$

(2) (a) (2pt) Evalúe la integral de línea

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{\ell}, \quad \vec{F}(x,y) = y^2\hat{\imath} + x^2\hat{\jmath}$$

donde C es la curva cerrada simple que es el borde del triángulo de vértices $(0,0)$, $(1,1)$ y $(1,0)$ orientada en sentido antihorario.

(b) (1.5pt) Demuestre que si $C = (\mathcal{C}, \gamma)$ es una curva cerrada simple, orientada en sentido antihorario que constituye la frontera de una región $\mathcal{D}$, entonces

$$Area(\mathcal{D}) = \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{\ell}, \quad \vec{F}(x,y) = x\hat{\jmath}.$$

(c) (2.5) La *Lemniscata de Gerono* es la curva en el plano de ecuación $x^4 = x^2 - y^2$ cuya mitad derecha está parametrizada por

$$\vec{\gamma}(t) = (\sin t, \sin t \cos t), \quad t \in [0, \pi].$$

Use la parte (b) para calcuar el área de la región encerrada por la mitad derecha de la Lemniscata.

Solución.

• Para la parte (a) usemos el Teorema de Green. Tenemos que si $\mathcal{D}$ es el triángulo sólido, entonces

$$\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{\ell}, \quad \vec{F}(x,y) = \iint_{\mathcal{D}} (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})\, dx\, dy,$$

$$\vec{F} = y^2\hat{\imath} + x^2\hat{\jmath} = P\hat{\imath} + Q\hat{\jmath}.$$

Entonces

$$\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{\ell} = \iint_{\mathcal{D}} (2x-2y)\, dx\, dy \;\; = \;\; (1 \text{ pt})$$

El triángulo $\mathcal{D}$ se describe como $\mathcal{D} = \{(x,y) \;/\; 0 < x < 1, \quad 0 < y < x\}$ (0.5 pt) y por ende

$$\begin{aligned}\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{\ell} &= \iint_{\mathcal{D}} (2x-2y)\, dx\, dy \\ &= 2\int_0^1 \left(\int_0^x (x-y)\, dy\right) dx \\ &= \int_0^1 \left[-y^2 + 2xy\right]_{y=0}^{y=x} dx \\ &= \int_0^1 x^2 dx \;\; = \;\; \frac{1}{3}. \; (1 \text{ pt}) \quad \square\end{aligned}$$

• Para la parte (b), notemos simplemente que por el Teorema de Green se tiene que si

$$\vec{F} = x\hat{\jmath} = P\hat{\imath} + Q\hat{\jmath}.$$

entonces

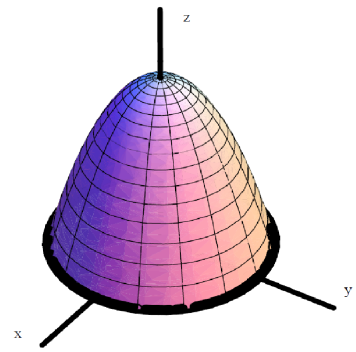
$$\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{\ell} = \iint_{\mathcal{D}} (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})\, dx\, dy = \iint_{\mathcal{D}} 1\, dx\, dy = Area(\mathcal{D}). \; (1.5 \text{ pt}) \quad \square$$

• Finalmente, para la parte (c) usamos la fórmula de la parte (b). Con $\vec{F} = x\hat{\jmath}$. Tenemos que

$$Area(\mathcal{D}) = -\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{\ell} = -\int_0^\pi \vec{F}(\vec{\gamma}(t))\cdot\vec{\gamma}'(t)\, dt$$

esto pues la curva C como está definida está recorrida en sentido horario. (1 pt) Tenemos que $\vec{\gamma}'(t) = (\cos t, \cos^2 t - \sin^2 t)$, de modo que $\vec{F}(\vec{\gamma}(t))\cdot\vec{\gamma}'(t) = (\cos^2 t - \sin^2 t)\sin t$. (0.5 pt) Por lo tanto

$$\begin{aligned}Area(\mathcal{D}) &= -\int_0^\pi (\cos^2 t - \sin^2 t)\sin t\, dt \\ &= -\int_0^\pi (2\cos^2 t - 1)\sin t\, dt \\ &= \frac{2}{3}\cos^3 t - \cos t\,\Big|_{t=0}^{\pi} = \frac{2}{3}. \; (1 \text{ pt}) \quad \square\end{aligned}$$



Paraboloide $z = 4 - x^2 - y^2$.

