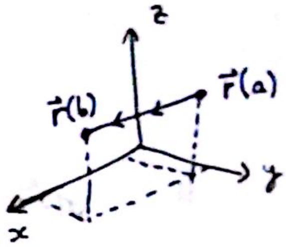
Algunas parametrizaciones básicas.

MA2002-1
Prof: Raúl Gormaz
Aux: Hugo Carrillo.

1. Curvas.

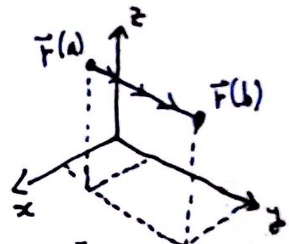
1.1. Usando coordenadas cartesianas.

1.1.1. Cuando sólo varía 1 eje, de manera lineal.



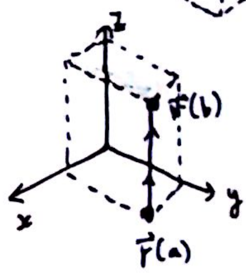
a) $\vec{r}(x) = (x, y_0, z_0)$, $x \in [a, b]$

Es un segmento recto que va desde el punto (a, y_0, z_0) hasta (b, y_0, z_0), paralelo al eje x.
En este caso, $\vec{r}\,'(x) = \hat{\imath}$



b) $\vec{r}(y) = (x_0, y, z_0)$, $y \in [a, b]$

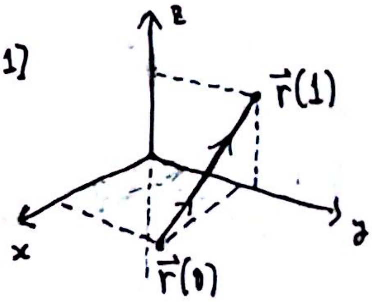
Es un segmento recto que va desde el punto (x_0, a, z_0) hasta (x_0, b, z_0), paralelo al eje y.
En este caso, $\vec{r}\,'(y) = \hat{\jmath}$



c) $\vec{r}(z) = (x_0, y_0, z)$, $z \in [a, b]$

Es un segmento recto que va desde (x_0, y_0, a) hasta (x_0, y_0, b), paralelo al eje z.
En este caso, $\vec{r}\,'(z) = \hat{k}$

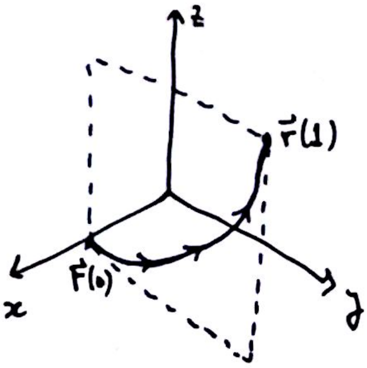
1.1.2. Algunos otros casos.



a) $\vec{r}(t) = (1-t)(x_1, y_1, z_1) + t(x_2, y_2, z_2)$, $t \in [0, 1]$

Es un segmento recto que va desde el punto (x_1, y_1, z_1) hasta (x_2, y_2, z_2).
En este caso, $\vec{r}\,'(t) = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$

b) $\vec{r}(y) = (x_0, y, f(y))$, $y \in [y_1, y_2]$



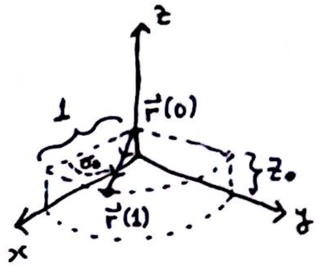
Por ejemplo, si $f(y) = y^2$, la curva es una parábola $(y_1 = 0, y_2 = 1)$
que va desde $(x_0, 0, 0)$ hasta $(x_0, 1, 1)$, en el plano $x = x_0$.
En este caso, $\vec{r}\,'(y) = (0, 1, f'(y))$.

