

Control 1 MA26B Matemáticas Aplicadas

Semestre 2004-2

2 de septiembre de 2004

Profesores: I. Guerra, P. Guiraud, J. Dávila

Problema 1. a) Sea $r(s) = (x(s), y(s), 0)$ una curva plana parametrizada con respecto a longitud de arco con curvatura $k > 0$ constante y tal que

$$r(0) = (0, 0, 0), \quad T(0) = (0, 1, 0), \quad N(0) = (-1, 0, 0).$$

i) (1.5 pts.) Pruebe, utilizando las fórmulas de Frenet, que

$$\frac{d^2 T}{ds^2} + k^2 T = 0.$$

ii) (1.5 pts.) Encuentre $r(s)$ explícitamente.

b) Considere el campo vectorial conservativo

$$\vec{G}(x, y, z) = (y^2 \cos x + z^3, 2y \sin x - 4, 3xz^2 + 2).$$

i) (2 pts.) Encuentre g tal que $\nabla g = \vec{G}$.

ii) (1 pto.) Calcule $\int_C \vec{G} \cdot d\vec{r}$ donde C es la curva

$$\begin{aligned} x(t) &= \sqrt{2\pi - t} \cos t \\ y(t) &= \sqrt{2\pi - t} \sin t \\ z(t) &= t \quad t \in [0, 2\pi]. \end{aligned}$$

Problema 2. a) (4.5 pts.) Calcule el flujo del campo

$$\vec{F}(x, y, z) = (e^z \sin y + xy^2 z, e^x \cos z + x^2 yz, x^2)$$

a través del manto del cono de ecuación $z = r - 1$, $-1 \leq z \leq 0$, donde $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

b) (1.5 pts.) ¿Es el campo \vec{F} de la parte anterior el rotor de un campo \vec{G} de clase C^2 ?

Problema 3. Considere el toro de radio mayor R y de radio menor a , donde $R > a > 0$ son constantes. Sea Σ la porción de superficie de dicho toro que se encuentra fuera de la esfera de ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, la cual orientamos según la normal exterior al toro.

a) (3 pts.) Demuestre que si \vec{F} es un campo continuamente diferenciable en Σ , entonces se satisface:

$$\iint_{\Sigma} \vec{\nabla} \times \vec{F} \cdot \hat{n} dA = \oint_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} - \oint_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

donde C_1 y C_2 son las circunferencias obtenidas de la intersección del cilindro $x^2 + y^2 = d^2$ con los planos $z = z_1$ y $z = z_2$ respectivamente, con $d = \frac{2R^2 - a^2}{2R}$, $z_1 = \frac{a\sqrt{4R^2 - a^2}}{2R}$ y $z_2 = -z_1$, ambas orientadas en el sentido antihorario.

b) (3 pts.) Para el campo $\vec{F} = (e^{-z^2}/\rho)\hat{\rho} + z\hat{\theta} + z\sin(\theta)\cos^2(\theta)\hat{k}$ calcule:

$$\iint_{\Sigma} \vec{\nabla} \times \vec{F} \cdot \hat{n} dA.$$

TIEMPO: 3 HORAS.

FORMULARIO

Curvas

s : parámetro de longitud de arco, T : vector tangente unitario, N : vector normal unitario, B : vector binormal, κ : curvatura, τ : torsión

Se tiene

$$\begin{aligned}\frac{dN}{ds} &= -\kappa T + \tau B \\ \frac{dB}{ds} &= -\tau N.\end{aligned}$$

Operadores diferenciales

Si F y G son campos C^1 , f es C^1 escalar

$$\begin{aligned}\nabla \cdot (fF) &= \nabla f \cdot F + f \nabla \cdot F \\ \nabla \times (fF) &= \nabla f \times F + f \nabla \times F \\ \nabla \cdot (F \times G) &= G \cdot (\nabla \times F) - F \cdot (\nabla \times G)\end{aligned}$$

Divergencia y rotor en algunas coordenadas

Divergencia en cilíndricas:

$$\nabla \cdot F = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(rF_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial F_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

Divergencia en esféricas:

$$\nabla \cdot F = \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \rho}(\rho^2 F_\rho) + \frac{1}{\rho \sin \theta} \frac{\partial F_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{1}{\rho \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta}(F_\theta \sin \theta)$$

Rotor en cilíndricas:

$$\nabla \times F = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial F_z}{\partial \theta} - r \frac{\partial F_\theta}{\partial z} \right) \hat{r} + \left(\frac{\partial F_r}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial r} \right) \hat{\theta} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r}(rF_\theta) - \frac{\partial F_r}{\partial \theta} \right) \hat{z}$$

