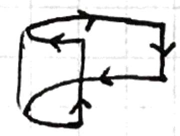
PAUTA AUXILIAR 3

P1 $I = \int_S \text{rot}\,\vec{F}\cdot d\vec{S} = \int_{\partial S} \vec{F}\cdot d\vec{r}$ (por Stokes)

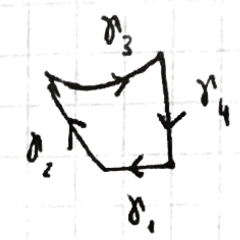
Veamos entonces como parametrizar ∂S. Lo haremos por partes

S_1:  $\Rightarrow$ ∂S_1: 

S_2:  (borde del cilindro "abierto") $\Rightarrow$ ∂S_2: 

S_3:  $\Rightarrow$ ∂S_3: 

S_4:  $\Rightarrow$ ∂S_4: 

∂S: 

se cancelan los tramos que son recorridos en sentidos opuestos

$$\Rightarrow \int_{\partial S}\vec{F}\cdot d\vec{r} = \underbrace{\int_{\gamma_1}\vec{F}\cdot d\vec{r}}_{(a)} + \underbrace{\int_{\gamma_2}\vec{F}\cdot d\vec{r}}_{(b)} + \underbrace{\int_{\gamma_3}\vec{F}\cdot d\vec{r}}_{(c)} + \underbrace{\int_{\gamma_4}\vec{F}\cdot d\vec{r}}_{(d)}$$

(a) · Parametricemos γ_1: es una recta que va de $(0,a,0)$ a $(0,0,0)$

$$\Rightarrow \vec{r}(t) = (1-t)\cdot(0,a,0) + t(0,0,0) = (0, a-at, 0) \quad t\in[0,1]$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = (0,-a,0)$$

$$\int_{\gamma_1}\vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_0^1 \vec{F}(\vec{r}(t))\cdot\frac{d\vec{r}}{dt}\,dt = \int_0^1 \begin{pmatrix} a-at\\ 0\\ 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\ -a\\ 0\end{pmatrix} dt = 0$$

(b) · Parametricemos γ_2: es una recta que va de $(0,0,0)$ a $(a,0,h)$

$$\Rightarrow \vec{r}(t) = (1-t)(0,0,0) + t(a,0,h) = (ta, 0, th) \quad t\in[0,1]$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = (a,0,h)$$

$$\int_{\gamma_2}\vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_0^1 \vec{F}(\vec{r}(t))\cdot\frac{d\vec{r}}{dt}\,dt = \int_0^1 \begin{pmatrix}0\\ th\\ 2ta\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a\\ 0\\ h\end{pmatrix} dt = \int_0^1 2aht\,dt$$

$$= 2ah\left(\frac{t^2}{2}\right)\Bigg|_0^1 = ah$$

(c) · Parametricemos γ_3: es un cuarto de círculo de radio a y altura h

$$\Rightarrow \vec{r}(t) = (a\cos(t), a\,\text{sen}(t), h) \qquad t\in[0,\pi/2]$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = (-a\,\text{sen}(t), a\cos(t), 0)$$

$$\int_{\gamma_3}\vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \vec{F}(\vec{r}(t))\cdot\frac{d\vec{r}}{dt}\,dt = \int_0^{\pi/2}\begin{pmatrix}a\,\text{sen}(t)\\ h\\ 2a\cos(t)\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-a\,\text{sen}(t)\\ a\cos(t)\\ 0\end{pmatrix} dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} -a^2\text{sen}^2(t) + ah\cos(t)\,dt = -\frac{\pi}{4}a^2 + ah$$

(d) Parametricemos γ_4: es una recta que va de $(0, a, h)$ a $(0, a, 0)$

$$\Rightarrow \vec{r}(t) = (1-t)(0,a,h) + t(0,a,0) = (0, a, h-th) \qquad t \in [0,1]$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = (0, 0, -h)$$

$$\int_{\gamma_4} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_0^1 \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \frac{d\vec{r}}{dt}\, dt = \int_0^1 \begin{pmatrix} a \\ h-th \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -h \end{pmatrix} dt = 0.$$

Luego $I = 0 + ah - \frac{\pi}{4}a^2 + ah + 0 = -\frac{\pi}{4}a^2 + 2ah$ //.

P2 a) Recordemos que en un sistema de coordenadas ortogonales

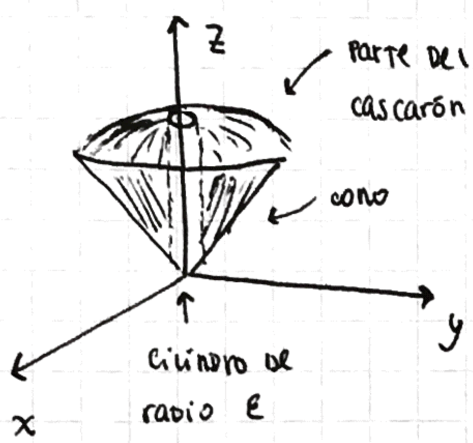
$$\operatorname{div}(F) = \frac{1}{h_u h_v h_w}\left(\frac{\partial}{\partial u}(F_u h_v h_w) + \frac{\partial}{\partial v}(F_v h_u h_w) + \frac{\partial}{\partial w}(F_w h_u h_v)\right)$$

en coordenadas esféricas, $h = 1$, $h_\theta = r\,\mathrm{sen}(\varphi)$, $h_\varphi = r$

$$\Rightarrow \operatorname{div}(F) = \frac{1}{r^2\,\mathrm{sen}(\varphi)}\left(\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \cdot r^2\,\mathrm{sen}(\varphi)\right) + \frac{\partial}{\partial \theta}\left(r\theta\,\mathrm{sen}^3(\varphi)\cdot r\right) + \frac{\partial}{\partial \varphi}\left(0 \cdot r\,\mathrm{sen}(\varphi)\right)\right)$$

$$= \frac{1}{r^2\,\mathrm{sen}(\varphi)}\left(4r^3\,\mathrm{sen}(\varphi) + r^2\,\mathrm{sen}^3(\varphi)\right) = 4r + \mathrm{sen}^2(\varphi) \quad //.$$

b) Ω_ε:



(Ω_ε es Ω pero sin el cilindro de radio ε)

* en la punta del cono, la superficie no es orientable, por eso es necesario "sacarle" el cilindro

Luego $\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus C_\varepsilon$

Calculemos el flujo en las diferentes superficies

1. MANTO DEL CONO

notemos que $\hat{n} = \hat{\varphi}$. Luego como $\vec{F}\cdot\hat{\varphi} = 0 \Rightarrow$ Flujo es 0 en esta superficie

2. TAPA ESFÉRICA

notemos que $\hat{n} = \hat{r}$

$\Rightarrow \hat{r}(\theta,\varphi) = (\mathrm{sen}(\varphi)\cos(\theta),\ \mathrm{sen}(\varphi)\,\mathrm{sen}(\theta),\ \cos(\varphi))$ $\qquad \theta \in [0,2\pi]$, $\varphi \in [\arcsin(\varepsilon), \pi/4]$ *

*

$\mathrm{sen}(\varphi) = \frac{\varepsilon}{1} \Rightarrow \varphi = \arcsin(\varepsilon)$, φ mínimo.

φ máximo cuando $z = \sqrt{x^2+y^2}$

$r\cos(\varphi) = \sqrt{r^2\,\mathrm{sen}^2(\varphi)} \Rightarrow \cos(\varphi) = \mathrm{sen}(\varphi) = \varphi = \pi/4$

Entonces el flujo en esta parte es $\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_{\arcsin(\varepsilon)}^{\pi/4} \vec{F}(\vec{F}(\theta,\varphi))\cdot\hat{r}\cdot \cancel{r^2}\,\mathrm{sen}(\varphi)\,d\theta\,d\varphi$ — 1 pues en el cascarón esférico $r=1$

$$= \int_0^{2\pi}\int_{\arcsin(\varepsilon)}^{\pi/4} 1^2\cdot 1^2\,\mathrm{sen}(\varphi)\,d\theta\,d\varphi = 2\pi\int_{\arcsin(\varepsilon)}^{\pi/4}\mathrm{sen}(\varphi)\,d\varphi = 2\pi\left(-\cos(\varphi)\right)\Big|_{\arcsin(\varepsilon)}^{\frac{\pi}{4}} = 2\pi\left(\cos(\arcsin(\varepsilon)) - \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

tomando $\lim_{\varepsilon\to 0}$ $\quad = 2\pi\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ //

3. MANTO CILÍNDRICO DE C_ε

notemos primero que como F es acotada $\exists M \in \mathbb{R}$ tq: $\|F\| \le M$

notemos también que $0 \le \left|\iint_{C_\varepsilon} \vec{F}\cdot d\vec{A}\right| \le \iint_{C_\varepsilon}\|\vec{F}\|\,dA \le \iint_{C_\varepsilon} M\cdot d\vec{A}$

$$= M\cdot \text{Area}(\text{manto } C_\varepsilon) = M\cdot 2\pi\varepsilon\cdot h \xrightarrow{\varepsilon\to 0} 0$$

Entonces $I = \lim_{\varepsilon\to 0}\iint_{\partial\Omega_\varepsilon}\vec{F}\cdot d\vec{A} = 0 + 2\pi\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 0 = \pi\left(2-\sqrt{2}\right)$ //.

P3

Recordemos la primera fórmula integral de Green

$$\iiint_{\Omega} f\Delta g \, dV = \iint_{\partial\Omega} \frac{\partial g}{\partial n} \, dA - \iiint_{\Omega} \nabla f \cdot \nabla g \, dV$$

donde $\frac{\partial g}{\partial n} = \nabla g \cdot \hat{n}$

Como $h \in C^2$ es solución, $\underbrace{-\Delta h + h^3 = 0}_{*}$ en Ω y $h = 0$ en $\partial\Omega$

Por $*$ se tiene que $-h\Delta h + h^4 = 0 \quad / \iiint_{\Omega} dV$

$$\Rightarrow -\iiint_{\Omega} h\Delta h \, dV + \iiint_{\Omega} h^4 \, dV = 0 \qquad (*)$$

aplicando la primera fórmula de green para $f = g = h$ se tiene que

$$\iiint_{\Omega} h\Delta h \, dV = \underbrace{\iint_{\partial\Omega} h \nabla h \cdot d\vec{A}}_{0 \text{ pues } h=0 \text{ en } \partial\Omega} - \iiint_{\Omega} \nabla h \cdot \nabla h \, dV \qquad (**)$$

$$\Rightarrow \iiint_{\Omega} \nabla h \cdot \nabla h \, dV + \iiint_{\Omega} h^4 \, dV = 0 \qquad (\text{de } * \text{ y } **)$$

Pero $\nabla h \cdot \nabla h = \|\nabla h\|^2$

$\Rightarrow \iiint_{\Omega} \|\nabla h\|^2 + h^4 \, dV = 0$ pero como $\|\nabla h\|^2 \geq 0$ y $h^4 \geq 0$,

para que sumen 0, necesariamente deben ser 0

$\Rightarrow \|\nabla h\|^2 = 0 \Rightarrow \nabla h = 0 \Rightarrow h$ constante

Pero sabemos que $h = 0$ en $\partial\Omega \Rightarrow h \equiv 0$ en todo Ω //.