1.2. Usando coordenadas cilíndricas:

1.2.1. Cuando sólo varía 1 parámetro del sistema.

a) $\vec{r}(\rho) = (\rho\cos\theta_0,\ \rho\,\text{sen}\,\theta_0,\ z_0)$, $\rho \in [0,1]$

$= \rho\,\hat{\rho}(\theta_0) + z_0\hat{k}$



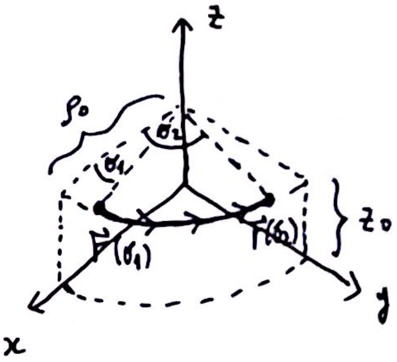
Es un segmento recto que va desde $(0,0,z_0)$ hasta $(\cos\theta_0,\ \text{sen}\,\theta_0,\ z_0)$.

En este caso, $\vec{r}\,'(\rho) = (\cos\theta_0,\ \text{sen}\,\theta_0,\ 0)$

$= h_\rho\,\hat{\rho}(\theta_0)$

b) $\vec{r}(\theta) = (\rho_0\cos\theta,\ \rho_0\,\text{sen}\,\theta,\ z_0)$, $\theta \in [\theta_1,\theta_2]$

$= \rho_0\hat{\rho} + z_0\hat{k}$



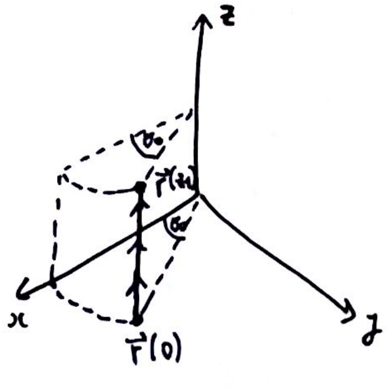
Es un arco de circunferencia de radio ρ_0, en altura z_0, de modo que va desde el punto $(\rho_0\cos\theta_1,\ \rho_0\,\text{sen}\,\theta_1,\ z_0)$ hasta $(\rho_0\cos\theta_2,\ \rho_0\,\text{sen}\,\theta_2,\ z_0)$.

En este caso, $\vec{r}\,'(\theta) = h_\theta\,\hat{\theta}$

$= \rho(-\text{sen}\,\theta,\ \cos\theta,\ 0)$

c) $\vec{r}(z) = (\rho_0\cos\theta_0,\ \rho_0\,\text{sen}\,\theta_0,\ z)$, $z \in [0, z_1]$

$= \rho_0\,\hat{\rho}(\theta_0) + z\hat{k}$



Es un segmento recto que va desde $(\rho_0\cos\theta_0, \rho_0\,\text{sen}\,\theta_0, 0)$ hasta $(\rho_0\cos\theta_0,\ \rho_0\,\text{sen}\,\theta_0,\ z_1)$.

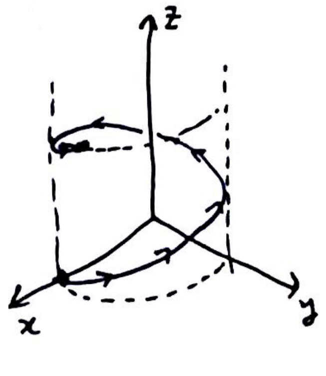
En este caso, $\vec{r}\,'(z) = h_z\hat{k} = \hat{k}$

$= (0, 0, 1)$

1.2.2. Otro caso.

$\vec{r}(\theta) = (\rho_0\cos\theta,\ \rho_0\,\text{sen}\,\theta,\ f(\theta))$, $\theta \in [\theta_1,\theta_2]$

(Ejemplo: $\vec{r}(\theta) = \left(a\cos\theta, a\,\text{sen}\,\theta, \frac{h\theta}{2\pi}\right)$, $\theta \in [0, 2\pi]$)
"hélice"



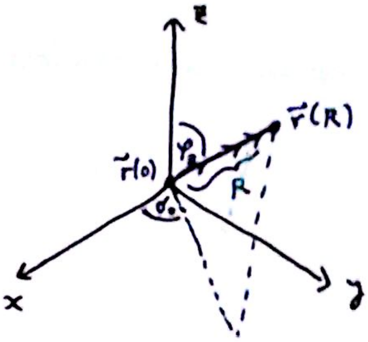
En este caso, $\vec{r}\,'(\theta) = \rho_0\hat{\theta} + f'(\theta)\hat{k}$.