Rotor en esféricas:

$$\begin{aligned}\nabla \times F &= \frac{1}{\rho^2 \sin \theta} \left(\frac{\partial}{\partial \theta}(F_\varphi \rho \sin \theta) - \frac{\partial}{\partial \varphi}(F_\theta \rho) \right) \hat{\rho} + \frac{1}{\rho \sin \theta} \left(\frac{\partial F_\rho}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial \rho}(F_\varphi \rho \sin \theta) \right) \hat{\theta} \\ &\quad + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial}{\partial \rho}(F_\theta \rho) - \frac{\partial F_\rho}{\partial \theta} \right) \hat{\varphi}\end{aligned}$$

Control 1 MA26B Matemáticas Aplicadas

Semestre 2004-2

2 de Septiembre de 2004

Pauta

Problema 1

- a) Sea $r(s) = (x(s), y(s), 0)$ una curva plana parametrizada con respecto a longitud de arco con curvatura $k > 0$ constante y tal que

$$r(0) = (0, 0, 0), \quad T(0) = (0, 1, 0), \quad N(0) = (-1, 0, 0).$$

- i) (1.5 ptos.) Pruebe, utilizando las fórmulas de Frenet, que

$$\frac{d^2 T}{ds^2} + k^2 T = 0.$$

- ii) (1.5 ptos.) Encuentre $r(s)$ explícitamente.

- b) Considere el campo vectorial conservativo

$$\vec{G}(x, y, z) = (y^2 \cos x + z^3, 2y \sin x - 4, 3xz^2 + 2).$$

- i) (2 ptos.) Encuentre g tal que $\nabla g = \vec{G}$.

- ii) (1 pto.) Calcule $\int_C \vec{G} \cdot d\vec{r}$ donde C es la curva

$$x(t) = \sqrt{2\pi - t} \cos t$$

$$y(t) = \sqrt{2\pi - t} \sin t$$

$$z(t) = t \quad t \in [0, 2\pi].$$

Solución.

- a) i) Usando la relación entre la derivada del vector tangente T y el vector normal N y el hecho de que la curvatura es constante:

$$\frac{dT}{ds} = \kappa N \implies \frac{d^2 T}{ds^2} = \kappa \frac{dN}{ds}$$

Pero por Frenet, y dado que la curva es plana lo que asegura que la torsión τ de la curva es idénticamente nula, se sigue que:

$$\frac{d^2 T}{ds^2} = \kappa [-\kappa T + \tau B] = -\kappa^2 T,$$

es decir

$$\frac{d^2 T}{ds^2} + \kappa^2 T = 0. \tag{0.1}$$

ii) La ecuación (??), dado que $\kappa > 0$ es un número real, tiene la conocida solución

$$T(s) = A \operatorname{sen}(\kappa s) + B \cos(\kappa s) \quad \text{con } A, B \in \mathbb{R}^3.$$

Dado que $T'(s) = \kappa N$ se tienen las condiciones iniciales

$$\begin{aligned} T(0) &= (0, 1, 0) = \hat{j} = B \\ T'(0) &= \kappa N(0) = \kappa(-1, 0, 0) = -\kappa \hat{i} = \kappa A \end{aligned}$$

de donde $A = -\hat{i}$, $B = \hat{j}$. De esta manera el vector tangente queda definido por $T(s) = (-\operatorname{sen}(\kappa s), \cos(\kappa s), 0)$ y dado que la parametrización está dada en longitud de arco se tiene que $r'(s) = T(s)$ por lo que, integrando esta ecuación:

$$\begin{aligned} x(s) &= -\frac{1}{\kappa} \cos(\kappa s) + x_0 \\ y(s) &= \frac{1}{\kappa} \operatorname{sen}(\kappa s) + y_0. \end{aligned}$$

Finalmente como $r(s=0) = (0, 0, 0)$ entonces

$$\begin{aligned} x_0 &= -\frac{1}{\kappa} \\ y_0 &= 0, \end{aligned}$$

y la parametrización queda:

$$r(s) = \frac{1}{\kappa} (\cos(\kappa s) - 1, \operatorname{sen}(\kappa s), 0).$$

b) Tenemos $\vec{G}(x, y, z) = (y^2 \cos x + z^3, 2y \operatorname{sen} x - 4, 3xz^2 + 2)$.

i) Buscamos g talque $\nabla g = \vec{G}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial x} &= y^2 \cos x + z^3 \quad \longrightarrow \quad g(x, y, z) = y^2 \operatorname{sen} x + z^3 x + h_1(y, z) \\ \frac{\partial g}{\partial y} &= 2y \operatorname{sen} x - 4 \quad \longrightarrow \quad g(x, y, z) = y^2 \operatorname{sen} x - 4y + h_2(x, z) \\ \frac{\partial g}{\partial z} &= 3xz^2 + 2 \quad \longrightarrow \quad g(x, y, z) = 2z + xz^3 + h_3(x, y). \end{aligned}$$

Comparamos y proponemos

$$g(x, y, z) = y^2 \operatorname{sen} x + z^3 x - 4y + 2z,$$

y se verifica directamente que $\nabla g = \vec{G}$.

ii) La curva se recorre desde $\vec{r}(0) = (x(0), y(0), z(0)) = (\sqrt{2\pi}, 0, 0)$ hasta $\vec{r}(2\pi) = (0, 0, 2\pi)$.

