MA2002 Cálculo Avanzado y Aplicaciones
Profesores: Gino Montecinos, Víctor Riquelme y Emilio Vilches

Pauta Control 1

Jueves 20 de Octubre de 2016

P1. Considere la superficie definida por

$$S = \{(\cos(z)\cos(\theta), \cos(z)\sin(\theta), z) \colon \theta \in [0, 2\pi), z \in [0, \pi/2]\}.$$

(a) Calcule el área de S.

(b) Escoja una orientación para S y calcule $\iint_S \vec{F} \cdot \hat{n} dS$ para los siguientes campos vectoriales:

- **i)** $\vec{F}(x, y, z) = (x, y, 0)$.
- **ii)** $\vec{F}(r, \varphi, \theta) = \big(\exp(r^3) + \cos(\varphi)\big)\,\hat{\theta}$ (en coordenadas esféricas).
- **iii)** $\vec{F}(r, \varphi, \theta) = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{\hat{r}}{r^2}$ (en coordenadas esféricas).
  Indicación: $\vec{F}$ corresponde al campo eléctrico generado por una carga puntual Q situada en el origen.

Solución:

(a) Una parametrización de S es:

$$\vec{r}(\theta, z) = \cos(z)\hat{\rho} + z\hat{k} \quad \theta \in [0, 2\pi), z \in [0, \pi/2].$$

Además,

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} = \cos(z)\hat{\theta}$$
$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial z} = -\sin(z)\hat{\rho} + \hat{k}.$$

Así,

$$\hat{n}dS = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial z}\, d\theta dz = \cos(z)\hat{\theta} \times (-\sin(z)\hat{\rho} + \hat{k})\, d\theta dz = \Big(\sin(z)\cos(z)\hat{k} + \cos(z)\hat{\rho}\Big)\, d\theta dz.$$

Luego,

$$\boxed{\text{Área de } S = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2} \sqrt{1 + \sin^2(z)}\,\cos(z) dz d\theta = \Big(\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2})\Big)\,\pi.}$$

Puntaje: 1.0 punto por calcular $\hat{n}dS$, 0.3 puntos por plantear la integral y 0.2 puntos por calcular la integral.

(b) **i)**

$$\boxed{\iint_S \vec{F} \cdot \hat{n}dS = \int_0^{\pi/2}\int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \cos(z)\cos(\theta) \\ \cos(z)\sin(\theta) \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(z)\cos(\theta) \\ \cos(z)\sin(\theta) \\ \sin(z)\cos(z) \end{pmatrix} d\theta dz = 2\pi \int_0^{\pi/2} \cos^2(z) dz = \frac{\pi^2}{2}.}$$

Puntaje: 1.3 punto por escribir la integral correctamente y 0.2 por calcular la integral.

ii) Calculamos la divergencia de $\vec{F}$:

$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{1}{r^2 \sin\varphi}\left[\frac{\partial}{\partial r}(0 \cdot r^2 \sin\varphi) + \frac{\partial}{\partial \theta}((\exp(r^3) + \cos\varphi) \cdot r) + \frac{\partial}{\partial \varphi}(0 \cdot r\sin(\varphi))\right] = 0. \tag{1}$$

Consideremos la superficie $T = \{(\rho\cos(\theta), \rho\sin(\theta), 0)\colon \theta \in [0, 2\pi), \rho \in [0, 1]\}$ orientada según la normal $\hat{n} = -\hat{k}$. Entonces, aplicando el Teorema de la divergencia a la superficie $S \cup T$, orientada según la normal exterior al volumen $V(S \cup T)$ encerrado por $S \cup T$, se obtiene

$$\iint_{S\cup T} \vec{F} \cdot \hat{n} dS = \iint_{S} \vec{F} \cdot \hat{n} dS + \iint_{T} \vec{F} \cdot \hat{n} dS = \iiint_{V(S\cup T)} \operatorname{div}(\vec{F}) dV = 0.$$

Además, $\vec{F}|_T = \big(\exp(\rho^3) + \cos(\pi/2)\big)\,\hat{\theta} = \exp(\rho^3)\hat{\theta}$. Luego,

$$\boxed{\iint_{S} \vec{F} \cdot \hat{n} dS = -\iint_{T} \vec{F} \cdot \hat{n} dS = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \exp(\rho^3)\hat{\theta} \cdot \rho\hat{k}\, d\theta d\rho = 0.}$$