1.3. Usando coordenadas esféricas.

1.3.1. Cuando varía sólo 1 parametro del sistema.

a) $\vec{r}(r) = (r\cos\theta_0 \operatorname{sen}\varphi_0,\ r\operatorname{sen}\theta_0 \operatorname{sen}\varphi_0,\ r\cos\varphi_0)$, $r \in [0, R]$

$= r\,\hat{r}(\varphi_0, \theta_0)$



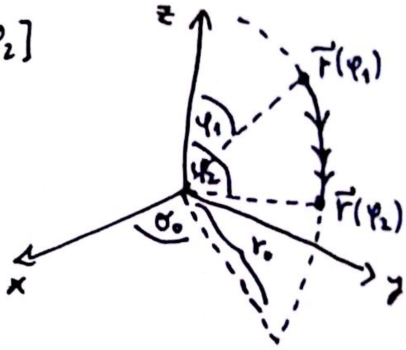
Es un segmento recto que va desde $(0,0,0)$ hasta $(R\cos\theta_0 \operatorname{sen}\varphi_0,\ R\operatorname{sen}\theta_0 \operatorname{sen}\varphi_0,\ R\cos\varphi_0)$.

En este caso, $\vec{r}\,'(r) = h_r\,\hat{r}(\varphi_0, \theta_0)$

$= (\cos\theta_0 \operatorname{sen}\varphi_0,\ \operatorname{sen}\theta_0 \operatorname{sen}\varphi_0,\ \cos\varphi_0)$

b) $\vec{r}(\varphi) = (r_0 \cos\theta_0 \operatorname{sen}\varphi,\ r_0 \operatorname{sen}\theta_0 \operatorname{sen}\varphi,\ r_0\cos\varphi)$, $\varphi \in [\varphi_1, \varphi_2]$

$= r_0\,\hat{r}(\varphi, \theta_0)$



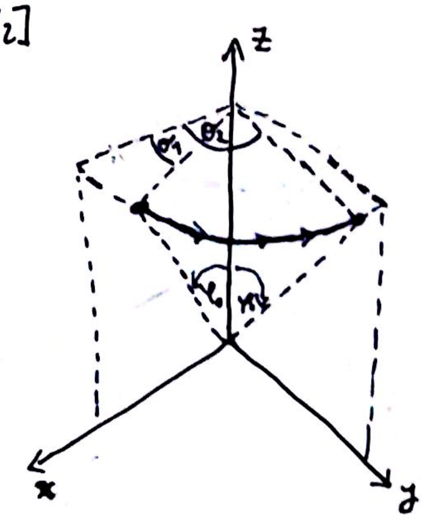
Es un arco de cirunferencia de radio r_0, de modo que va desde $r_0\,\hat{r}(\varphi_1, \theta_0)$ hasta $r_0\,\hat{r}(\varphi_2, \theta_0)$.

En este caso, $\vec{r}\,'(\varphi) = h_\varphi(r_0)\,\hat{\varphi}(\varphi, \theta_0)$

$= (r_0\cos\theta_0 \cos\varphi,\ r_0\operatorname{sen}\theta_0 \cos\varphi,\ -r_0\operatorname{sen}\varphi)$

c) $\vec{r}(\theta) = (r_0 \cos\theta \operatorname{sen}\varphi_0,\ r_0 \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi_0,\ r_0\cos\varphi_0)$, $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$

$= r_0\,\hat{r}(\varphi_0, \theta)$



Es un arco de círcunferencia de radio r_0, que va desde $r_0\,\hat{r}(\varphi_0, \theta_1)$ hasta $r_0\,\hat{r}(\varphi_0, \theta_2)$.

