Control 1
MA2002: Cálculo Avanzado y Aplicaciones 2014-1
Profesores: Álvaro Hernández, Rodrigo Lecaros, Erwin Topp
Departamento de Ingeniería Matemática
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas, Universidad de Chile

Pregunta 1.

Considere el campo vectorial
$$\vec{F}(x,y,z) = (y^2z^3, 2xyz^3, 3xy^2z^2 + y)$$
y la curva C definida como la intersección del cilindro $x^2+z^2=4$ con la semiesfera $x^2+(y-2)^2+z^2=4$, $x \leq 0$, orientada de abajo hacia arriba.

1. [2 ptos.] Calcule el rotor de $\vec{F}$ y deduzca que el campo $\vec{F}$ es la suma de dos campos $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ donde $\vec{F}_1$ es conservativo y $\vec{F}_2$ tiene la forma $\vec{F}_2 = (x,y,z) = (0,0,g(y))$.
2. [2 ptos.] Encuentre un potencial de $\vec{F}_1$.
3. [2 ptos.] Calcule la integral de $\vec{F}$ sobre la curva C.

Pregunta 2.

Sea S el el hemisferio superior del casquete esférico centrado en $(1,1,0)$ y de radio 2. Considere el campo vectorial $\vec{F}(x,y,z) = 2x\hat{\imath} - 2z\hat{k}$.

1. [2 ptos.] Considere el campo vectorial
$$\vec{G}(x,y,z) = yz\hat{\imath} - xz\hat{\jmath} + yx\hat{k}.$$
Compruebe que $\vec{F} = \operatorname{rot}\vec{G}$.
2. [2 ptos.] Use $\vec{G}$ junto con algún teorema de integración para calcular el flujo del campo $\vec{F}$ a través de la superficie S orientada según la normal exterior.
3. [2 ptos.] Utilice el teorema de Gauss para calcular el flujo del campo $\vec{F}$ a través de la superficie S orientada según la normal exterior. Indicación: tape o cierre adecuadamente la superficie S.

Pregunta 3.

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ abierto y acotado.

1. [3 ptos.] Considere campos escalares $f, g \in C^2(\Omega)$. Muestre la fórmula de integración por partes:
$$\int_\Omega f\Delta g\, dV = \int_{\partial\Omega} f\nabla g \cdot \hat{n}\, dA - \int_\Omega \nabla f \cdot \nabla g\, dV.$$
Indicación: calcule $\operatorname{div}(f\nabla g)$ y luego use algún teorema de integración.
2. [3 ptos.] Sea A el conjunto
$$A = \{v \in C^2(\Omega) : \Delta v = 0 \text{ en } \Omega\},$$
es decir A es el conjunto de todos los campos escalares armónicos en Ω. Dado $h \in C(\Omega)$ campo escalar fijo, para $v \in A$ definamos el operador $Q(v)$ mediante:
$$Q(v) = 2\int_{\partial\Omega} h\nabla v \cdot \hat{n}\, dA - \int_\Omega |\nabla v|^2\, dV.$$
Suponga que $u \in A$ satisface $u = h$ sobre $\partial\Omega$. Muestre que para todo campo escalar $v \in A$ se tiene la siguiente igualdad:
$$Q(u) - Q(v) = \int_\Omega |\nabla u - \nabla v|^2\, dV.$$
A partir de lo anterior deduzca el principio de Thompson:
$$Q(v) \leq Q(u) \quad \forall v \in A$$

Tiempo: 3 horas.

Datos útiles:

$$\nabla f = \frac{1}{h_u h_v h_w}\left(\frac{1}{h_u}\frac{\partial f}{\partial u}\hat{u} + \frac{1}{h_v}\frac{\partial f}{\partial v}\hat{v} + \frac{1}{h_w}\frac{\partial f}{\partial w}\hat{w}\right)$$

$$\operatorname{div}\vec{F} = \frac{1}{h_u h_v h_w}\left(\frac{\partial}{\partial u}(F_u h_v h_w) + \frac{\partial}{\partial v}(h_u F_v h_w) + \frac{\partial}{\partial w}(h_u h_v F_w)\right)$$

$$\operatorname{rot}\vec{F} = \frac{1}{h_u h_v h_w}\begin{vmatrix} h_u\hat{u} & h_v\hat{v} & h_w\hat{w} \\ \frac{\partial}{\partial u} & \frac{\partial}{\partial v} & \frac{\partial}{\partial w} \\ F_u h_u & F_v h_v & F_w h_w \end{vmatrix}$$

$$\Delta u = \operatorname{div}\nabla u$$

Pauta control 1

Cálculo Avanzado y Aplicaciones, FCFM

Álvaro Hernández
Rodrigo Lecaros
Erwin Topp

Pregunta 1

1- $\text{rot} F = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \partial x & \partial y & \partial z \\ y^2z^2 & 2xyz^3 & 3xy^2z^2+y \end{vmatrix}$ [0,5]