Puntaje: 0.5 puntos por calcular la divergencia, 0.5 puntos por la utilización correcta del Teorema de la divergencia, 0.5 por el calculo sobre T.

iii) Sea E el manto inferior de la esfera de radio 1 orientada según $\hat{r}$ y supongamos que S está orientada según la normal exterior al volumen definido por $S \cup E$. Entonces, de acuerdo con el teorema de Gauss para el flujo eléctrico, se tiene

$$\iint_{S\cup E} \vec{F} \cdot \hat{n} dS = \iint_{S} \vec{F} \cdot \hat{n} dS + \iint_{E} \vec{F} \cdot \hat{n} dS = \frac{Q}{\varepsilon_0}.$$

Luego,

$$\iint_{S} \vec{F} \cdot \hat{n} dS = -\iint_{E} \vec{F} \cdot \hat{n} dS + \frac{Q}{\varepsilon_0}.$$

Además,

$$\iint_{E} \vec{F} \cdot \hat{n} dS = \int_{\pi/2}^{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \hat{r} \cdot \hat{r} \sin\varphi d\theta d\varphi = \frac{Q}{2\varepsilon_0}.$$

Así,

$$\boxed{\iint_{S} \vec{F} \cdot \hat{n} dS = \frac{Q}{2\varepsilon_0}.}$$

Puntaje: 1.0 punto por la utilización correcta del Teorema de Gauss para el flujo eléctrico y 0.5 puntos por el calculo sobre el manto inferior de la esfera.

P2. **(a)** Calcule $\int_\Gamma \vec{F}\cdot d\vec{r}$ donde $\vec{F} = \rho\hat{\rho} + \frac{1}{2}\rho\cos(\theta)\exp(\sin^3(\theta))\hat{\theta}$ (en coordenadas cilíndricas) donde Γ es la curva que se obtiene al intersectar la superficie $z = \sqrt{x^2+y^2}$ con la frontera del volumen definido por $x^2+y^2-2y \leq 0$ (precise la orientación escogida para la curva).

(b) Sea $\vec{r}$ el campo vectorial dado por $\vec{r}(x,y,z) = (x,y,z)$. Dada una superficie regular S y un vector fijo $\vec{v}_0 \in \mathbb{R}^3$, demuestre que

$$\iint_S \vec{v}_0 \cdot \hat{n}\, dS = \begin{cases} \frac{1}{2}\oint_{\partial S} (\vec{v}_0 \times \vec{r}) \cdot d\vec{r} & \text{si } S \text{ tiene borde } \partial S \neq \emptyset, \\ 0 & \text{si } S \text{ es una superficie cerrada,} \end{cases}$$

donde S y ∂S tienen orientaciones compatibles (explique).

(c) Suponga que Γ es una curva suave, cerrada y simple, contenida en un plano que tiene como vector unitario normal a $\hat{n} = (a,b,c)$ y recorrida de manera positiva con respecto a $\hat{n}$. Considere el campo vectorial $\vec{F}(x,y,z) = (bz-cy, cx-az, ay-bx)$. Pruebe que el área encerrada por la curva Γ es igual a $\dfrac{1}{2}\displaystyle\oint_\Gamma \vec{F}\cdot d\vec{r}$.

Solución:

(a) **Primera forma**: Cálculo directo:
Se parametriza la curva usando coordenadas cilíndricas. Así, una parametrización posible es

$$\vec{r}(\theta) = 2\sin(\theta)\left(\hat{\rho}+\hat{k}\right) \quad \theta \in [0,\pi].$$

Además,

$$\vec{F}(\vec{r}(\theta)) = 2\sin(\theta)\hat{\rho} + \sin(\theta)\cos(\theta)\exp(\sin^3(\theta))\hat{\theta}$$

y

$$\frac{d\vec{r}}{d\theta}(\theta) = 2\cos\theta\hat{\rho} + 2\sin(\theta)\hat{\theta} + 2\cos(\theta)\hat{k}.$$

Por lo tanto,

$$\boxed{\int_\Gamma \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_0^\pi \left(4\cos(\theta)\sin(\theta) + 2\sin^2(\theta)\exp(\sin^3(\theta))\cos(\theta)\right)d\theta = 0.}$$

Puntaje: 0.8 puntos por la parametrización, 0.5 puntos por evaluar $\vec{F}(\vec{r}(\theta))$ y calcular $\frac{d\vec{r}}{d\theta}(\theta)$, 0.5 puntos por escribir correctamente la integral de línea y 0.2 por calcular correctamente la integral.

