P1 $\begin{cases} u_t = \alpha u_{xx} \quad (*) & ; \ 0<x<L, \ t>0 \\ u_x(0,t) = u_x(L,t) = 0 & ; \ t>0 \\ u(x,0) = f(x) & ; \ 0<x<L \end{cases}$

0 L

Notación: $u_t = \frac{\partial u}{\partial t}$, $u_x = \frac{\partial u}{\partial x}$

En gral. usamos el método de separación de variables cuando la EDP es finita y lineal.

PASO 1: Separar variables, ie, suponer $u(x,t) = X(x)T(t)$ y derivamos:

$\Rightarrow u_t(x,t) = X(x)T'(t)$; $u_{xx}(x,t) = X''(x)T(t)$, reemplazamos esto en $(*)$

$\Rightarrow X(x)T'(t) = \alpha X''(x)T(t) \xRightarrow{1/(\alpha XT)} \frac{1}{\alpha}\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda$ (cte.)

Ahora obtendremos una colección de EDO's: $\begin{cases} T'(t) + \alpha\lambda T(t) = 0 \\ X''(x) + \lambda X(x) = 0 \end{cases}$ → analizaremos esta primero ya que obtendremos algo con $f(x)$ para una expresión de Fourier.

PASO 2: Analizar la EDO para X.

2.1: (CB) $u_x(0,t) = 0 \Rightarrow X'(0)T(t) = 0 \xRightarrow{T\neq 0} X'(0) = 0$

$u_x(L,t) = 0 \Rightarrow X'(L)T(t) = 0 \Rightarrow X'(L) = 0$

$\Rightarrow (EDO_{x,\lambda}) \begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X'(0) = X'(L) = 0 \end{cases}$

2.2: Resolver $(EDO_{x,\lambda})$ para los casos de λ:

• caso $\lambda = 0$: $X'' = 0 \Rightarrow X(x) = A_0 x + B_0$, con A_0, B_0 ctes.

$X'(0) = A_0 \Rightarrow X_0(x) = B_0$

$X'(L) = 0$ ← no entrega info.

Aún no descartaremos esto. ya que $X(x) = B$ nos podría aportar en la serie de Fourier.

• caso $\lambda < 0$: $X'' + \lambda X = 0 \Rightarrow X(x) = A\cosh(\sqrt{-\lambda}x) + B\operatorname{senh}(\sqrt{-\lambda}x)$

aplicamos pol. característico y reordenando aparece el $\cosh(\cdot)$ y $\operatorname{senh}(\cdot)$

Derivamos la solución:

$X'(x) = \sqrt{-\lambda}A\operatorname{senh}(\sqrt{-\lambda}x) + \sqrt{-\lambda}B\cosh(\sqrt{-\lambda}x) \Rightarrow \begin{cases} X'(0) = 0 = \sqrt{-\lambda}B \Rightarrow B = 0 \quad (\sqrt{-\lambda} \neq 0) \\ X'(L) = 0 = \sqrt{-\lambda}A\operatorname{senh}(\sqrt{-\lambda}) \Rightarrow \operatorname{senh}(\sqrt{-\lambda}L) = 0 \Rightarrow \sqrt{-\lambda}L = 0 \Rightarrow L = 0 \end{cases}$

senh(·) es inyect. y $\operatorname{senh}(0) = 0$

$\therefore$ El caso $\lambda < 0$ se descarta

• caso $\lambda > 0$: $X'' + \lambda X = 0 \Rightarrow X(x) = A\cos(\sqrt{\lambda}x) + B\operatorname{sen}(\sqrt{\lambda}x)$, derivemos la solución:

$X'(x) = -\sqrt{\lambda}A\operatorname{sen}(\sqrt{\lambda}x) + \sqrt{\lambda}B\cos(\sqrt{\lambda}x) \Rightarrow \begin{cases} X'(0) = \sqrt{\lambda}B = 0 \Rightarrow B = 0 \Rightarrow X(x) = A\cos(\sqrt{\lambda}x) \\ X'(L) = -\sqrt{\lambda}A\operatorname{sen}(\sqrt{\lambda}L) = 0 \Rightarrow \operatorname{sen}(\sqrt{\lambda}L) = 0 \Rightarrow \sqrt{\lambda}L = k\pi, \ k \in \mathbb{N}\setminus\{0\} \end{cases}$

es el caso que descartamos

Entonces, obtenemos que $\lambda = \left(\frac{k\pi}{L}\right)^2$, con $k \geq 1$, $\therefore$ El caso $\lambda > 0$ no se descarta!