(3) (a) (3pts) Sea S la superficie cerrada, orientada según su normal exterior, representada por las 6 caras del cubo $[0,1]\times[0,1]\times[0,1]$. Calcule la integral de flujo

$$\iint_S \vec{F}\cdot d\vec{\mathcal{A}}, \quad \vec{F}(x,y,z) = 2xy\hat{\imath} + 3ye^z\hat{\jmath} + x\sin z\hat{\mathrm{k}}.$$

(b) (3pts) Sea S la superficie definida por la región del paraboloide $z = 4 - x^2 - y^2$ con $z \geq 0$ (ver figura), orientada hacia su exterior. Calcule la integral de flujo

$$\iint_S \vec{F}\cdot d\vec{\mathcal{A}},$$

$$\vec{F}(x,y,z) = (xz\sin(yz) + x^3)\hat{\imath} + \cos(yz)\hat{\jmath} + (3zy^2 - e^{x^2+y^2})\hat{\mathrm{k}}.$$

Indicación: "cierre" el paraboloide y use el Teorema de la divergencia.

Solución.

• Para la parte (a) usemos el Teorema de la divergencia. Tenemos que

$$\operatorname{div}\vec{F} = \frac{\partial}{\partial x}(2xy) + \frac{\partial}{\partial y}(3ye^z) + \frac{\partial}{\partial z}(x\sin z) = 2y + 3e^z + x\cos z. \text{ (1 pt)}$$

Del Teorema de la divergencia tenemos que

$$\begin{aligned}\iint_S \vec{F}\cdot d\vec{\mathcal{A}} &= \iiint_{\mathcal{D}} \operatorname{div}\vec{F}dV \\ &= \int_0^1\int_0^1\int_0^1 (2y + 3e^z + x\cos z)dz\,dy\,dx \\ &= \int_0^1\int_0^1 (2y + 3(e-1) + x\sin 1)\,dy\,dx \\ &= \int_0^1 (1 + 3(e-1) + x\sin 1) = 1 + 3(e-1) + \frac{1}{2}\sin 1. \quad \square \text{ (2 pt)}\end{aligned}$$

• Para la parte (b) usemos el Teorema de la divergencia, primero *cerrando* la superficie S, escribiendo $\tilde{S} = S \cup S_1$ parametrizada según su normal exterior, en que S_1 es el disco

$$S_1 = \{(x, y, 0) \ / \ x^2 + y^2 \leq 4\} \text{ (1.5 pt)}$$

Calculamos

$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial}{\partial x}(xz \sin(yz) + x^3) + \frac{\partial}{\partial y}(\cos(yz)) + \frac{\partial}{\partial z}(3zy^2 - e^{x^2+y^2}) = 3x^2 + 3y^2. \text{ (0.5 pt)}$$

Entonces, si $\mathcal{D}$ es la región interior a la superficie, tenemos

$$\begin{aligned}
\iint_{\tilde{S}} \vec{F} \cdot d\vec{\mathcal{A}} = & \iiint_{\mathcal{D}} \operatorname{div} \vec{F} dV \\
= & \iint_{x^2+y^2 \leq 4} \int_0^{4-x^2-y^2} 3(x^2 + y^2) dz\, dy\, dx \\
= & 3 \iint_{x^2+y^2 \leq 4} (4 - x^2 - y^2)(x^2 + y^2)\, dx\, dy \\
= & \int_0^{2\pi} \int_0^2 (12r^3 - 3r^5)\, dr\, d\theta \\
= & 2\pi(3r^4 - \frac{1}{2} r^6)\Big|_{r=0}^{r=2} = 32\pi. \text{ (1 pt)} \qquad \square
\end{aligned}$$