MA2002-4 Cálculo Avanzado y Aplicaciones
Profesor: Víctor Riquelme F.
Auxiliar: Felipe Muñoz H.

Control 1

25 de Abril del 2013

P1. Sea $S \subseteq \mathbb{R}^3$ la superficie regular definida por las ecuaciones $x^2 + y^2 - z^2 = 0$, $x^2 + y^2 - 2ay \leq 0$, $x \geq 0$, $y \geq 0$.

(a) Bosqueje la superficie S, dé una parametrización de ésta, y calcule su área.

(b) Escoja una orientación para S y calcule el flujo del campo vectorial definido en coordenadas cilíndricas $\vec{F} = \rho\hat{\rho} + \cos^2(\theta)e^{\cos^3(\theta)}\hat{\theta}$, a través de S.

(c) Calcule el trabajo del campo $\vec{F}$ definido en la parte **(b)** realizado al recorrer la curva dada por el borde de la superficie S, o sea, la intersección de las superficies $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ y $x^2 + y^2 - 2ay = 0$.

P2. **(a)** Calcular $\iint_S \nabla \times \vec{F} \cdot d\vec{S}$, siendo $\vec{F}$ el campo vectorial definido por $\vec{F} = (x - z)\hat{\imath} + (x^2 + yz)\hat{\jmath} - 3xy\hat{k}$ y S la superficie del cono $x = 2 - \sqrt{y^2 + z^2}$ que queda sobre el plano YZ $(x \geq 0)$ y en el primer octante.
Indicación: Realice un dibujo de la superficie.

(b) Sea Σ la superficie dada por $x^2 + y^2 = a^2$, $z \in [0, h]$, con $a > 0$ fijo. Calcule el flujo a través de Σ del campo

$$\vec{F}(x, y, z) = \left(e^z \sin(y) + xy^2 z\,,\ e^x \cos(z) + x^2 yz\,,\ x^2 e^z\right).$$

P3. El objetivo de este ejercicio es demostrar el **Teorema de Stokes** en el caso particular en el que la superficie es el grafo de una función $\mathcal{C}^2$. Para ello, sean $D \subseteq \mathbb{R}^2$ una región en el plano que satisface las hipótesis del **Teorema de Green**, y $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función de clase $\mathcal{C}^2$. Sean $S \in \mathbb{R}^3$ la superficie definida por el grafo de la función f, y $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$ un campo vectorial de clase $\mathcal{C}^1$ en $\mathbb{R}^3$. Demostraremos que:

$$\iint_S \text{rot}(\vec{F}) \cdot d\vec{S} = \int_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{r},$$

donde S y ∂S están orientadas de forma compatible. Para esto se procederá de la siguiente forma:

(a) Pruebe que para todo campo $\vec{G} = (G_1, G_2, G_3)$ continuo en $\mathbb{R}^3$ se tiene:

$$\iint_S \vec{G} \cdot d\vec{S} = \iint_D \left(-\frac{\partial f}{\partial x}G_1 - \frac{\partial f}{\partial y}G_2 + G_3\right) dxdy. \qquad (1)$$

(b) Probar directamente de la definición de integral vectorial sobre trayectorias, que:

$$\int_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\partial D} \vec{H} \cdot d\vec{r},$$

donde $\vec{H}$ es el campo vectorial en $\mathbb{R}^2$ dado por:

$$\vec{H}(x, y) = \left(F_1(x, y, f(x, y)) + F_3(x, y, f(x, y))\frac{\partial f}{\partial x}\,,\ F_2(x, y, f(x, y)) + F_3(x, y, f(x, y))\frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

(c) Aplique el teorema de Green al campo $\vec{H}$ definido en la parte **(b)**.

(d) Aplique la igualdad (1) al campo $\vec{G} = \text{rot}(\vec{F})$ y concluya.

Tiempo: 3 horas.