Pendientes y Extras, Control 3 CAA - Primavera 2010.

$\boxed{P4b}$ (Aux 11). $f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{(x-i)^n}{(x+i)^{n+1}}$ $\underline{\text{Pdq}}$ $\int_{\mathbb{R}} f_m(x)\overline{f_n(x)}\,dx = \delta_{m,n} = \begin{cases} 1 & \text{si } m=n \\ 0 & \text{si } m\neq n. \end{cases}$

$n\in\mathbb{Z}, x\in\mathbb{R}$.

$\underline{\text{Sol.}}$ • Veamos el caso $m=n$:

$$\overline{xy} = \bar{x}\cdot\bar{y} \Rightarrow \bar{x}^n = \overline{x^n}$$

$$\int_{\mathbb{R}} f_n(x)\cdot\overline{f_n(x)}\,dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{(x-i)^n}{(x+i)^{n+1}}\cdot\overline{\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{(x-i)^n}{(x+i)^{n+1}}}\,dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\pi}\frac{\cancel{(x-i)^n}}{(x+i)^{n+1}}\cdot\frac{\cancel{(x+i)^n}}{(x-i)^{n+1}}\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(x+i)(x-i)}\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{\pi}\arctan(x)\Big|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = \frac{\pi}{\pi} = 1 \checkmark$$

$\therefore \int_{\mathbb{R}} f_n(x)\overline{f_n(x)}\,dx = 1$ como se deseaba probar.

• Veamos ahora el caso $m\neq n$:

Sin pérdida de generalidad, supongamos $n>m$ (Caso contrario bastará tomar conjugado para tener este caso)

Luego: Como $n>m \Rightarrow n=m+k$ $k\geq 1$.

$$\int_{\mathbb{R}} f_m(x)\overline{f_n(x)}\,dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{(x-i)^m}{(x+i)^m}\;\overline{\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{(x-i)^n}{(x+i)^{n+1}}}\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}}\frac{\cancel{(x-i)^m}}{(x+i)^m}\;\frac{(x+i)^{m+k}}{(x-i)^{m+k+1}}\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}}\frac{\cancel{(x+i)^{m-1}}\cdot(x+i)^{k+1}}{\cancel{(x+i)^{m-1}}\cdot(x+i)\,(x-i)\,(x-i)^{k+1}}\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\underbrace{\int_{\mathbb{R}}\frac{(x+i)^{k+1}}{(x^2+1)(x-i)^{k+1}}\,dx}_{I(x)} \quad \left(= \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}}\frac{(x+i)^{k+1}}{(x+i)(x-i)^{k+2}}\,dx \right)$$

Para calcular $I(x)$, notemos que:

$$I(x) = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{(x+i)^{k+1}}{(x+i)(x-i)^{k+2}}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{p(x)}{q(x)}\,dx \quad \text{con } \operatorname{gr} p + 2 = \operatorname{gr} q$$

(Es claro de la forma en como está escrito en principio)

$\therefore$ por Teorema visto en clase:

$$I(x) = 2\pi i \sum_{\substack{p \text{ polo} \\ \operatorname{Im} p > 0}} \operatorname{Res}\left(\frac{(z+i)^{k+1}}{(z+i)(z-i)^{k+2}} , p \right)$$

Para $f(z) = \dfrac{(z+i)^{k+1}}{(z+i)(z-i)^{k+2}} = \dfrac{(z+i)^k}{(z-i)^{k+2}}$ $\quad z = i$ es polo (pues no es raíz de $(z+i)^k$)

el orden es $k+2$ (por grado del polinomio) y $\operatorname{Im} i = 1 > 0$ ✓

$$\Rightarrow \operatorname{Res}(f(z), i) = \lim_{z \to i} \frac{1}{(k+2-1)!} \frac{d^{k+2-1}}{dz^{k+2-1}} \left(\cancel{(z-i)^{k+2}} \frac{(z+i)^k}{\cancel{(z-i)^{k+2}}} \right)$$

$$= \lim_{z \to i} \frac{1}{(k+1)!} \underbrace{\frac{d^{k+1}}{dz^{k+1}} (z+i)^k}_{}$$

$= 0$ pues derivamos $k+1$ veces un polinomio de grado k !!

$\therefore$ $I(x) = 0$.

$\therefore$ $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f_m(x) \overline{f_n(x)}\, dx = \frac{1}{\pi} \cdot I(x) = 0$ como se deseaba.

$\therefore$ $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f_m(x) \overline{f_n(x)}\, dx = \delta_{m,n} = \begin{cases} 1 & \text{si } m = n \\ 0 & \text{si } m \neq n. \end{cases}$ ∎

P5) Pdq $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\ln(x^2+1)}{x^2+1} dx = \pi \ln 2$.

Hint: usar $f(z) = \dfrac{\log(z+i)}{z^2+1}$.

Sol. Hay que tener un poco de cuidado con la función a integrar pues estamos usando el log. complejo $\Rightarrow$

$$\log(z+i) = \ln|z+i| + i\arg(z+i)$$
$$= \ln \sqrt{\operatorname{Re}^2 z + (\operatorname{Im} z + 1)^2} + i\arg(z+i)$$
$$= \frac{1}{2} \ln\left(\operatorname{Re}^2 z + (\operatorname{Im} z + 1)^2\right) + i\arg(z+i)$$

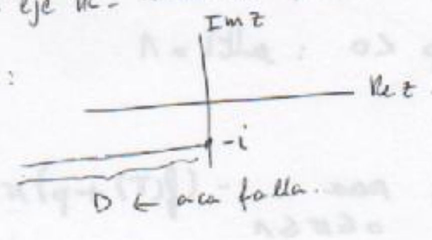
de esto último, notemos que si z va en el eje real (ie $\operatorname{Im} z = 0$)

$$\Rightarrow \ln(z+i) = \frac{1}{2}\ln(\underbrace{\operatorname{Re} z^2}_{z^2} + 1) + i\arg(z+i) \underset{z=x\in\mathbb{R}}{=} \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + i\arg(x+i)$$

Notemos además que: $\log(z+i)$ es holomorfa $\forall$ pto tq: $z+i \notin \{\tilde{z} \in \mathbb{C} \text{ tq } \tilde{z} = -x,\ x \in \mathbb{R}\} = D$

(pues el $+i$ "desplaza" el eje $\mathbb{R}_-$ donde la función no está def)

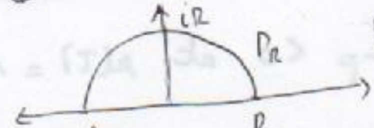
$\Rightarrow$ es holomorfa en $\mathbb{C} \setminus D$: mono:



$\Rightarrow$ Como z^2+1 tiene raíces en $i \wedge -i$

$\Rightarrow f(z)$ es meromorfa en $\mathbb{C} \setminus D$.

$\Rightarrow$ Usemos como región:



pues no cruza a D. $\Rightarrow$ vale el Teo. residuos.

así:
$$\int_{\Gamma_R} \frac{\log(z+i)}{z^2+1}\,dz = \int_{-R}^{R} \frac{\frac{1}{2}(\ln(x^2+1) + i\arg(x+i))}{x^2+1}\,dx + \int_{\underset{\uparrow \text{ arco}}{C_R}} \frac{\log(z+i)}{z^2+1}\,dz$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2}\int_{-R}^{R} \frac{\ln(x^2+1)}{x^2+1}\,dx}_{\substack{\text{la integral} \\ \text{que busco} \\ \text{(la función es par)}}} + \underbrace{\frac{i}{2}\int_{-R}^{R} \frac{\arg(x+i)}{x^2+1}\,dx}_{\substack{\text{otra integral} \\ \text{que no me importa} \\ \text{(pues el } \frac{i}{2} \text{ que la} \\ \text{acompaña hace que} \\ \text{puedo separarla de la que quiero)}}} + \underbrace{\int_{C_R} \frac{\log(z+i)}{z^2+1}\,dz}_{\substack{\text{debemos ver (como siempre)} \\ \text{que } \to 0 \text{ si } R \to \infty.}}$$

$$\overset{\text{Teo Res}}{=} 2\pi i \sum_{\substack{p \text{ polo} \\ R > \operatorname{Im} p > 0}} \operatorname{Res}(f(z), p) \quad \text{(ie., encerrado por la curva)}$$

Así, veamos residuos:

$\dfrac{\log(z+i)}{z^2+1}$ tiene polos en las raíces de z^2+1 (tentativamente)

