Profesor: Álvaro Hernández
Departamento de Ingeniería Matemática
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas, Universidad de Chile

Pregunta 1.

1. (1 punto.) Supongamos que dado un campo vectorial F de Clase C^1 existe un campo G de clase C^2 tal que $F = \operatorname{rot} G$. Muestre que $\operatorname{div} F = 0$.

2. A continuación mostraremos la afirmación inversa en un caso particular. Es decir mostraremos que si $\operatorname{div} F = 0$ entonces existe un campo G tal que $F = \operatorname{rot} G$. Tal G se llama *potencial vectorial* de F. Sea $\psi\colon \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ una función de clase $\mathcal{C}^1$.

   a) (1 punto.) Muestre que
   $$\operatorname{rot} \int_a^b \psi(x,t)\,dt = \int_a^b \operatorname{rot} \psi(x,t)\,dt \quad (x,t) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}.$$
   Indicación: Puede usar la regla de Leibnitz: $(\partial/\partial u) \int_a^b \psi(x,t)\,dt = \int_a^b (\partial/\partial u)\psi(x,t)\,dt$ donde $x \in \mathbb{R}^n$ y u representa cualquier variable cartesiana.

   b) (1 punto.) Considere el campo vectorial $F(x) = g(r)\hat{\varphi}$ (expresado en coordenadas esféricas), donde $r = \|x\|$ y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función escalar. Verifique que $\operatorname{div} F = 0$

   c) (1 punto.) Pruebe que
   $$\operatorname{rot}[F(tx) \times tx] = 2tF(tx) + t^2 \frac{d}{dt} F(tx) \quad \forall t > 0$$

   d) (1 punto.) Sea ahora F un campo cualquiera tal que $\operatorname{div} F = 0$ en la bola $B(0,R)$ la bola de $\mathbb{R}^3$ centrada en el origen y de radio R. Entonces se puede probar (no se pide que lo haga) que la fórmula anterior es válida en $B(0,R)$. Definamos el campo vectorial $G(x) = \int_0^1 (F(tx) \times tx)\,dt$. Usando lo anterior concluya que $F = \operatorname{rot} G$ en B.

3. Sea S el el hemisferio superior del casquete esférico centrado en $(2,0,0)$ y de radio 1. Considere el campo vectorial
   $$F(x,y,z) = \frac{-y\hat{\imath} + x\hat{\jmath}}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

   a) (1 punto.) Encuentre G tal que $F = \operatorname{rot} G$.

   b) Calcule la integral de flujo de F sobre S, orientada con normal exterior, mediante:
   - (1 punto.) El teorema de Stokes.
   - (1 punto.) El teorema de Gauss.

4. Sea M la superfice consistente en el manto manto del cono con eje de simetría el eje z, con vértice en el origen, de altura h y radio basal a (ver Figura 1). Considere el campo vectorial $F(x,y,z) = (x,y,0)$ y sea $\hat{n}$ la normal interior de M, es decir la que apunta al eje de simetría de M.

   a) (1 punto.) Muestre que no existe un campo G tal que $F = \operatorname{rot} G$.

   b) Encuentre el valor de $\int_M F(x) \cdot \hat{n}\, dA$
   - (1 punto.) directamente, es decir usando la definición.
   - (1 punto.) usando un teorema de integración.

5. Sea Ω una región sólida de $\mathbb{R}^3$ de borde $S := \partial\Omega$. Probar, usando los dos métodos siguientes, que
   $$\int_S \operatorname{rot} \vec{F} \cdot \hat{n}\, dS = 0$$
   - (1 punto.) El teorema de Gauss.
   - (1 punto.) El teorema de Stokes.

   Total: 13 puntos, Nota $= 6p/13 + 1$ con $p =$puntos obtenidos.

   Formulario al reverso.

$$\operatorname{div}\vec{F} = \frac{1}{h_u h_v h_w}\left[\frac{\partial}{\partial u}(F_u h_v h_w) + \frac{\partial}{\partial v}(h_u F_v h_w) + \frac{\partial}{\partial w}(h_u h_v F_w)\right]; \quad \operatorname{rot}\vec{F} = \frac{1}{h_u h_v h_w}\begin{vmatrix} h_u\hat{u} & h_v\hat{v} & h_w\hat{w} \\ \dfrac{\partial}{\partial u} & \dfrac{\partial}{\partial v} & \dfrac{\partial}{\partial w} \\ F_u h_u & F_v h_v & F_w h_w \end{vmatrix}$$

$$\operatorname{rot}\vec{F} = \frac{1}{h_v h_w}\left[\frac{\partial}{\partial v}(F_w h_w) - \frac{\partial}{\partial w}(F_v h_v)\right]\hat{u} + \frac{1}{h_u h_w}\left[\frac{\partial}{\partial w}(F_u h_u) - \frac{\partial}{\partial u}(F_w h_w)\right]\hat{v} + \frac{1}{h_u h_v}\left[\frac{\partial}{\partial u}(F_v h_v) - \frac{}{\partial v}(F_u h_u)\right]\hat{w}.$$