En este caso, $\vec{r}\,'(\theta) = h_\theta(r_0, \varphi_0)\,\hat{\theta}(\theta)$.

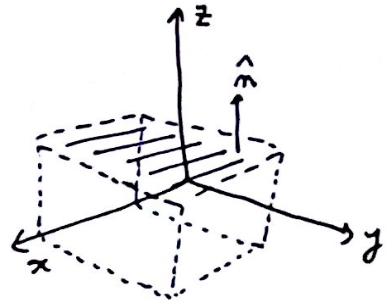
$= r_0 \operatorname{sen}(\varphi_0)\,(-\operatorname{sen}\theta,\ \cos\theta,\ 0)$

2. Superficies.

2.1. Usando coordenadas cartesianas.

2.1.1. Cuando varían 2 parámetros independientemente, y el otro parámetro queda constante.

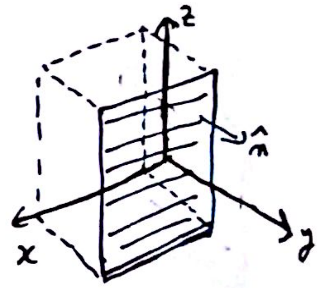
a) $\vec{r}(x,y) = (x, y, z_0)$, $x \in [x_1, x_2]$, $y \in [y_1, y_2]$



Es una superficie plana rectangular, paralela al plano XY.

En este caso, $\hat{n} = \hat{k}$, y $\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial y}\right) = h_z \hat{k} = \hat{k}$.

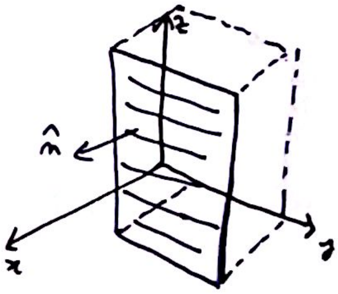
b) $\vec{r}(x,z) = (x, y_0, z)$, $x \in [x_1, x_2]$, $z \in [z_1, z_2]$



Es una sup. plana rectangular, paralela al plano XZ.

En este caso, $\hat{n} = \hat{j}$, y $\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial z} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial x}\right) = h_y \hat{j} = \hat{j}$

c) $\vec{r}(y,z) = (x_0, y, z)$, $y \in [y_1, y_2]$, $z \in [z_1, z_2]$

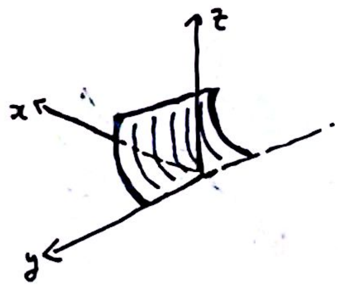


Es una sup. plana rect., paralela al plano YZ.

En este caso, $\hat{n} = \hat{\imath}$, y $\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial y} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial z}\right) = h_x \hat{\imath} = \hat{\imath}$

2.2.2. Otro caso,

$\vec{r}(x,y) = (x, y, f(x))$, $x \in [x_1, x_2]$, $y \in [y_1, y_2]$



[Ejemplo: (x, y, x^2) , $x \in [0,1]$, $y \in [-1,1]$]

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \vec{r}}{\partial x} &= (1, 0, f'(x)) \\ \frac{\partial \vec{r}}{\partial y} &= (0, 1, 0) \end{aligned}\right\} \quad \frac{\partial \vec{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial y} = \left(\hat{\imath} + f'(x)\hat{k}\right) \times \hat{j} = \hat{k} - f'(x)\hat{\imath}$$

