MA2002-6 Cálculo Avanzado y Aplicaciones
Profesor: Gonzalo Flores García
Auxiliar: Ilana Mergudich Thal
Fecha: Jueves 19 de octubre de 2017

Auxiliar 10: Teorema de los Residuos

- $p \in \mathbb{C}$ es un punto singular aislado de $f(z)$ si $\exists R > 0$ tal que f es holomorfa en $D(p,R)\{p\}$ pero no en p.
- $p \in \mathbb{C}$ es un punto singular evitable si es aislado y $\exists L_0(p) = \lim_{z \to p} f(z)$.
- $p \in \mathbb{C}$ es un polo de $f(z)$ si p es un punto singular aislado de f y $\exists m \geq 1$ tal que $\exists L_m(p) = \lim z \to p(z-p)^m f(z) \neq 0$. El menor m con dicha propiedad se llama el orden del polo.
- $p \in \mathbb{C}$ es un polo simple si es un polo de orden 1.
- Si p es un polo para f, se define su residuo como $Res(f,p) = L(p) = \lim z \to p(z-p)^m f(z) \neq 0$.
- Teorema de los Residuos: Sea f holomorfa en $\Omega \setminus P$ donde $P = \{p_1, ..., p_n\}$ consiste en polos simples de f. Ω es un abierto de $\mathbb{C}$ Sea Γ curva cerrada simple recorrida en sentido antihorario tal que $\Gamma \cap P = \emptyset$ y que encierra a los polos simples $p_1, ..., p_n$. Entonces
$$\oint_\Gamma f(z)dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{n} Res(f, p_j)$$

P1. *[P2 Auxiliar 9]* Calcule
$$\oint_\Gamma \frac{1}{z^2 + 2z} dz$$
donde Γ es el cuadrado de vértices $1-i$, $1+i$, $-1+i$ y $-1-i$ en recorrido sentido antihorario.

P2. *[P3 Auxiliar 9]* Calcule
$$\int_{\partial D(0,1)} \frac{\sin(\pi z^2) + \cos(\pi z^2)}{(z^{-1} - 2)(z-2)} dz$$

P3. Demuestre que
$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{5} + \cos(\theta)} = \pi$$
Indicación: Considere la integral
$$\oint_{\partial D(0,1)} \frac{2}{i(z^2 + 2\sqrt{5}z + 1)} dz$$

P4. Calcule la integral
$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^3 + 8}$$
Indicación: Considere $f(z) = \dfrac{1}{z^3 + 8}$ y un contorno como el de la figura: