MA2002-6 Cálculo Avanzado y Aplicaciones
Profesor: Gonzalo Flores García
Auxiliar: Ilana Mergudich Thal
Fecha: Jueves 5 de octubre de 2017

Auxiliar 8

- Sea $(u_n)_{n\geq 0} \subseteq \mathbb{R}$. Se define el límite superior de la sucesión como $\limsup_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geq n} u_k$. Es el supremo de los puntos de acumulación de u_n.
- Sea $(c_n)_{n\geq 0} \subseteq \mathbb{C}$ y $a \in \mathbb{C}$, dado $z \in \mathbb{C}$ se define $S_N(z) = \displaystyle\sum_{k=0}^{N} c_k(z-a)^k$.
- Radio de convergencia: $R = 1/\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}$.
- S_N converge si $|z-a| < R$ y diverge si $|z-a| > R$
- La serie $S(z) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} c_k(z-a)^k$ es holomorfa en $D(a,R) = \{z \in \mathbb{C} : \ |z-a| < R\}$ con $S'(z) = kc_k(z-a)^{k-1}$
- $\int_\Gamma f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(t))\dot{\gamma}(t)dt$
- Teo Cauchy-Goursat: Si f es holomorfa en un abierto Ω simplemente conexo, entonces $\oint_\Gamma f(z)dz = 0$ para todo camino cerrado.

P1. Estudie el radio de convergencia de las siguientes series:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^2(z+2)^{2^n}$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n^3 (n!)^3}{(3n)!} z^{3n}$

Indicación: Puede serle útil la aproximación de Striling $n! \backsim \sqrt{2n\pi}\left(\frac{n}{e}\right)^n$, donde $\backsim$ quiere decir que el cociente de ambos valores tiende a uno cuando $n \to \infty$.

P2. Sea J la función definida mediante la serie de potencias

$$J(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(n!)^2 2^{2n}}$$

Muestre que J es una función holomorfa en todo $\mathbb{C}$ y verifique además que es solución de la ecuación

$$w'' + \frac{1}{z}w' + w = 0.$$

P3. Calcule $\int_\gamma f(z)dz$ en los siguientes casos:

a) $f(z) = \overline{z}$, con γ la circunferencia de centro 0 y radio 2 orientada positivamente.

b) $f(z) = Re(z)$ con γ la semicircunferencia unitaria que pasa por $-i, 1, i$, en ese orden.

c) $f(z) = |z|^2$, con γ el cuadrado de vértices $0, 1, 1+i, i$.

P4. Sea $b > 0$. Calcule

$$\int_0^\infty e^{-x^2} cos(2bx)dx$$

Para ello, integre la función $f(z) = e^{-z^2}$ sobre el rectángulo de vértices $R, R+ib, -R+ib, -R$ y tome límite cuando $R \to \infty$, probando que las integrales sobre los lados verticales del rectángulo tienden a 0.