En efecto: $z^2+1 = 0 \Rightarrow z = \pm i \Rightarrow \lim\limits_{z \to i} \dfrac{\log(z+i)}{z^2+1} = \dfrac{\log(2i)}{0} \nexists \left(\dfrac{\text{algo} \neq 0}{0}\right)$

$$\lim_{z \to -i} \frac{\log(z+i) \to \text{diverge}}{z^2+1 \to 0} \nexists.$$

$\therefore$ tiene polos en $z = i \wedge z = -i$

Analizaremos solo $z=i$ pues $z=-i$ queda fuera de la región de integración

(y $z=i$ queda dentro si $R>1$, como haremos $R\to\infty$ la incluimos)

¿orden del polo? $\lim_{z\to i} (z-i)^k \dfrac{\log(z+i)}{z^2+1} = \lim_{z\to i} (z-i)^{k-1} \dfrac{\log(z+i)}{(z+i)} = \begin{cases} \frac{\log(2i)}{2i} \neq 0 & \text{si } k=1 \\ 0 & \text{si } k>1 \end{cases}$

$\therefore$ el orden es 1.

¿Residuo? Como el polo es de orden 1 el residuo lo calculamos al verificar el orden

$$\Rightarrow \operatorname{res}(f,i) = \frac{\log(2i)}{2i} = \frac{\frac{1}{2}\ln|2i| + i\arg(2i)}{2i} = \frac{\ln 2 + i\arg(2i)}{2i}$$

pero $2i \,\underline{|\nwarrow \frac{\pi}{2}}$ $\quad = \dfrac{\ln 2 + i\,\pi/2}{2i} = \dfrac{\ln 2}{2i} + \dfrac{\pi}{4}$

$\therefore$ Si $R>1$:

$$\underbrace{\frac{1}{2}\int_{-R}^{R} \frac{\ln(x^2+1)}{x^2+1}\,dx}_{\frac{2}{\cancel{2}}\int_0^R \frac{\ln(x^2+1)}{x^2+1}dx} + \frac{i}{2}\int_{-R}^{R} \frac{\arg(x+i)}{x^2+1}\,dx + \int_{C_R} \frac{\log(z+i)}{z^2+1}\,dz = 2\pi i\left(\frac{\ln 2}{2i} + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \pi \ln 2 + \frac{\pi^2}{2} i$$

$\therefore$ si cuando $R\to\infty$ $\displaystyle\int_{C_R} \frac{\log(z+i)}{z^2+1}\,dz \to 0$ estamos listos!

Probémoslo: $\gamma(\theta) = Re^{i\theta}$, $\theta \in [0,\pi]$

$$\left|\int_{C_R} \frac{\log(z+i)}{z^2+1}\,dz\right| = \left|\int_0^{\pi} \frac{\log(\overbrace{Re^{i\theta}}^{R\cos\theta + iR\sin\theta} + 1)}{R^2e^{2i\theta}+1}\cdot iRe^{i\theta}\,d\theta\right| = \left|\int_0^{\pi} \frac{[\ln(|Re^{i\theta}+1|) + i\arg(Re^{i\theta}+1)]\, iRe^{i\theta}}{R^2e^{i\theta 2}+1}\,d\theta\right|$$

$$\leq \int_0^{\pi} \frac{\ln(|Re^{i\theta}+1|)\overbrace{|iRe^{i\theta}|}^{R}}{R^2+1}\,d\theta + \int_0^{\pi} \frac{|\arg(Re^{i\theta}+1)|\overbrace{|iRe^{i\theta}|}^{R}}{R^2+1}\,d\theta$$

$$\leq \int_0^{\pi} \frac{\ln(|Re^{i\theta}+1|)\,\cancel{R}}{R^{\cancel{2}}}\,d\theta + \underbrace{\int_0^{\pi} \frac{|\arg(Re^{i\theta}+1)|\,\cancel{R}}{R^{\cancel{2}}}\,d\theta}_{\leq \int_0^{\pi} \frac{2\pi}{R}d\theta = \frac{2\pi^2}{R} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0 \ \checkmark}$$

notemos que $\arg(z) \in [0,2\pi]$ (por definición!)

así, basta ver que $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\ln(|Re^{i\theta}+1|)}{R}\, d\theta \underset{R\to\infty}{\longrightarrow} 0$