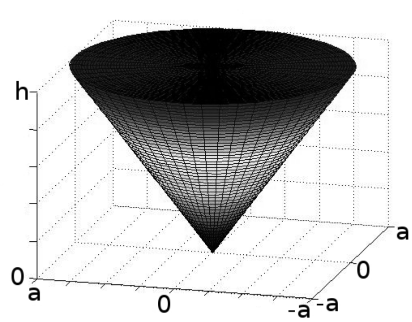

Figura 1: Cono

Pauta C1 CAA 2015-2. Álvaro Hernández

Pauta C1 CAA 2015-2

Álvaro Hernández

P1 1.- Hay que mostrar que $\operatorname{div} \operatorname{rot} F = 0$ lo cual es simple si utilizamos las fórmulas de div y rot

2.- a) Usar la regla de Leibnitz y la linealidad de la integral y el rotor

b) $\operatorname{div} F = \frac{1}{r^2 \sin\theta}\left(\frac{\partial}{\partial\varphi}(g(r)r)\right) = 0$

c) $r = \|x\| \Rightarrow \|tx\| = |t|\|x\| = t\|x\| = tr \quad (t>0)$

$\therefore F(tx) = g(tr)\hat{\varphi}$

$x = \frac{x}{\|x\|}\|x\| = \hat{r}\|x\| = r\hat{r}$

$F(tx)\times tx = tr\, g(tr)\, \hat{\varphi}\times\hat{r}$

$= tr\, g(tr)\, \hat{\theta}$

$$\operatorname{rot}(tr\, g(tr)\,\hat{\theta}) = \frac{1}{r^2\sin\theta}\begin{vmatrix} \hat{r} & r\hat{\theta} & r\sin\theta\,\hat{\varphi} \\ \partial_r & \partial_\theta & \partial_\varphi \\ 0 & tr^2 g(tr) & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{r^2\sin\theta}\left(r\sin\theta\, \partial_r(tr^2 g(tr))\right)\hat{\varphi}$$

$$= \left(2t g(tr) + t^2 r g'(tr)\right)\hat{\varphi}$$

$$t^2\frac{d}{dt}(F(tx)) = t^2\frac{d}{dt}\left(g(tr)\hat{\varphi}\right) = t^2 r\, g'(tr)\,\hat{\varphi}$$

$$2tF(tx) = 2t\, g(tr)\,\hat{\varphi}$$

$$\therefore \operatorname{rot}(F(tx)\times tx) = 2tF(tx) + t^2\frac{d}{dt}F(tx)$$

d) $\text{rot} \int_0^1 (F(tx) \times tx)\, dt$

$$= \int_0^1 \text{rot}\,(F(tx) \times tx)\, dt$$

$$= \int_0^1 \left(2t F(tx) + t^2 \frac{d}{dt} F(tx)\right) dt$$

$$= \int_0^1 \frac{d}{dt}\left(t^2 F(tx)\right) dt$$

$$= t^2 F(tx)\Big|_{t=0}^{t=1} = F(x)$$

$\therefore$ rot $G = F$.

3.- a) $F(x,y,z) = \dfrac{(-y, x, 0)}{\sqrt{x^2+y^2}}$. encontrar G tq rot $G = F$

Escribimos F en coord. esfericas:

$$x = r \sin\theta \cos\varphi$$
$$y = r \sin\theta \sin\varphi$$
$$z = r \cos\theta$$

$$\therefore F(r,\theta,\varphi) = \frac{(-r\sin\theta\sin\varphi,\ r\sin\theta\cos\varphi,\ 0)}{\sqrt{(r\sin\theta\cos\varphi)^2 + (r\sin\theta\sin\varphi)^2}}$$

$$= \frac{r\sin\theta}{r\sin\theta}(-\sin\varphi, \cos\varphi, 0)$$

$$= \hat{\varphi} = 1\,\hat{\varphi}$$

Por 2b) Sabemos que div $F = 0$ y además un G que satisface que $F = \text{rot}\, G$ viene dado por la fórmula en 2d):

$$G = \int_0^1 (F(tx) \times tx)\, dt \quad \text{con} \quad F(tx) = 1\,\hat{\varphi} \ ;\ x = r\hat{r}$$

$$= \int_0^1 \hat{\varphi} \times t r \hat{r}\, dt = r\hat{\theta}\int_0^1 t\, dt$$

$$= \frac{r\hat{\theta}}{2}$$

b) • Usando el T. de Stokes:

$$\int_S F\cdot\hat{m}\,dA = \int_S \text{rot}\,G\,\hat{m}\,dA = \int_{\partial S} G\cdot\hat{t}\,dl$$