2.2. Usando coordenadas cilíndricas.

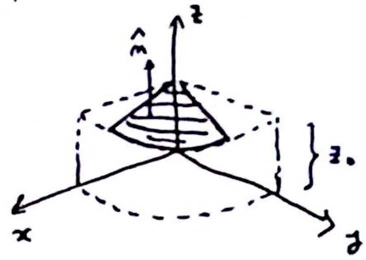
2.2.1. Cuando varían 2 parámetros independientemente, y el otro parámetro permanece constante.

a) $\vec{r}(\rho,\theta) = (\rho\cos\theta, \rho\,\mathrm{sen}\,\theta, z_0)$, $\rho\in[0,\rho_1]$, $\theta\in[\theta_1,\theta_2]$

$= \rho\hat\rho + z_0\hat k$

Se trata de un sector circular en el plano $z=z_0$.

En este caso $\hat n = \hat k$, y $\left(\frac{\partial\vec r}{\rho}\times\frac{\partial\vec r}{\partial\theta}\right) = h_\rho h_\theta\hat k$
$= \rho\hat k$

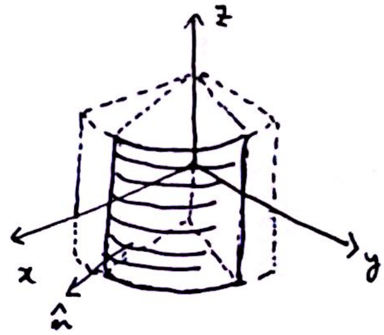


b) $\vec r(\theta,z) = (\rho_0\cos\theta, \rho_0\,\mathrm{sen}\,\theta, z)$, $\theta\in[\theta_1,\theta_2]$, $z\in[z_1,z_2]$

$= \rho_0\hat\rho + z\hat k$

Es parte del manto de un cilindro de radio ρ_0.

En este caso, $\hat n = \hat\rho$, y $\left(\frac{\partial\vec r}{\partial z}\times\frac{\partial\vec r}{\partial\theta}\right) = h_\theta h_z\hat\rho$
$= \rho_0\hat\rho$

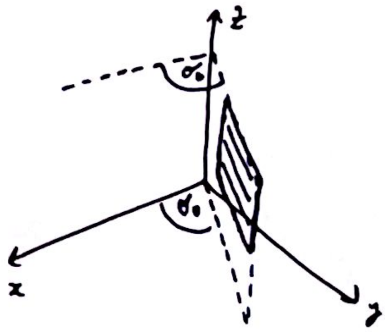


c) $\vec r(\rho,z) = (\rho\cos\theta_0, \rho\,\mathrm{sen}\,\theta_0, z)$, $\rho\in[\rho_1,\rho_2]$, $z\in[z_1,z_2]$

$= \rho\hat\rho(\theta_0) + z\hat k$

Es una superficie plana rectangular, en el plano donde $\theta=\theta_0$.

En este caso, $\hat n = \hat\theta$, y $\left(\frac{\partial\vec r}{\partial z}\times\frac{\partial\vec r}{\partial\rho}\right) = h_\rho h_z\hat\theta$
$= \hat\theta$

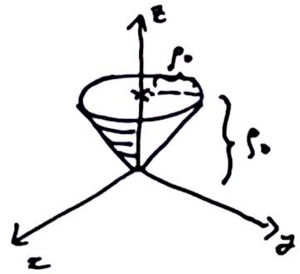


2.2.2 Otros casos: $\vec r(\rho,\theta) = \rho\hat\rho + f(\rho)\hat k$.

a) $\vec r(\rho,\theta) = (\rho\cos\theta, \rho\,\mathrm{sen}\,\theta, \rho)$, $\rho\in[0,\rho_0]$, $\theta\in[0,2\pi]$

$= \rho\hat\rho + \rho\hat k$

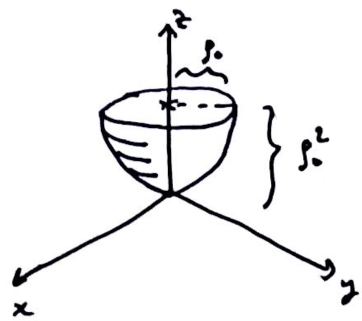
Es el manto de un cilindro.



b) $\vec r(\rho,\theta) = (\rho\cos\theta, \rho\,\mathrm{sen}\,\theta, \rho^2)$, $\rho\in[0,\rho_0]$, $\theta\in[0,2\pi]$

$= \rho\hat\rho + \rho^2\hat k$

Es el manto de un paraboloide.