En efecto: $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\ln(|Re^{i\theta}+1|)}{R}\, d\theta \overset{R>1}{\leq} \int_0^{\pi} \frac{\ln(|Re^{i\theta}+R|)}{R}\, d\theta = \int_0^{\pi} \frac{\ln\left(\sqrt{(R\cos\theta+R)^2+R^2\sin^2\theta}\right)}{R}\, d\theta$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \frac{\ln\left(R^2\cos^2\theta + R^2\sin^2\theta + 2R^2\sin\theta + R^2\right)}{R}\, d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \frac{\ln\left(2R^2 + 2R^2\sin\theta\right)}{R}\, d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \frac{2\ln(2R(1+\sin\theta))}{R}\, d\theta$$

pero $\sin\theta \leq 1 \quad \forall\theta$

$$\leq \int_0^{\pi} \frac{\ln(2R(1+1))}{R}\, d\theta = \frac{\ln(4R)}{R}\int_0^{\pi} d\theta = \frac{\pi\ln(4R)}{R}$$

¿Qué pasa si $R\to\infty$? $\displaystyle\lim_{R\to\infty} \frac{\pi\ln(4R)}{R} \overset{\text{L'Hôpital}}{=} \lim_{R\to\infty} \frac{\pi\cdot\frac{1}{4R}\cdot 4}{1} = \lim_{R\to\infty} \frac{\pi}{R} = 0$

es decir: $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\ln(|Re^{i\theta}+1|)}{R}\, d\theta \underset{R\to\infty}{\longrightarrow} 0$ ✓

$$\therefore \left|\int_{C_R} \frac{\log(z+i)}{z^2+1}\, dz\right| \leq \underbrace{\int_0^{\pi} \frac{\ln(|Re^{i\theta}+1|)}{R}\, d\theta}_{\downarrow R\to\infty \; 0} + \underbrace{\int_0^{\pi} \frac{|\arg(Re^{i\theta}+i)|}{R}\, d\theta}_{\downarrow R\to\infty \; 0}$$

$$\therefore \int_{C_R} \frac{\log(z+i)}{z^2+1}\, dz \longrightarrow 0 \quad \text{si } R\to\infty$$

$$\therefore \lim_{R\to\infty} \int_{\Gamma_R} \frac{\log(z+i)}{z^2+1}\, dz = \int_0^{\infty} \frac{\log(x^2+1)}{x^2+1}\, dx + \frac{i}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\arg(x+i)}{x^2+1}\, dx = \pi\ln 2 + \frac{\pi^2}{2}\cdot i$$

igualando parte real se concluye que $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\log(x^2+1)}{x^2+1}\, dx = \pi\ln 2$ ∎

P4) (Aux 13)

Vamos a probar que: $\forall b, \beta \in \mathbb{R}$:

$$\int_{\mathbb{R}} (x-b)^2 |f(x)|^2 dx \int_{\mathbb{R}} (s-\beta)^2 |\hat{f}(s)|^2 ds \geq Cte \cdot \|f\|_2^4 \qquad \left(\|f\|_2 \overset{def}{=} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx \right)^{1/2} \right)$$

La cte. no será exactamente $\frac{1}{16\pi^2}$ pues la def. de transformada que usamos en el curso no es la misma que la def. "usual" (por esto en el P2) nos daba algo distinto del enunciado también), la gracia de la Transformada que usamos en el curso es que, solo bajo esta definición se tiene $F(F^{-1}(f)) = F^{-1}(F(f)) = f$. (con otras difiere en constante multiplicativa)

Primero veamos, tal como dice el enunciado, que basta ver el caso $b=\beta=0$. Consideremos $g(x) = e^{-i\beta x} f(x+b)$ (con $-$, sino no sale!)
En efecto, si la desigualdad es cierta,

$$\Rightarrow \|g\|_2 = \left(\int_{\mathbb{R}} |g(x)|^2 dx \right)^{1/2} = \left(\int_{\mathbb{R}} \underbrace{|e^{-i\beta x}|^2}_{=1} |f(x+b)|^2 dx \right)^{1/2} = \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x+b)|^2 dx \right)^{1/2} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{pues integro} \\ \text{en todo } \mathbb{R}}}{=} \|f\|_2 \checkmark$$

así, el lado derecho no cambia. Además:

$$\int_{\mathbb{R}} (x-b)^2 |g(x)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}} (x-b)^2 \underbrace{|e^{-i\beta x}|^2}_{=1} |f(x+b)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}} (x-b)^2 |f(x+b)|^2 dx$$