$= (6xyz^2 + 1 - 6xyz^2, -(3y^2z^2 - 3y^2z^2), 2yz^3 - 2yz^3)$

$= (1,0,0)$ [0,5]

$\therefore \left.\begin{array}{l} F_1 = (y^2z^3, 2xyz^3, 3xy^2z^2) \\ F_2 = (0,0,y) \end{array}\right\}$ [0,5]

$\text{rot } F_1 = 0$ dominio $F_1 = \mathbb{R}^3$ simplemente conexo $\Rightarrow F_1$ conservativo [0,5]

2- Buscamos f tq $-\nabla f = F_1$

$-\frac{\partial f}{\partial x} = y^2z^3 \Rightarrow f = -x^2y^2z^3 + a(y,z)$ [0,5]

$-\frac{\partial f}{\partial y} = -2xyz^3 - \frac{\partial a}{\partial y} = 2xyz^3 \Rightarrow \frac{\partial a}{\partial y} = 0$ [0,5]

$\Rightarrow f(x,y,z) = -xy^2z^3 + b(z)$

$-\frac{\partial f}{\partial z} = 3xy^2z^2 - \frac{\partial b}{\partial z} = 3xy^2z^2 \Rightarrow \frac{\partial b}{\partial z} = 0 \Rightarrow b = \text{cte}$ [0,5]

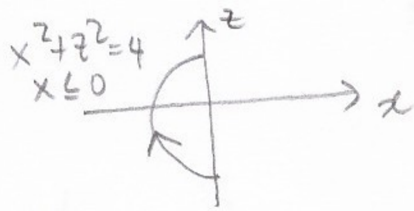
$\Rightarrow f = -xy^2z^3 + c, \quad c = \text{cte}$ [0,5]

3- $\int_C F \cdot \hat{t}\, dl = \int_C F_1 \cdot \hat{t}\, dl + \int_C F_2 \cdot \hat{t}\, dl$

$\left.\begin{array}{l} F_1 = -\nabla f \Rightarrow \int_C F_1 \cdot \hat{t}\, dl = f(p_1) - f(p_2), \text{ donde} \\ p_1 = \text{pto inicial de } C \\ p_2 = \text{pto final de } C \end{array}\right\}$ [0,5]

$$C: \begin{cases} x^2+z^2=4 \\ x^2+(y-2)^2+z^2=4 \\ x \leq 0 \end{cases} \Rightarrow (y-2)^2=0 \Rightarrow y=2$$

$$\Rightarrow x^2+z^2=4, \ x\leq 0$$



Param. de C: $\begin{cases} x=2\cos\theta \\ y=2 \\ z=2\sin\theta \end{cases} \quad \theta\in[\pi/2, 3\pi/2]$ [0,5]

Esta parametrización es opuesta a la pedida, luego

$$\int_C F_2\cdot\hat{t}\,dl = \int_C y\,dz = 2\int_C dz = -2\int_{\pi/2}^{3\pi/2} 2\cos\theta\, d\theta = 8 \quad [0,5]$$

$$\left.\begin{array}{l} p_1=(0,2,-2) \\ p_2=(0,2,2) \end{array}\right\} \int_C F_1\cdot\hat{t}\,dl = f(0,2,-2)-f(0,2,2)=0 \quad [0,5]$$

$$\therefore \int_C F\cdot\hat{t}\,dl = 8$$

Pregunta 2

$$1.- \ \mathrm{rot}\, G = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \partial x & \partial y & \partial z \\ yz & -xz & yx \end{vmatrix} = (2x, 0, -2z) = F \quad [2,0]$$

$$2.- \ \Gamma = \partial S = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : (x-1)^2+(y-1)^2=4, \ z=0\}$$