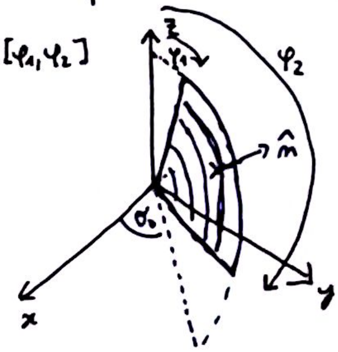


En estos casos,

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\vec r}{\partial\rho} &= \hat\rho + f'(\rho)\hat k\\ \frac{\partial\vec r}{\partial\theta} &= \rho\hat\theta\end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{\partial\vec r}{\partial\theta}\times\frac{\partial\vec r}{\partial\rho} = -\rho\hat k + f'(\rho)\hat\rho .$$

2.3. Usando coordenadas esféricas.

2.3.1. Cuando varían 2 parámetros independientemente, y el otro parámetro es constante.



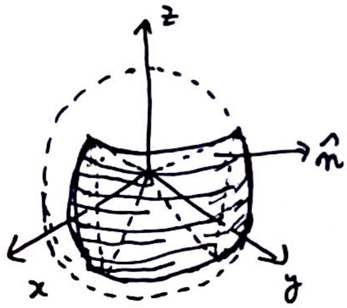
a) $\vec{r}(r,\varphi) = (r\cos\theta_0 \operatorname{sen}\varphi, r\operatorname{sen}\theta_0 \operatorname{sen}\varphi, r\cos\varphi)$, $r \in [0,R]$, $\varphi \in [\varphi_1, \varphi_2]$

$$= r\hat{r}(\varphi, \theta_0)$$

Es un sector circular de radio R, en el plano donde $\theta = \theta_0$

En este caso, $\hat{n} = \hat{\theta}$, y $\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial r} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi}\right) = h_r h_\varphi \hat{\theta}(\theta_0)$

$$= r\hat{\theta}(\theta_0)$$



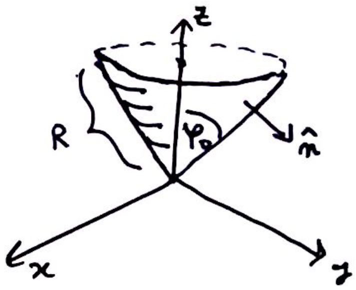
b) $\vec{r}(\varphi,\theta) = (R\cos\theta \operatorname{sen}\varphi, R\operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi, R\cos\varphi)$, $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$, $\varphi \in [\varphi_1, \varphi_2]$

$$= R\hat{r}$$

Es una superficie que está en el casquete de una esfera de radio R, con centro en $(0,0,0)$.

En este caso, $\hat{n} = \hat{r}$, y $\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta}\right) = h_\varphi h_\theta \hat{r}$

$$= R^2 \operatorname{sen}\varphi \, \hat{r}$$



c) $\vec{r}(r,\theta) = (r\cos\theta \operatorname{sen}\varphi_0, r\operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi_0, r\cos\varphi_0)$, $r \in [0,R]$, $\theta \in [0, 2\pi]$

$$= r\hat{r}(\varphi_0, \theta)$$

Es el manto de un cono, cuyo ángulo entre su eje de simetría y el manto es φ_0.

En este caso, $\hat{n} = \hat{\varphi}$, y $\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial r}\right) = h_r h_\theta \hat{\varphi}$

$$= r\operatorname{sen}(\varphi_0)\hat{\varphi}(\varphi_0, \theta).$$