Cambio variable $u = x+b$ ~~[illegible]~~.

$$= \int_{\mathbb{R}} u^2 |f(u)|^2 dx$$

y la otra integral:

$$\int_{\mathbb{R}} (s-\beta)^2 |\hat{g}(s)|^2 ds = \int_{\mathbb{R}} (s-\beta)^2 \left| \widehat{e^{-i\beta x} f(x+b)}(s) \right|^2 ds \quad \text{pero} \quad \widehat{e^{-i\beta x} f(x+b)}(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ixs} e^{-i\beta x} f(x+b) dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ix(s-\beta)} f(x+b) dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-i(x+b)(s-\beta)} \left[e^{ib(s-\beta)} f(x+b) \right] dx$$

$$= \frac{e^{ib(s-\beta)}}{\sqrt{2\pi}} \underbrace{\int_{\mathbb{R}} e^{-i(x+b)(s-\beta)} f(x+b) dx}_{\hat{f}(s-\beta)}$$

$\hookrightarrow$ decir: $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} (s-\beta)^2 |\hat{g}(s)|^2 ds = \int_{\mathbb{R}} (s-\beta)^2 \left| e^{ib(s-\beta)} \hat{f}(s-\beta)\right|^2 ds$

$$= \int_{\mathbb{R}} (s-\beta)^2 |\hat{f}(s-\beta)|^2 ds \underset{u=s-\beta}{\overset{\uparrow}{=}} \int_{\mathbb{R}} u^2 |\hat{f}(u)| du \quad ✓$$

$\therefore$ Usando $g(x) = e^{-i\beta x} f(x-b)$

$$\int_{\mathbb{R}} (x-b)^2 |g(x)|^2 dx \int_{\mathbb{R}} (s-\beta)^2 |\hat{g}(s)|^2 ds \geq cte \cdot \|g\|_2^4$$

pasa a ser: $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} x^2 |f(x)|^2 dx \int_{\mathbb{R}} s^2 |\hat{f}(s)|^2 ds \geq cte \cdot \|f\|_2^4$

$\therefore$ basta ver el caso $b = \beta = 0$ ✓

Veamos tal caso:

notemos que: $\displaystyle \|f\|_2^2 = \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx \right) \overset{|f| = f \cdot \bar{f}}{\overset{\uparrow}{=}} \int_{\mathbb{R}} 1 \cdot (f(x) \cdot \overline{f(x)})\, dx$

integremos por partes con $u = f(x)\cdot\overline{f(x)}$ $dv = 1$.

$$= \underbrace{x \cdot f(x) \cdot \overline{f(x)} \Big|_{-\infty}^{\infty}}_{} - \int_{\mathbb{R}} x \cdot (f(x)\cdot\overline{f(x)})' dx = -\int_{\mathbb{R}} x \left(f(x)\overline{f(x)}\right) dx$$

$= 0$ (propiedad de funciones que admiten transf. de Fourier)

pero $\left(f(x)\overline{f(x)}\right)' = f'(x)\cdot\overline{f(x)} + f(x)\overline{f'(x)}$

$$= -\int_{\mathbb{R}} \left(x f'(x) \overline{f(x)} + x f(x) \overline{f'(x)}\right) dx \qquad 2\int |x||f(x)||f'(x)| dx$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}} \left| x f'(x) \overline{f(x)} + x f(x) \overline{f'(x)} \right| dx = 2 \int_{\mathbb{R}} x |f'(x) f(x)| dx$$

$$\underset{\text{Cauchy Schwarz}}{\leq} 2 \left(\int_{\mathbb{R}} x^2 |f(x)|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}} |f'(x)|^2 dx \right)^{1/2}$$

Pero por Parseval (P2) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} |f'(x)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}} |\widehat{f'(x)}(s)|^2 ds \overset{\text{prop. transf. } \widehat{f^k}(s) = (is)^k \hat{f}(s)}{\overset{\uparrow}{=}} \int_{\mathbb{R}} |(is)^k \hat{f}(s)|^2 ds$

$$= \int_{\mathbb{R}} s^2 |\hat{f}(s)|^2 ds$$

$$\therefore \|f\|_2^2 \leq 2\left(\int_{\mathbb{R}} x^2|f(x)|^2dx\right)^{1/2}\left(\int_{\mathbb{R}} s^2|\hat{f}(s)|^2ds\right)^{1/2}$$

$$\Rightarrow \|f\|_2^4 \leq 4\left(\int_{\mathbb{R}} x^2|f(x)|^2dx\right)\left(\int_{\mathbb{R}} s^2|\hat{f}(s)|^2ds\right)$$

$$\text{ie. } \frac{\|f\|_2^4}{4} \leq \left(\int_{\mathbb{R}} x^2|f(x)|^2dx\right)\left(\int_{\mathbb{R}} s^2|\hat{f}(s)|^2ds\right)$$