Segunda forma: Utilizando el Teorema de Stokes:
Consideremos la superficie S generada por la intersección de la superficie $z = \sqrt{x^2+y^2}$ con el volumen $x^2+y^2-2y \leq 0$ cuya parametrización es:

$$\vec{r}(\rho,\theta) = \rho\hat{\rho} + \rho\hat{k} \quad \rho \in [0, 2\sin\theta], \theta \in [0,\pi], \tag{2}$$

con $\hat{n}dS = \rho(\hat{k}-\hat{\rho})d\rho d\theta$. Además, $\vec{F}$ es de clase C^1 con rotor igual a:

$$\text{rot}(\vec{F}) = \frac{1}{\rho}\begin{vmatrix} \hat{\rho} & \rho\hat{\theta} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial\rho} & \frac{\partial}{\partial\theta} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \rho & \frac{1}{2}\rho^2\cos(\theta)\exp(\sin^3(\theta)) & 0 \end{vmatrix} = \cos(\theta)\exp(\sin^3(\theta))\hat{k}, \tag{3}$$

Luego, por el teorema de Stokes,

$$\begin{aligned} \int_\Gamma \vec{F}\cdot d\vec{r} &= \iint_S \text{rot}(\vec{F})\cdot\hat{n}dS \\ &= \int_0^\pi \int_0^{2\sin(\theta)} \cos(\theta)\exp(\sin^3(\theta))\hat{k}\cdot\rho(\hat{k}-\hat{\rho})d\rho d\theta \\ &= 2\int_0^\pi \sin^2(\theta)\exp(\sin^3(\theta))\cos(\theta)d\theta \\ &= \frac{2}{3}\exp(\sin^3(\theta))\Big|_0^\pi \\ &= 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\boxed{\int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0.}$$

Puntaje: 0.8 puntos por la parametrización de la superficie, 0.5 puntos por el cálculo del rotor, 0.5 puntos por aplicar correctamente el Teorema de Stokes y 0.2 por calcular la integral.

(b) Notemos que: $\operatorname{div}(\vec{v}_0 \times \vec{r}) = 0$ y $\operatorname{rot}(\vec{v}_0 \times \vec{r}) = 2\vec{v}_0$. Luego, aplicando el Teorema de Stokes y el Teorema de la divergencia, respectivamente,

$$\iint_S \vec{v}_0 \cdot \hat{n} dS = \begin{cases} \frac{1}{2}\int_{\partial S}(\vec{v}_0 \times \vec{r}) \cdot d\vec{r} & \text{si } S \text{ tiene borde } \partial S \neq \emptyset, \\ \iint_{V(S)} \operatorname{div}(\vec{v}_0 \times \vec{r}) dV & \text{si } S \text{ es una superficie cerrada,} \end{cases}$$

donde $V(S)$ es el volumen definido por S cuando S es una superficie cerrada.
Puntaje: 1 punto por el cálculo de la divergencia y el rotor y 1 punto por la aplicación del Teorema de Stokes y el Teorema de la divergencia.

(c) Notemos que $\operatorname{rot}(\vec{F}) = 2(a, b, c)$. Luego,

$$\boxed{\text{Área de } S = \iint_S dS = \iint_S \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \cdot \hat{n} dS = \frac{1}{2}\iint_S \operatorname{rot}(\vec{F}) \cdot \hat{n} dS = \frac{1}{2}\oint_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}.}$$

Puntaje: 0.7 puntos por el calculo del rotor, 0.7 puntos por notar que la integral de área es la integral de flujo del rotor y 0.6 puntos por la aplicación del teorema del Rotor.

P3. **(a)** Considere el campo vectorial $\vec{F}(x,y) = \big((x^2-y^2)e^x\cos(y) - 2xye^x\sin(y), (y^2-x^2)e^x\sin(y) - 2xye^x\cos(y)\big)$. Calcule $\int_\Gamma \vec{F}\cdot d\vec{r}$ donde Γ es la curva $\Gamma = \{(\cos(\theta), \sin(\theta), 0)\colon \theta \in [0,\pi]\}$ recorrida en sentido antihorario.

(b) Muestre que el campo $\vec{F}(x,y,z) = (\cos(x)\cosh(y), \sin(x)\sinh(y), 0)$ es conservativo en $\mathbb{R}^3$ y encuentre el potencial asociado.