Parametrización de ∂S:

$\gamma(t) = (2+\cos t, \sin t, 0)$ $t\in[0,2\pi]$

$\gamma'(t) = (-\sin t, \cos t, 0) = \hat{\varphi}$ $dl = dt$

$$\therefore \int_\Gamma G\cdot\hat{t}\,dl = \int_0^{2\pi} \frac{r}{2}\hat{\theta}\cdot\hat{\varphi}\,dt = 0$$

• Usando el T. de Gauss:

Debemos tapar S por ejemplo con T el disco del plano xy centrado en $(2,0,0)$ y de radio 1. luego SUT es una superficie cerrada y la normal exterior en T es $-\hat{k}$, luego

$$\int_{SUT} F\cdot\hat{m}\,dA = \int_S F\cdot\hat{m}\,dA + \int_T F\cdot(-\hat{k})\,dA = \int_{SUT} \text{rot}\,G\cdot\hat{m}\,dA$$

$$= \int_\Omega \text{div rot}\,G\,dV = 0$$

$= 0$,

Aquí Ω = región sólida encerrada por SUT.

Así $\displaystyle\int_S F\cdot\hat{m}\,dA = \int_T F\cdot\hat{k}\,dA = \int_T \hat{\varphi}\cdot\hat{k}\,dA = 0$

(El ángulo acimutal es perpendicular a $\hat{k}$)

4- a) Si existiera un campo G tq F = rot G entonces (4)

div F = div rot G = 0, pero

$F(x,y,z) = (x,y,0)$

$\operatorname{div} F = 2$

b) • Directamente:

$\Psi(\rho,\varphi) = \left(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, \frac{\rho h}{a}\right)$, $\rho\in[0,a]$, $\varphi\in[0,2\pi]$ parametriza M

$\Psi_\varphi = (-\rho\sin\varphi, \rho\cos\varphi, 0)$

$\Psi_\rho = (\cos\varphi, \sin\varphi, h/a)$

normal interior: $\Psi_\rho \times \Psi_\varphi = n$, (en efecto $(\Psi_\rho\times\Psi_\varphi)\cdot\hat{k} > 0$)

$n = \Psi_\rho\times\Psi_\varphi = \left(-\frac{h}{a}\rho\cos\varphi, -\frac{h}{a}\rho\sin\varphi, \rho\cos^2\varphi + \rho\sin^2\varphi\right)$

$= \left(-\frac{h}{a}\rho\cos\varphi, -\frac{h}{a}\rho\sin\varphi, \rho\right).$

$\therefore \int_M F\cdot\hat{n}\,dA = \int_0^a\int_0^{2\pi} F(\Psi(\rho,\varphi))\cdot n\,d\rho\,d\varphi$

$= \int_0^a\int_0^{2\pi} (\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, 0)\cdot\left(-\frac{h}{a}\rho\cos\varphi, -\frac{h}{a}\rho\sin\varphi, \rho\right)d\rho\,d\varphi$

$= \int_0^a\int_0^{2\pi}\left(-\rho^2\frac{h}{a}\right)d\rho\,d\varphi = -2\pi\frac{h}{a}\int_0^a \rho^2\,d\rho = -\frac{2\pi h}{a}\frac{a^3}{3}$

$= \frac{-2\pi h}{3}a^2$

- Usando un teorema de integración:

Dado que no existe G tq $F = \text{rot}\, G$ no podemos usar el t. de Stokes, por lo que usamos el T. de Gauss: Debemos tapar M por ejemplo con T = disco de radio a paralelo al plano xy y de altura h, luego

$$\int_{M \cup T} F \cdot \hat{n}\, dA = \int_M F \cdot \hat{n}\, dA + \int_T F \cdot \hat{n}\, dA = \int_\Omega \text{div}\, F\, dV$$

donde Ω = región sólida que encierra $M \cup T$,

Aquí $\hat{n}$ = normal exterior, luego el flujo que buscamos es $-\int_M F \cdot \hat{n}\, dA$, es decir

$$-\int_M F \cdot \hat{n}\, dA = \int_T F \cdot \hat{n}\, dA - \int_\Omega \text{div}\, F\, dV$$

Normal exterior de $T = \hat{k}$ luego

$$\int_T F \cdot \hat{n}\, dA = \int_T \rho^m \hat{\rho} \cdot \hat{k}\, dA = 0 \quad \text{pues } \hat{\rho} \cdot \hat{k} = 0.$$

Por otro lado

$$-\int_\Omega \text{div}\, F\, dV = -2 \int_\Omega dV = -2\, \text{vol}\,(\Omega) = -2\pi a^2 \frac{h}{3}$$