

$$b) \int_0^{2\pi} \frac{\cos(nx)}{1+a^2-2a\cos(x)} dx \quad a \in (0,1)$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{\operatorname{Re}(e^{inx})}{1+a^2-2a\cos(x)} dx$$

en el denominador todo es real

$$= \operatorname{Re} \left(\int_0^{2\pi} \frac{e^{inx}}{1+a^2-2a\cos(x)} dx \right)$$

sea $z = e^{ix}$
 $dz = i e^{ix} dx$

* en la clase hicimos el cambio de variable antes y por eso había una ambigüedad al tomar parte real de toda la integral

$$= \operatorname{Re} \left(\int_{|z|=1} \frac{z^n}{1+a^2-2a\left(\frac{z+z^{-1}}{2}\right)} \frac{dz}{iz} \right) = \operatorname{Re} \left(\frac{1}{i} \int_{|z|=1} \frac{z^n}{z+za^2-az^2-a} dz \right)$$

$$= \operatorname{Res} \left(\frac{1}{i} \int_{|z|=1} \frac{z^n}{az(a-z) - (a-z)} dz \right) = \operatorname{Re} \left(\frac{1}{ai} \int_{|z|=1} \frac{z^n}{(a-z)\left(z-\frac{1}{a}\right)} dz \right)$$

pozos $z=a$, $z=\frac{1}{a}$ X $\frac{1}{a} > 1$, estamos integrando en $|z|=1$

$$\operatorname{Res}(f, a) = \lim_{z \rightarrow a} \frac{(z-a) z^n}{\underset{-1}{(a-z)\left(z-\frac{1}{a}\right)}} = \frac{-a^n}{\left(a-\frac{1}{a}\right)}$$

$$\Rightarrow I = 2\pi i \left(\frac{-a^n}{\frac{a^2-1}{a}} \right) = -2\pi i \frac{a^{n+1}}{a^2-1}$$

$$\Rightarrow \int_0^{2\pi} \frac{\cos(nx)}{1+a^2-2a\cos(x)} dx = \operatorname{Re} \left(\frac{-2\pi i}{a^2-1} \frac{a^{n+1}}{a^2-1} \right) = \frac{-2\pi a^n}{a^2-1} //$$