**MA2002-6** Cálculo Avanzado y Aplicaciones
**Profesor:** Gonzalo Flores García
**Auxiliar:** Ilana Mergudich Thal
**Fecha:** 10 de Agosto de 2017

# Auxiliar 1

## Resumen:

- Un sistema de coordenadas curvilienas es una función $\vec{r}(u,v,w) = (x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w))$ definida en una región de $\mathbb{R}^3$, que es invertible, suficientemente diferenciable y con matriz jacobiana invertible.
- Se definen los factores de escala de un sistema de coordenadas curvilineas $\vec{r}(u,v,w)$ por $h_u = \|\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}\|$, $h_v = \|\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\|$, $h_w = \|\frac{\partial \vec{r}}{\partial w}\|$.
- $\hat{u} = \frac{1}{h_u}\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}$. Además $\hat{v}$ y $\hat{w}$ se definen análogamente.
- $\nabla f = \frac{1}{h_u}\frac{\partial f}{\partial u}\hat{u} + \frac{1}{h_v}\frac{\partial f}{\partial v}\hat{v} + \frac{1}{h_w}\frac{\partial f}{\partial w}\hat{w}$
- $div(\vec{F}) = \frac{1}{h_u h_v h_w}\left[\frac{\partial}{\partial u}(F_u h_v h_w) + \frac{\partial}{\partial v}(h_u F_v h_w) + \frac{\partial}{\partial w}(h_u h_v F_w)\right]$
- $rot(\vec{F}) = \frac{1}{h_u h_v h_w}\begin{vmatrix} h_u\hat{u} & h_v\hat{v} & h_w\hat{w} \\ \frac{\partial}{\partial u} & \frac{\partial}{\partial v} & \frac{\partial}{\partial w} \\ F_u h_u & F_v h_v & F_w h_w \end{vmatrix}$
- Integral de flujo: $\int\int_S \vec{F}\cdot d\vec{A} = \int_{u_1}^{u_2}\int_{v_1}^{v_2} \vec{F}(\vec{r}(u,v))\cdot\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}\times\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\right)$
- Se define el vector normal de una superficie $S$ parametrizada por $\vec{r}(u,v)$, como $\hat{n} = \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}\times\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\right)/\|\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}\times\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\|$
- Denotando $d\vec{A} = \hat{n}dA$ con $dA = \|\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}\times\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\|dudv$, notar que la integral de flujo se puede escribir como $\int\int_S \vec{F}\cdot d\vec{A} = \int\int_S \vec{F}\cdot\hat{n}dA = \int_{u_1}^{u_2}\int_{v_1}^{v_2}\vec{F}(\vec{r}(u,v))\cdot\hat{n}\|\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}\times\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\|dudv$
- Si la parametrización de la superficie $S$ es parte de un sistema de coordenadas ortogonales (variando dos parámetros, digamos $u,v$, y el otro se deja constante, digamos $w$), entonces $\hat{n} = \hat{w}$, $\|\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}\times\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\| = h_u h_v$. Así la integral de flujo se puede escribir como $\int\int_S \vec{F}\cdot d\vec{A} = \int_{u_1}^{u_2}\int_{v_1}^{v_2}\vec{F}(\vec{r}(u,v))\cdot\hat{w}h_u h_v dvdu$
- Integral de volumen: $\int\int\int_R f dV = \int\int\int_R f dxdydz$.
- Cuando la región $R$ se parametriza por $\vec{r}(u,v,w)$ se tiene que $\int\int\int_{\vec{r}(\sigma)} f dV = \int\int\int_\sigma f(\vec{r}(u,v,w))|\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}\times\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\right)\cdot\frac{\partial \vec{r}}{\partial w}|dudvdw$, donde $R = \vec{r}(\sigma)$.
- Denotaremos $dV = |\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}\times\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\right)\cdot\frac{\partial \vec{r}}{\partial w}|dudvdw$.
- Si $\vec{r}$ parametriza en un sistema de coordenadas ortogonales, $dV = h_u h_v h_w dudvdw$. y $\int\int\int_{\vec{r}(\sigma)} f dV = \int\int\int_\sigma f(\vec{r}(u,v,w))h_u h_v h_w dudvdw$.
- Teorema de la divergencia Gauss: Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ abierto, acotado, de frontera $\partial\Omega$ regular por pedazos, orientada según la normal exterior. Sea $\vec{F}: \Omega\cup\partial\Omega \to \mathbb{R}^3$ de clase $C^1$. Entonces $\int\int_{\partial\Omega}\vec{F}\cdot\hat{n}dA = \int\int\int_\Omega div(\vec{F})dV$.
- Coordenadas cilíndricas $(x,y,z) = (\rho\cos(\theta), \rho\sin(\theta)), z)$.
- Coordenadas esféricas $(x,y,z) = (r\sin(\phi)\cos(\theta), r\sin(\phi)\sin(\theta), r\cos(\phi))$.
  $h_r = 1$, $h_\theta = r\sin(\phi)$, $h_\phi = r$.

**P1.** Sea $\varphi$ un campo escalar y $F, G$ campos vectoriales suficientemente diferenciables. Demuestre las siguientes identidades:

*a*) $div(\varphi\nabla\varphi) = \|\nabla\varphi\|^2 + \varphi\Delta\varphi$

*b*) $\Delta G = \nabla(div(G)) - rot(rot(G))$

*c*) $div(F \times G) = G \cdot rot(F) - F \cdot rot(G)$

*d*) Considere $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \varphi(x) \leq 0\}$ y demuestre que

$$\int_\Omega \nabla\varphi \cdot rot(F) dx = 0$$

Aquí se supone que $\Omega$ es acotado, que su borde está dado por $\partial\Omega = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \varphi(x) = 0\}$ y que $\nabla\varphi \neq 0$ en todo punto de $\partial\Omega$.

**P2.** Considere un sistema de coordenadas cilíndricas.

*a*) Calcule los factores escalares correspondientes $(h_\rho, h_\varphi, h_z)$.

*b*) Calcule los valores unitarios $\hat{\rho}$, $\hat{\varphi}$, $\hat{z}$. Verifique que son ortogonales y encuentre el orden positivo.

*c*) Sea $F(x, y, z) = \begin{pmatrix} \sqrt{x^2+y^2}\cos(\arctan(y/x)) - \arctan(y/x)\sin(\arctan(y/x)) \\ \sqrt{x^2+y^2}\sin(\arctan(y/x)) + \arctan(y/x)\cos(\arctan(y/x)) \\ z \end{pmatrix}$

Calcule la divergencia y el rotor de $F$.

**P3.** *a*) Sea $S$ la superficie cónica dada por $z^2 = x^2 + y^2$ para $1 \leq z \leq 2$. Bosqueje y parametrice $S$. Luego evalúe por definición la integral de flujo

$$\int\int_S \vec{F} \cdot \hat{n} \, dA$$

donde $\vec{F} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z^2\hat{k}$ y $\hat{n}$ define una orientación sobre $S$ (precise cual es).

*b*) Sea $\vec{F}$ el campo vectorial dado por $\vec{F} = x^2y\hat{\jmath} + y^2z\hat{k}$. Calcule la siguiente integral de flujo usando el Teorema de la Divergencia de Gauss

$$\int\int_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot \hat{n} \, dA$$

donde $\Omega$ es la región de $\mathbb{R}^3$ dada por $4 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 9$ y $z \geq 0$, con $\hat{n}$ la normal exterior de $\Omega$.