MA2002-6 Cálculo Avanzado y Aplicaciones
Profesor: Gonzalo Flores García
Auxiliar: Ilana Mergudich Thal
Fecha: 9 de noviembre de 2017

Auxiliar 13

P1. Sean $n, m \in \mathbb{Z}$. Demuestre que

a) $\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\cos(mx)dx = \begin{cases} \pi \text{ si } n = m \\ 0 \text{ si } n \neq m \end{cases}$

b) $\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\sin(mx)dx = \begin{cases} \pi \text{ si } n = m \\ 0 \text{ si } n \neq m \end{cases}$

c) $\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\cos(mx)dx = 0 \ \forall m, n \in \mathbb{Z}$

P2. Considere la función

$$f(x) = \begin{cases} x \text{ si } \pi > x > 0 \\ 0 \text{ si } -\pi \leq x \leq 0 \end{cases}$$

A partir de la serie de Fourier de $f(x)$ demuestre que

$$\sum_{n \text{ impar}} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

P3. Sea $f \in C^1$, 2π-periódica, tal que $\int_0^{2\pi} f(x)dx = 0$. Probar la identidad de Parseval, esto es:

$$\int_0^{2\pi} f^2(x)dx = \pi \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$$

P4. Encuentre la serie de Fourier en senos de la función f dada en $[0, \pi]$ por

$$f(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } 0 \leq x \leq \pi/2 \\ 2 \text{ si } \pi/2 < x \leq \pi \end{cases}$$

Discuta la convergencia puntual de dicha serie en relación al valor de $f(x)$ para cada $x \in [0, \pi]$.