MA2002-6 Cálculo Avanzado y Aplicaciones
Profesor: Gonzalo Flores García
Auxiliar: Ilana Mergudich Thal
Fecha: Martes 12 de septiembre de 2017

Auxiliar 7

P1. Considere una superficie regular y orientable S con campo de normales $\hat{n}$, y $\vec{F}, \vec{G} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dos campos vectoriales de clase C^1 tales que

$$\vec{F}(\vec{r}) = \vec{G}(\vec{r}) \ \forall \vec{r} \in S$$

Muestre que

$$\nabla \times \vec{F}(\vec{r}) \cdot \hat{n}(\vec{r}) = \nabla \times \vec{G}(\vec{r}) \cdot \hat{n}(\vec{r}) \ \forall \vec{r} \in S$$

De un ejemplo de $S, \vec{F}, \vec{G}$ que cumplan las condiciones anteriores pero

$$\nabla \times \vec{F}(\vec{r}) \neq \nabla \times \vec{G}(\vec{r}) \ \forall \vec{r} \in S$$

Indicación: Dado $\vec{r}_0 \in S$ utilice el teorema de Stokes en una familia de superficies adecuadas (pequeñas y centradas en $\vec{r}_0$).

P2. Considere el campo de fuerzas gravitatorio definido por

$$\vec{F}(x,y,z) = -\frac{GmM}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}(x \cdot \hat{x} + y \cdot \hat{y} + z \cdot \hat{z})$$

Demuestre que la integral de trabajo a lo largo de cualquier curva sobre la superficie S es nula. Esto es que existen zonas equipotenciales.

$$S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 = a^2\right\}$$

con a arbitrario pero fijo.

P3. Considere el campo vectorial $\vec{F}(x,y,z) = (x-y, z, y)$ y la superficie S definida por

$$S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x-1)^2 + (y-1)^2 \leq z\right\} \cap \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y^2 + z = 1\right\}$$

Calcule $\iint_S \operatorname{rot}(\vec{F}) \cdot d\vec{S}$.