$\therefore X_0(x) = B_0 \ \wedge \ X_k(x) = A_k\cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right)$

PASO 3: Analizar la EDO para T

• caso $\lambda = 0$: $T_0'(t) = 0 \Rightarrow T_0(t) = c = \text{cte}.$

• caso $\lambda = \left(\frac{k\pi}{L}\right)^2$: $T_k'(t) + \alpha\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 T_k(t) = 0 \Rightarrow T_k(t) = D_k e^{-\alpha\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 t}$

PASO 4: Ppio de superposición (Notamos que hemos obtenido un conj. de soluciones $u_k(x,t) = X_k(x)T_k(t)$, $k \geq 0$)

$$\Rightarrow U(x,t) \overset{DEF?}{=} \sum_{k\geq 0} u_k(x,t) \text{ es sol. de (1), (2)} \qquad (8)\begin{cases} \text{———(1)} \\ \text{———(2)} \\ \text{———(3)} \end{cases}$$

$$X_0(x)T_0(t) = \underbrace{B_0 \cdot C}_{a_0/2} + \sum_{k>0} \underbrace{A_k D_k}_{a_k} \cos\left(\frac{k\pi}{L}x\right) e^{-\alpha\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 t}$$

PASO 5: Imponemos la (CI) (3):

$$U(x,0) = f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k\geq 1} a_k \cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right)$$

→ es la serie de Fourier de $f: [0,L] \to \mathbb{R}$ (en cosenos)

Para obtener la serie de Fourier de f en cosenos, extendemos f de forma par: Sea $\tilde{f} = \begin{cases} f(x), & x \in [0,L] \\ f(-x), & x \in [-L,0] \end{cases}$

$$\Rightarrow S_{\tilde{f}}(x) = \frac{\tilde{a}_0}{2} + \sum_{k\geq 1} \tilde{a}_k \cos\left(\frac{k\pi}{L}x\right); \text{ donde } \tilde{a}_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} \tilde{f}(x)\,dx \underset{\tilde{f} \text{ par}}{=} \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\,dx \text{ y además:}$$

$$\tilde{a}_k = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} \underbrace{\tilde{f}(x)}_{\text{PAR}} \cdot \underbrace{\cos\left(\frac{k\pi}{L}x\right)}_{\text{PAR}} dx = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\left(\frac{k\pi}{L}x\right)dx$$

$$\Rightarrow \tilde{a}_k = a_k,\ \forall k \geq 0, \quad \therefore U(x,t) = \frac{1}{L}\int_0^L f(y)\,dy + \sum_{k\geq 1}\left(\frac{2}{L}\int_0^L f(y)\cos\left(\frac{k\pi y}{L}\right)dy\right)\cos\left(\frac{k\pi}{L}x\right) e^{-\alpha\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 t} \quad //$$

↳ solución final de la EDP.

b)

$$(P')\begin{cases} v_t = v_{xx} + x + \operatorname{sen}(x) & , \quad 0<x<\pi,\ t>0 \\ v_x(0,t) = 0 \ ; \ v_x(\pi,t) = -2-\dfrac{\pi^2}{2} & , \quad t>0 \\ v(x,0) = 0 & , \quad 0<x<\pi . \end{cases}$$

Intentaremos reducir este problema a (P) (del P1 Aux 9).

- Buscamos $u(x,t)$ tq $u_t = u_{xx}$, por lo cual plantearemos que

$$u_{xx} = v_{xx} + x + \operatorname{sen}(x) \qquad / \int(\,)\,dx$$

$$\Rightarrow \quad u_x = v_x + \frac{x^2}{2} - \cos(x) + c_1 \qquad (c_1 \text{ es cte}) \qquad / \int(\,)\,dx$$

$$\Rightarrow \quad u = v + \frac{x^3}{6} - \operatorname{sen}(x) + c_1 x + c_2 \qquad (c_2 \text{ es cte})$$

c_1 y c_2 podrían depender de t, pero las elegimos para que no dependan de t.
Así, $u_t = v_t$, y entonces concluimos que $u_t = u_{xx}$

- Veamos ahora qué condiciones de borde cumplirá u:

$u_x(0,t) = v_x(0,t) - 1 + c_1 = 0 - 1 + c_2$. Si imponemos $c_1 = 1$, entonces $u_x(0,t) = 0$

$$u_x(\pi,t) = v_x(\pi,t) + \frac{\pi^2}{2} - \cos(\pi) + 1$$

$$= -2 - \frac{\pi^2}{2} + 1 + 1 = 0 \qquad \therefore \ u_x(\pi,t) = 0$$

- Condición inicial:

$$u(x,0) = v(x,0) + \frac{x^3}{6} - \operatorname{sen}(x) + x + c_2$$

$$= \frac{x^3}{6} - \operatorname{sen}(x) + x \qquad , \text{ si } c_2 = 0.$$

Así, $u(x,t) := v(x,t) + \dfrac{x^3}{6} - \operatorname{sen}(x) + x$ satisface (P)

con $L = \pi$, $f(x) = \dfrac{x^3}{6} - \operatorname{sen}(x) + x$.

y $v(x,t) = \underbrace{U(x,t)}_{\text{sol. de } (P)} - \dfrac{x^3}{6} + \operatorname{sen}(x) - x$ es sol de (P') //