

PAUTA AUXILIAR 9

P1] como una serie es holomorfa en su radio de convergencia, veamos que el radio de convergencia de $J(z)$ es ∞ y luego se tiene que $J(z)$ es holomorfa en todo $\mathbb{C}$.

Para ello, primero escribamos $J(z)$ como serie de potencias

$$J(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^k$$

con $z_0 = 0$ y $a_k = \begin{cases} \frac{(-1)^n}{(n!)^2 2^{2n}} & \text{si } k=2n \\ 0 & \text{si } k=2n+1 \end{cases}$ ~ $\leftarrow$ las potencias impares se multiplican de 0.

$R = \frac{1}{\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|}}$ veamos entonces que $\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} = 0$

$$\limsup_k \sqrt[k]{|a_k|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[2n]{\left| \frac{(-1)^n}{(n!)^2 2^{2n}} \right|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[2n]{\frac{1}{(n!)^2 2^{2n}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[2n]{n!} \cdot 2} = 0$$

Pg' $\left| \frac{(-1)^n}{(n!)^2 2^{2n}} \right| > 0$

Por lo que su punto de acumulación es ∞ y $\limsup$ es el mayor de los puntos de acumulación.

$\therefore R = \infty \Rightarrow J(z)$ es holomorfa en todo $\mathbb{C}$.

Como J es holomorfa, podemos derivar:

$$J'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2n}{(n!)^2 2^{2n}} z^{2n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{(n!)^2 2^{2n-1}} z^{2n-1}$$

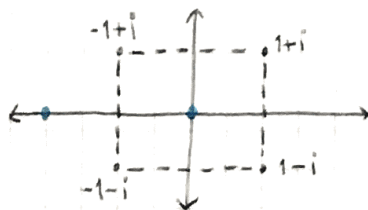
$$J''(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n-1)n}{(n!)^2 2^{2n-1}} z^{2n-2}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow J''(z) + \frac{1}{z} J'(z) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n-1)n}{(n!)^2 2^{2n-1}} z^{2n-2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{(n!)^2 2^{2n-1}} z^{2n-1} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{(n!)^2 2^{2n-1}} (2n-1+1) z^{2n-2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^2}{(n!)^2 2^{2n-1}} z^{2n-2} \\ &= - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} (n-1)}{((n-1)!)^2 2^{2n-2}} z^{2n-2} = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2 2^{2n}} z^{2n} = -J(z) \end{aligned}$$

$$\therefore J''(z) + \frac{1}{z} J'(z) + J(z) = 0 //$$

P2

$$\oint_{\Gamma} \frac{1}{z(z+2)} dz$$



$\frac{1}{z(z+2)}$ es holomorfa salvo en $z_1 = 0$ $z_2 = -2$

-2 no está en Γ , por lo que solo nos preocupamos de $z=0$

Por el teorema de la curva se tiene que

$$\oint_{\Gamma} \frac{1}{z^2+2z} dz = \oint_{\partial D(0,\epsilon)} \frac{1}{z^2+2z} \quad \text{con } \epsilon < 1$$

sea $g(z) = \frac{1}{z+2}$, luego la integral es $\oint_{\partial D(0,\epsilon)} \frac{g(z)}{z} dz$

$$\text{que es lo mismo que } \oint_{\partial D(0,\epsilon)} \frac{g(z)}{z-0} dz = 2\pi i g(0) = \frac{2\pi i}{2} = \pi i //$$

↑
Fórmula de Cauchy

P3

$$\oint_{\partial D(0,1)} \frac{\sin(\pi z^2) + \cos(\pi z^2)}{(z^2-2)(z-2)} dz = \oint_{\partial D(0,1)} \frac{\sin(\pi z^2) + \cos(\pi z^2)}{(\frac{1}{z}-2)(z-2)} dz \quad / \cdot \frac{-z/2}{-z/2}$$

$$= \oint_{\partial D(0,1)} \underbrace{\frac{-z}{2} \frac{\sin(\pi z^2) + \cos(\pi z^2)}{(z-\frac{1}{2})(z-2)}}_{f(z)} dz$$

$f(z)$ es holomorfa salvo en $z_1 = \frac{1}{2}$, $z_2 = 2$

2 no está en $\partial D(0,1)$ por lo que solo nos preocupamos de $z = \frac{1}{2}$

Por el teorema de la curva se tiene que

$$\oint_{\partial D(0,1)} f(z) dz = \oint_{\partial D(\frac{1}{2},\epsilon)} f(z) dz \quad \text{con } \epsilon < \frac{1}{2}$$

$$\text{sea } g(z) = \frac{-z}{2} \frac{\sin(\pi z^2) + \cos(\pi z^2)}{(z-2)} \quad \text{luego } \oint_{\partial D(0,1)} f(z) dz = \oint_{\partial D(\frac{1}{2},\epsilon)} \frac{g(z)}{z-\frac{1}{2}} dz$$

$$= 2\pi i g\left(\frac{1}{2}\right) = 2\pi i \cdot \frac{-\frac{1}{2}}{2} \frac{\sin(\pi/4) + \cos(\pi/4)}{-\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{2} \pi i}{3}$$

↑
Fórmula de Cauchy

P4

Recordemos primero que $\log(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} (z-1)^{k+1}$

con radio de convergencia $|w-1| < 1$

$$\Rightarrow \frac{1}{z} \log(1+z^2) = \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} (z^2)^{k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} z^{2k+1}$$

veamos ahora el radio de convergencia

$$z = x + iy$$

$$|1+z^2-1| < 1 \quad (\Leftrightarrow) \quad |z^2| < 1 \quad (\Leftrightarrow) \quad |x^2 - y^2 + 2xyi| < 1$$

$$(\Leftrightarrow) \quad \sqrt{(x^2 - y^2)^2 + 4x^2y^2} < 1$$

$$(\Leftrightarrow) \quad \sqrt{x^4 + y^4 - 2x^2y^2 + 4x^2y^2} < 1$$

$$(\Leftrightarrow) \quad \sqrt{(x^2 + y^2)^2} < 1$$

$$(\Leftrightarrow) \quad |z|^2 < 1$$

$$(\Leftrightarrow) \quad |z| < 1$$