$\blacksquare$

La igualdad se da cuando se tiene igualdad para Cauchy - Schwarz

$$\Rightarrow xf(x) = \alpha f'(x) \Rightarrow \frac{x}{\alpha} = \frac{f'(x)}{f(x)} \Rightarrow \frac{1}{\alpha}\int_{\mathbb{R}} x = \int \frac{f'(x)}{f(x)} = \ln f(x) \Rightarrow f(x) = Cte \cdot e^{\frac{1}{2\alpha}x^2}.$$

$$cte + \frac{1}{2\alpha}x^2$$

Como f tiene transformada, necesariamente $\alpha < 0$ (sino integra infinito)

Osea, solo usando una gaussiana se tiene la igualdad. $\blacksquare$

$(f(x) = cte \cdot e^{-\alpha x^2} \; \alpha > 0)$

- <u>Sobre el cálculo de Transformadas</u>:

Recordemos que la transformada de Fourier se define en general para funciones

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ integrables como: $\mathcal{F}(f)(s): \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$

$$s \longmapsto \mathcal{F}(f)(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-iys}f(y)dy$$

Para el cálculo de estas, generalmente usamos residuos, teniendo el cuidado de separar los casos $s>0$ y $s<0$.

Cuando $s<0$ es relativamente fácil calcular la integral pues:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-iys}f(y)dy = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\overset{>0 \text{ pues } s<0}{-s}iy}f(y)dy \underset{-s=t>0}{=} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ity}f(y)dy \quad \text{con } t>0$$

Para calcular esta integral hay Teoremas de la parte de Residuos que nos permiten hacer el cálculo fácil

Para el caso $s>0$ podríamos realizar algo análogo calculando nuevamente residuos (como un auxiliar), sin embargo esto puede resultar largo y tedioso, veamos otra forma de hacer esto:

Notemos que:

$$\overline{\mathcal{F}(f)(s)} = \overline{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-iys} f(y)\,dy} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \overline{e^{-iys} f(y)}\,dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{iys}\,\overline{f(y)}\,dy$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-iy(-s)}\,\overline{f(y)}\,dy = \mathcal{F}(\overline{f})(-s)$$

$\therefore\ \overline{\mathcal{F}(f)(s)} = \mathcal{F}(\overline{f})(-s)\quad \forall s\in\mathbb{R} \iff \overline{\mathcal{F}(f)(-s)} = \mathcal{F}(\overline{f})(s)\quad \forall s\in\mathbb{R}.$

de esto último si $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ (como casi todas las funciones que usamos)

$\Rightarrow \overline{f} = f \Rightarrow \mathcal{F}(\overline{f})(s) = \mathcal{F}(f)(s) = \overline{\mathcal{F}(f)(-s)}\quad (*)$

$\therefore$ Si conocemos la Transformada para s, esta fórmula nos da la Transformada para $(-s)$. Así, conociendo la transformada para $s<0$ mediante esta fórmula la podemos determinar fácilmente para $s>0$. (siempre que $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$). Veámoslo con un ejemplo:

Para determinar $\mathcal{F}\left(\frac{a}{a^2+x^2}\right)(s)\quad \forall s\in\mathbb{R}$, rápido usando residuos,

En auxiliar vimos que el caso $s<0$ era bastante

en tal caso nos dio: $\mathcal{F}\left(\frac{a}{a^2+x^2}\right)(s) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,e^{as}\quad (s<0)$

Si $s>0$, gracias a la fórmula $(*)$

$$\mathcal{F}\left(\frac{a}{a^2+x^2}\right)(s) = \overline{\mathcal{F}\left(\frac{a}{a^2+x^2}\right)(\underbrace{-s}_{<0 \text{ pues } s>0})} \overset{\text{vale pues } (-s)<0}{=} \overline{\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,e^{a(-s)}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,e^{-as}$$

así, $\mathcal{F}\left(\frac{a}{a^2+x^2}\right)(s) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,e^{-as}\quad s>0.$ y $\therefore\ \mathcal{F}\left(\frac{a}{a^2+x^2}\right)(s) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,e^{-a|s|}\quad \forall s$

como esperábamos.