Dado que \vec{G} es un campo conservativo con potencial asociado g :

$$\int_C \vec{G} \cdot d\vec{r} = \int_C \nabla g \cdot d\vec{r} = g(\vec{r}(2\pi)) - g(\vec{r}(0)) = 4\pi.$$

Problema 2

- a) (4.5 ptos.) Calcule el flujo del campo

$$\vec{F}(x, y, z) = (e^z \sin y + xy^2z, e^x \cos z + x^2yz, x^2)$$

a través del manto del cono de ecuación $z = r - 1$, $-1 \leq z \leq 0$, donde $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

- b) (1.5 ptos.) ¿Es el campo \vec{F} de la parte anterior el rotor de un campo \vec{G} de clase C^2 ?

Solución.

- a) Dado que el cono se describe por la ecuación en coordenadas cilíndricas $z = r - 1$, $z \in [-1, 0]$, para $z = -1$ se tiene $r = 0$ (el vértice del cono está en $(0, 0, -1)$) y la base del cono está situada en el plano XY , siendo un círculo de radio 1 y centrado en el origen. Podemos considerar así la superficie cerrada que encierra al cono (manto + base).

Es claro que el campo \vec{F} es de clase $C^\infty(\mathbb{R}^3)$ por álgebra de funciones y luego, si orientamos la superficie del cono según la normal exterior, podemos aplicar el teorema de la divergencia a esta situación:

$$\nabla \vec{F} = (y^2z) + (x^2z) + 0 = z(x^2 + y^2) = r^2z,$$

donde al final usamos coordenadas cilíndricas. Se tiene entonces que, denotando M al manto del cono, B a la base del cono y C al cono:

$$\int_M \vec{F} \cdot \hat{n} ds + \int_B \vec{F} \cdot \hat{n} ds = \int_C \nabla \cdot \vec{F} dv$$

puesto que $dv = r dr dz d\theta$ en coordenadas cilíndricas. Calculemos

$$\begin{aligned} \int_C \nabla \cdot \vec{F} dv &= \int_0^{2\pi} \int_{-1}^0 \int_0^{z+1} (r^2z) r dr dz d\theta \\ &= 2\pi \int_{-1}^0 \frac{(z+1)^4 z}{4} dz \\ &= \frac{\pi}{2} \int_0^1 s^4 (s-1) ds \quad (\text{cambio de variables } z+1 = s) \\ &= \frac{\pi}{2} \int_0^1 (s^5 - s^4) ds \\ &= -\frac{\pi}{60}. \end{aligned}$$

Ahora calculemos el flujo del campo por la base del cono, observando que el vector normal exterior al cono en esta superficie viene dado por \hat{k} . Luego $\vec{F} \cdot \hat{n} = x^2 = r^2 \cos^2 \theta$ en

coordenadas polares. De este modo

$$\begin{aligned}\int_B \vec{F} \cdot \hat{n} \, ds &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^2 \cos^2 \theta \, r \, dr d\theta \\ &= \int_0^1 r^3 \, dr \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta \, d\theta \\ &= \frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

Hemos utilizado el hecho que $\int_0^{2\pi} \cos^2 \theta \, d\theta = \pi$ lo que se puede obtener de la identidad $\cos^2 \theta = \frac{1+\cos(2\theta)}{2}$.

Finalmente

$$\begin{aligned}\int_M F \cdot \hat{n} \, ds &= \int_C \nabla \cdot \vec{F} \, dV - \int_B F \cdot \hat{n} \, ds \\ &= -\frac{\pi}{60} - \frac{\pi}{4} \\ &= -\frac{4}{15}\pi.\end{aligned}$$

- b) Si existiese \vec{G} de clase \mathcal{C}^2 tal que $\vec{F} = \nabla \times \vec{G}$ entonces, por una identidad vectorial vista en clase se tendría que $\nabla \vec{F} = \nabla(\nabla \times \vec{G}) = 0$. Pero vimos que $\nabla \vec{F} = r^2 z$ que no es idénticamente nulo por lo que un campo \vec{G} tal, no existe.

