MA2002-6 Cálculo Avanzado y Aplicaciones
Profesor: Gonzalo Flores García
Auxiliar: Ilana Mergudich Thal

Auxiliar 11: Preparación Control 2

P1. Sea $u(x, y) = g(x + y)$, para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, donde g es una función real suficientemente derivable. ¿Para cuáles g la función u corresponde a la parte real de una función holomorfa f?
Identifique f para estos casos.

P2. Usando la representación integral de $f^{(n)}(a)$ dada por la fórmula de Cauchy, pruebe que

$$\left(\frac{x^n}{n!}\right)^2 = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=1} \frac{x^n e^{xz}}{n! z^{n+1}} dz$$

y con esto pruebe que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x^n}{n!}\right)^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{2x\cos(\theta)} d\theta$$

P3. Calcule

$$f(z) = \oint_{C_N} \frac{\pi \cot(\pi z)}{z^2} dz$$

donde C_N es el cuadrado de vértices $(N+1/2)(-1-i)$, $(N+1/2)(1-i)$, $(N+1/2)(1+i)$ y $(N+1/2)(-1+i)$ con $N \in \mathbb{N}$.
Con esto, concluya el valor de

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$