Una observación de esto es que en este caso la transformada es una función par. (al aplicar el conjugado nada cambia pues nos dio un real), esto es en gral: si $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ y $\mathcal{F}(f):\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$

$\Rightarrow \mathcal{F}(f)(s) = \underbrace{\overline{\mathcal{F}(f)(-s)}}_{\in\mathbb{R}} = \mathcal{F}(f)(-s) \Rightarrow \mathcal{F}(f)$ es función par!

OJO CON ESTAS PROPIEDADES! ENTIÉNDANLAS Y ÚSENLAS! :)

• Sobre EDP's y Separación de Variables.

A veces preguntan cosas relacionadas a probar que cierta EDP tiene una única solución (en caso de existir alguna), para esto hay que volver a la primera materia del curso, y recordar el Teorema de la divergencia:

Si $\vec{F}$ es campo de clase $\mathcal{C}^1$ en Ω dominio regular:

$$\int_{\partial\Omega} \vec{F}\cdot \underset{\substack{\uparrow \\ \text{normal ext}}}{\hat{n}}\, dS = \int_{\Omega} \operatorname{div}(\vec{F})\, dV$$

Para nuestros propósitos la identidad útil viene de este Teorema aplicado al campo $\vec{F} = u\nabla v$ con u, v campos escalares de clase $\mathcal{C}^1$ y $\mathcal{C}^2$ respectivamente

En tal caso: $\operatorname{div}(\vec{F}) = \operatorname{div}(u\nabla v) \underset{\uparrow}{=} \nabla u \nabla v + u\Delta v$

Pruébenlo, es fácil (lo vimos en Aux hace mucho)

$$\Rightarrow \int_{\partial\Omega} u \underbrace{\nabla v\cdot\hat{n}}_{\frac{\partial v}{\partial n}}\, dS = \int_{\partial\Omega} u\frac{\partial v}{\partial n}\, dS = \int_{\Omega} \operatorname{div}(u\nabla v)\, dV = \int_{\Omega} \nabla u\nabla v + u\Delta v\, dV \qquad (!)$$

Usemos esto para probar que el problema de Poisson (con CB Dirichlet) $\left.\begin{array}{l} \Delta u = f \text{ en } \Omega \\ u = g \text{ en } \partial\Omega \end{array}\right|$

Posee una única solución (si existe (y esto es cierto! pero va más allá (en gral) del curso))

En efecto, supongamos que existen dos soluciones: u y v

$$\Rightarrow \begin{array}{l} \Delta u = f \text{ en } \Omega \\ u = g \text{ en } \partial\Omega \end{array} \quad \text{y} \quad \begin{array}{l} \Delta v = f \text{ en } \Omega \\ v = g \text{ en } \partial\Omega \end{array}$$

Consideremos $w := u - v$, si probamos que $w = 0$ en $\Omega \Rightarrow u = v$ y concluimos que existe sol. única.

Notar que w resuelve: $\begin{array}{l} \Delta w = \Delta u - \Delta v = f - f = 0 \text{ en } \Omega \\ w = (u - v) = g - g = 0 \text{ en } \partial\Omega \end{array} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \Delta w = 0 \text{ en } \Omega \\ w = 0 \text{ en } \partial\Omega \end{array}\right|$

apliquemos (!) con $u = v = w$ (no los mismos de acá, los de (!)) $\|\nabla w\|^2 \geq 0$!

$$\Rightarrow \int_{\partial\Omega} w\cdot \underbrace{\frac{\partial w}{\partial n}}_{\substack{=0 \text{ pues } w=0 \\ \text{en } \partial\Omega}} dS = 0 = \int_{\Omega} \nabla w\nabla w + w\underbrace{\Delta w}_{=0}\, dV = \int_{\Omega} \|\nabla w\|^2 dV = 0 \Rightarrow \|\nabla w\|^2 = 0$$

$$\Rightarrow \nabla w \equiv 0$$

$$\Rightarrow w = \text{cte en } \Omega$$

pero $w=0$ en $\partial\Omega$ y por continuidad $\Rightarrow w \equiv 0$ en todo Ω