Para usar Stokes debemos orientar Γ en sentido anti horario

Parametrización de Γ:

$$\left.\begin{array}{l} \gamma(\theta)=(2\cos\theta+1, 2\sin\theta+1, 0) \\ \gamma'(\theta)=(-2\sin\theta, 2\cos\theta, 0) \end{array}\right. \quad \theta\in[0,2\pi] \ \Big\} \ [0,7]$$

$$\int_S F\cdot\hat{n}\,dA = \int_S \mathrm{rot}\,G\cdot\hat{n}\,dA = \int_\Gamma G\cdot\hat{t}\,dl \quad [0,8]$$

$$\int_\Gamma G\cdot\hat{t}\,dl = \int_0^{2\pi} ((2\sin\theta+1)\cdot 0, (-2\cos\theta+1)\cdot 0, (2\cos\theta+1)(2\sin\theta+1))\cdot(2\sin\theta, 2\cos\theta, 0)\,d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} (0,0,0)\,d\theta = 0 \quad [0,5]$$

3.- Para usar Gauss debemos tapar S, podemos considerar por ejemplo $T = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : (x-1)^2+(y-1)^2 \le 4,\ z=0\}$

[0,5]

$$\int_{S\cup T} \operatorname{div} F\,dV = \int_S F\cdot\hat{n}\,dA + \int_T F\cdot\hat{n}\,dA \quad [0,5]$$

$\operatorname{div} F = \operatorname{div}(\operatorname{rot} G) = 0$

normal de $T = -\hat{k}$ [0,2]

$$\therefore \int_S F\cdot\hat{n}\,dA = -\int_T F\cdot\hat{n}\,dA ,$$

Param. de T: $\phi(r,\theta) = (r\cos\theta+1, r\sin\theta+1, 0)$ [0,5]

$\phi_r(r,\theta) = (\cos\theta, \sin\theta, 0)$

$\phi_\theta(r,\theta) = (-r\sin\theta, r\cos\theta, 0)$

$(\phi_r\times\phi_\theta)(r,\theta) = (0,0,r)$

$$\therefore -\int_T F\cdot\hat{n}\,dA = -\int_0^{r}\int_0^{2\pi} (2(r\cos\theta+1), 0, -2\cdot 0)\cdot(0,0,r)\,dr\,d\theta$$

$$= 0. \quad [0,3]$$

Pregunta 3.-

$$\operatorname{div}(f\nabla g) = \nabla f\cdot\nabla g + f\underbrace{\operatorname{div}\nabla g}_{\Delta g} \quad [1,0]$$

$$\int_\Omega \operatorname{div}(f\nabla g)\,dV = \int_\Omega \nabla f\cdot\nabla g\,dV + \int_\Omega f\Delta g\,dV \quad [1,0]$$

Usando Gauss en la primera integral obtenemos

$$\int_{\Omega} f \Delta g \, dV = \int_{\partial\Omega} f \nabla g \cdot \hat{m} \, dA - \int_{\Omega} \nabla f \cdot \nabla g \, dV \qquad [1,0]$$

$$2.- \; Q(u) - Q(v) = 2\int_{\partial\Omega} h \nabla u \cdot \hat{m} \, dA - \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dV +$$

$$-2\int_{\partial\Omega} h \nabla v \cdot \hat{m} \, dA + \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dV$$

$$= 2\int_{\partial\Omega} \underset{\substack{\parallel \\ u \text{ sobre } \partial\Omega}}{h} \nabla(u-v) \cdot \hat{m} \, dA - \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dV + \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dV$$

$$= 2\int_{\Omega} \operatorname{div}(u \nabla(u-v)) \, dV - \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dV + \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dV \qquad [1,0]$$

$$= 2\int_{\Omega} (\nabla u \cdot \nabla u - \nabla u \cdot \nabla v) \, dV + u(\underbrace{\operatorname{div}(\nabla u)}_{\Delta u = 0} - \underbrace{\operatorname{div}(\nabla v)}_{\Delta v = 0})$$

$$- \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dV + \int |\nabla v|^2 dV \qquad [1,0]$$

$$= \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla u - 2\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v + \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla v$$

$$= \int_{\Omega} |\nabla u - \nabla v|^2 dV \qquad [0,8]$$

$$\geq 0$$

$$\therefore \; Q(u) \geq Q(v) \quad \forall v \in A. \quad [0,2]$$