Problema 3

Considere el toro de radio mayor R y de radio menor a , donde $R > a > 0$ son constantes. Sea Σ la porción de superficie de dicho toro que se encuentra fuera de la esfera de ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, la cual orientamos según la normal exterior al toro.

- a) (3 ptos.) Demuestre que si \vec{F} es un campo continuamente diferenciable en Σ , entonces se satisface:

$$\iint_{\Sigma} \vec{\nabla} \times \vec{F} \cdot \hat{n} \, dA = \oint_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} - \oint_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

donde C_1 y C_2 son las circunferencias obtenidas de la intersección del cilindro $x^2 + y^2 = d^2$ con los planos $z = z_1$ y $z = z_2$ respectivamente, con $d = \frac{2R^2 - a^2}{2R}$, $z_1 = \frac{a\sqrt{4R^2 - a^2}}{2R}$ y $z_2 = -z_1$, ambas orientadas en el sentido antihorario.

- b) (3 ptos.) Para el campo $\vec{F} = (e^{-z^2}/\rho)\hat{\rho} + z\hat{\theta} + z\sin(\theta)\cos^2(\theta)\hat{k}$ calcule:

$$\iint_{\Sigma} \vec{\nabla} \times \vec{F} \cdot \hat{n} \, dA.$$

Solución.

- a) Fijándose en la figura, es posible darse cuenta de que una ecuación que satisface el toro en coordenadas cilíndricas es $(R-r)^2 + z^2 = a^2$. Por otra parte, la esfera descrita en coordenadas cilíndricas tiene por ecuación $r^2 + z^2 = R^2$.

Al intersectar ambas superficies (restamos las ecuaciones para obtener una ecuación dependiente de un parámetro) se obtiene la ecuación:

$$(R-r)^2 - r^2 + R^2 = a^2,$$

de donde despejando se obtiene que el radio r es constante y $r = \frac{2R^2 - a^2}{2R}$. Vemos así que la intersección de la esfera con el toro son círculos de radio r . Falta ver a que altura se ubican los círculos.

Despejamos z de la ecuación de la esfera:

$$\begin{aligned} z^2 &= R^2 - r^2 \\ &= R^2 - \left(R - \frac{a^2}{2R}\right)^2 \\ &= \frac{a^2}{2R} \left(2R - \frac{a^2}{2R}\right) \\ &= \frac{a^2}{4R^2} (4R^2 - a^2) \end{aligned}$$

Así vemos que hay dos soluciones para z dadas por $z_1 = \frac{a}{2R} \sqrt{4R^2 - a^2}$ y $z_2 = -z_1$.

Definimos entonces las circunferencias en coordenadas cilíndricas, orientadas según crece el ángulo θ de estas coordenadas, es decir, sentido antihorario.

$$\begin{aligned} \hat{C}_1 : \quad r &= R - \frac{a^2}{2R} \quad z = \frac{a}{2R} \sqrt{4R^2 - a^2} \\ \hat{C}_2 : \quad r &= R - \frac{a^2}{2R} \quad z = -\frac{a}{2R} \sqrt{4R^2 - a^2} \end{aligned}$$

Por el teorema de Stokes dado que \vec{F} es continuamente diferenciable

$$\iint_{\Sigma} \nabla \times \vec{F} \cdot \hat{n} dA = \oint_{\hat{C}_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} - \oint_{\hat{C}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

Por otra parte, la intersección del cilindro $x^2 + y^2 = d^2$ con los planos $z = z_1$ y $z = z_2$ (notar que los z_1, z_2 son los mismos que en la intersección de la esfera con el toro) son exactamente las circunferencias \hat{C}_1 y \hat{C}_2 descritas antes, dado que $d = r$. Luego la igualdad pedida está probada puesto que la orientación también coincide.

- b) Teníamos antes parametrizaciones en cilíndricas de las circunferencias C_1 y C_2 . De coordenadas curvilíneas sabemos que usando coordenadas cilíndricas y dado que r y z son constantes en cada circunferencia el elemento de longitud para C_1 y C_2 es

$$d\vec{r} = r d\theta \hat{\theta}.$$

Luego $\vec{F} \cdot d\vec{r} = F_\theta r d\theta = z r d\theta$. Para integrar ocupamos la parte a) y obtenemos:

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} \nabla \times \vec{F} \cdot \hat{n} dA &= \oint_{\hat{C}_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} - \oint_{\hat{C}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} \\ &= \int_0^{2\pi} z_1 r d\theta - \int_0^{2\pi} -z_1 r d\theta \\ &= 4\pi r z_1, \end{aligned}$$

con $r = d$ y z_1 dados en el enunciado.