$\Rightarrow w = 0 = u - v \Rightarrow \boxed{u = v}$

$\therefore \exists$ solución única. :)

Finalmente veamos algo más:

• Cuando no se puede aplicar el Método de separación de Variables. (MSV)

A veces nos piden resolver una EDP que en principio no se puede aplicar el MSV, para resolverlas por este método basta definir una función auxiliar adecuada, que definirá un problema que sí se puede resolver por MSV. (Teniendo cuidado de definir bien las cond. iniciales y de borde) Veamoslo con un ejemplo:

Queremos resolver la ecuación:

$$
\begin{aligned}
& y_{tt} - y_{xx} = 4\,\text{sen}(2x), \quad 0<x<\pi, \quad t>0. \\
& y(0,t) = y(\pi,t) = 0, \quad t>0 \leftarrow \text{Cond borde} \\
& y(x,0) = 0 \quad 0<x<\pi \\
& y_t(x,0) = \pi - x \quad 0<x<\pi
\end{aligned}
\Bigg\} \text{ cond inic.}
$$

Notemos que el MSV no es directo para esta ecuación, en efecto, si $y(x,t) = X(x)T(t)$

$$\Rightarrow y_{tt} - y_{xx} = T''(t)X(x) - X''(x)T(t) = 4\,\text{sen}(2x) \quad / \cdot \frac{1}{X(x)T(t)}$$

$$\Rightarrow \frac{T''(t)}{T(t)} - \frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{4\,\text{sen}(2x)}{X(x)\,T(t)} \text{ ! } \Rightarrow \text{No vale el MSV.}$$

Para convertirlo en problema donde podamos aplicar MSV consideremos:

$u = y - \phi(x)$, con y solución de la ecuación inicial. ← solo de x pues el lado derecho es $4\,\text{sen}(2x) = f(x)$

$$\Rightarrow u_{tt} = y_{tt} - \underset{\phi=\phi(x)}{0} \quad \wedge \quad u_{xx} = y_{xx} - \phi''(x)$$

impongo, pues así me queda algo donde puedo separar variables

$$\Rightarrow u_{tt} - u_{xx} = \underbrace{y_{tt} - y_{xx}}_{4\,\text{sen}(2x)} + \phi''(x) = 0 \quad \Rightarrow \text{si } \phi \text{ es tal que}$$

$\phi''(x) = 4\,\text{sen}(2x)$

$\Rightarrow u$ resuelve

$u_{tt} - u_{xx} = 0$ ← vale MSV!

$\phi''(x) = 4\,\text{sen}(2x) \Rightarrow \phi(x) = -\text{sen}(2x) + \alpha x + \beta$ con $\alpha \wedge \beta$ a fijar

$\Rightarrow$ La sol para y será $\boxed{y = u + \phi(x)}$

Fijamos $\alpha = \beta = 0$ por simplicidad (da igual, esto simplifica las CB y CI)
Si elijo $\alpha, \beta \neq 0$ son distintas CB y CI pero la solución final será la misma! (para y)

$\Rightarrow$ u resuelve:

y solución

$$u_{tt} - u_{xx} = 0$$

$$u(0,t) = y(0,t) - \phi(0) = 0 + \text{sen}(0) = 0 \qquad t>0$$

$$u(\pi,t) = y(\pi,t) - \phi(\pi) = 0 + \text{sen}(2\pi) = 0 \qquad t>0$$

$$u(x,0) = y(x,0) - \phi(x) = 0 - \phi(x) = \text{sen}(2x) \qquad 0<x<\pi$$

$$u_t(x,0) = y_t(x,0) - \underbrace{\phi_t(x)}_{=0} = \pi - x \qquad 0<x<\pi.$$

$\therefore$ u resuelve:

$$\boxed{\begin{array}{ll} u_{tt} - u_{xx} = 0 & t>0 \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 & t>0 \\ u(x,0) = \text{sen}(2x) & 0<x<\pi \\ u_t(x,0) = \pi - x & \end{array}}$$

Esta ecuación <u>SI</u> puede resolverse por MSV (Háganlo!)

La solución final (del problema inicial)
será $y(x,t) = \underbrace{u(x,t)}_{\text{Calculada por MSV}} + \text{sen}(2x)$

Eso, ojalá les sirva, cualquier duda al foro o mail (mgodoy@dim)

Éxito!!