(c) Considere el campo $\vec{F}(x,y) = \left(\dfrac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}, \dfrac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\right)$. ¿Es $\vec{F}$ un campo conservativo en todo $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$?

Solución:

(a) Consideremos la curva $\tilde{\Gamma}$ parametrizada por $\vec{r}(t) = (t,0)$ con $t\in[-1,1]$ y notemos que $\vec{F}$ se puede escribir como $\vec{F} = (M,N)$ con $M(x,y) = (x^2-y^2)e^x\cos(y) - 2xye^x\sin(y)$ y $N(x,y) = (y^2-x^2)e^x\sin(y) - 2xye^x\cos(y)$ de clase C^1 en $\mathbb{R}^2$. Entonces, aplicando el teorema de Green,

$$\int_{\Gamma\cup\tilde{\Gamma}} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \iint_S \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dxdy = 0.$$

Luego,

$$\boxed{\int_\Gamma \vec{F}\cdot d\vec{r} = -\int_{\tilde{\Gamma}} \vec{F}\cdot d\vec{r} = -\int_{-1}^{1} \begin{pmatrix} t^2e^t \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} dt = \frac{5}{e} - e.}$$

Puntaje: 0.5 puntos por verificar que $\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} = 0$ en S, 0.8 puntos por utilizar el Teorema de Green, 0.5 puntos por escribir la integral de línea sobre $\tilde{\Gamma}$ y 0.2 puntos por calcular esta integral.

(b) Buscamos una función $\phi(x,y,z)$ tal que $\vec{F} = -\nabla\phi$, es decir,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\phi}{\partial x} = -\cos(x)\cosh(y), \\ \dfrac{\partial\phi}{\partial y} = -\sin(x)\sinh(y), \\ \dfrac{\partial\phi}{\partial z} = 0. \end{cases} \tag{4}$$

Notemos que la tercera ecuación de (4) implica que $\phi(x,y,z) = \phi(x,y)$. Además, integrando parcialmente con respecto a x la primera ecuación de (4), $\phi = -\sin(x)\cosh(y) + C(y)$, donde $C(y)$ es una función que depende solamente de y. Derivando con respecto a y, se obtiene

$$\frac{\partial\phi}{\partial y} = -\sin(x)\sinh(y) + C'(y).$$

Igualando con la segunda ecuación de (4), se obtiene que $C'(y) = 0$. Por lo tanto,

$$\boxed{\phi(x,y) = -\sin(x)\cosh(y) + C,}$$

donde C es una constante arbitraria.
Puntaje: 0.5 puntos por decir que ϕ no depende de z, 0.5 puntos por integral parcialmente con respecto a x, 0.5 puntos por obtener que $C'(y) = 0$ y 0.5 puntos por obtener correctamente la fórmula para ϕ.

(c) El campo es conservativo.
Primera forma: Encontrar el potencial asociado:

$$\boxed{\phi(x,y) = -\frac{x}{x^2+y^2}}$$

es un potencial para $\vec{F}$ sobre $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$.
Puntaje: La distribución de puntaje es igual a la de la parte anterior.
Segunda forma: Dado que $\mathrm{rot}(\vec{F}) = 0$ sobre $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$, por el teorema de Green, basta demostrar que la integral de línea sobre toda curva Γ cerrada y regular por pedazos es 0. En efecto, basta demostrar que la integral de línea sobre la curva $\Gamma_a = \{(a\cos(\theta), a\sin(\theta))\colon \theta\in[0,2\pi]\}$ es cero para todo $a>0$.

$$\int_{\Gamma_a} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \frac{1}{a^4}\int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} a^2\cos^2(\theta) - a^2\sin^2(\theta) \\ 2a^2\cos(\theta)\sin(\theta) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin(\theta) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix} d\theta = \frac{1}{a^2}\int_0^{2\pi} \big(\cos^2(\theta)\sin(\theta) + \sin^3(\theta)\big)\, d\theta = 0.$$

Puntaje: 0.5 puntos por mostrar que el rotor de $\vec{F}$ es nulo sobre $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, 0.8 puntos por explicar por qué basta con demostrar que la integral de línea de la curva Γ_a es cero para todo $a > 0$ y 0.7 puntos por mostrar que la integral de línea sobre Γ_a vale cero para cualquier $a > 0$.