

CONTROL III CÁLCULO AVANZADO, 2017/1

Profs. J. Dávila, M. del Pino, G. Montecinos

(1) (a) (3 ptos.) Calcule

$$\int_{|z|=r} \frac{e^z}{z(z-3)} dz$$

para $r > 0$, $r \neq 3$.

(b) (3 ptos.) Encuentre

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{2} - \cos(\theta)} d\theta.$$

(2) (a) (3 ptos.) Utilice las fórmulas de Cauchy para calcular

$$I = \oint_{\partial D(0,2)} \frac{e^z - 5z^2 + 2z + 1}{(z-3)(z-1)^2} dz.$$

(b) (3 ptos.) Para

$$f(z) = \frac{1}{\sin(\pi z)} \frac{z+1}{z-1}$$

encuentre la región donde es analítica, identifique singularidades aisladas y determine si se trata de polos. En caso de ser polos indique el orden y calcule el residuo (en todas las singularidades aisladas).

(3) (a) (1,5 ptos.) Considere la función

$$f(z) = \frac{z^2}{1+z^4}.$$

Encuentre los polos de $f(z)$ y sus respectivos residuos.

(b) (1,5 ptos.) Considere la curva Γ_R parametrizada por

$$\Gamma_R = \{x : 0 \leq x \leq R\} \cup \{Re^{i\theta} : 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\} \cup \{(R-x)i : 0 \leq x \leq R\},$$

con orientación positiva. Realice un bosquejo de la curva y los polos de $f(z)$. Calcule

$$\int_{\Gamma_R} f(z) dz.$$

(c) (3 ptos.) Utilice el ejercicio anterior y el teorema de los residuos para calcular

$$I = \int_0^\infty \frac{x^2}{1+x^4} dx.$$

CONTROL III CÁLCULO AVANZADO, 2017/1

Profs. J. Dávila, M. del Pino, G. Montecinos

Pregunta 1.

(a) (3 ptos.) Calcule

$$\int_{|z|=r} \frac{e^z}{z(z-3)} dz$$

para $r > 0$, $r \neq 3$.

(b) (3 ptos.) Encuentre

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{2} - \cos(\theta)} d\theta.$$

Solución.

(a) La función

$$f(z) = \frac{e^z}{z(z-3)}$$

es meromorfa en \mathbb{C} con polos en 0 y 3. Estos polos son simples porque

$$\lim_{z \rightarrow 0} z f(z) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^z}{z-3} = -\frac{1}{3}$$

$$\lim_{z \rightarrow 3} (z-3) f(z) = \lim_{z \rightarrow 3} \frac{e^z}{z} = \frac{e^3}{3}.$$

Como los polos son simples obtenemos además

$$Res(f, 0) = \lim_{z \rightarrow 0} z f(z) = -\frac{1}{3}$$

y

$$Res(f, 3) = \lim_{z \rightarrow 3} (z-3) f(z) = \frac{e^3}{3}.$$

Si $r \in (0, 3)$, por teorema de residuos

$$\int_{|z|=r} \frac{e^z}{z(z-3)} dz = 2\pi Res(f, 0) = -\frac{2\pi i}{3}.$$

Si $r > 3$

$$\begin{aligned} \int_{|z|=r} \frac{e^z}{z(z-3)} dz &= 2\pi(Res(f, 0) + Res(f, 3)) \\ &= -\frac{2\pi i}{3} + \frac{2\pi i e^3}{3}. \end{aligned}$$

Puntaje :

- 1.0 Identificar que la función es meromorfa y polos.
- 1.0 Separar en casos para r , para identificar qué polos están encerrados por la curva.
- 1.0 Uso del teorema de residuos o fórmula de Cauchy y resultado.

(b) Usando el cambio de variable $z = e^{i\theta}$, $\theta \in [0, 2\pi]$ obtenemos

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{2} - \cos(\theta)} \\ &= \oint_{\partial D(0,1)} \frac{dz}{iz(\sqrt{2} - \frac{z+z^{-1}}{2})} \\ &= 2i \oint_{\partial D(0,1)} \frac{dz}{(z - \sqrt{2} - 1)(z - \sqrt{2} + 1)} . \end{aligned}$$

Vemos que esta integral es de la forma

$$\oint_{\partial D(p,r)} \frac{f(z)}{(z - z_0)} dz = 2\pi i f(z_0) ,$$

donde $f(z) = \frac{2i}{(z - \sqrt{2} - 1)}$ y $z_0 = \sqrt{2} - 1$. Dado que $f(z)$ es holomorfa en todo $\mathbb{C} \setminus \{1 + \sqrt{2}\}$. Tenemos que

$$I = \oint_{\partial D(p,r)} \frac{2i}{(z - \sqrt{2} - 1)} \frac{dz}{(z - z_0)} = 2\pi i \frac{2i}{\sqrt{2} - 1 - \sqrt{2} - 1} = 2\pi .$$

Puntaje :

- 1.0 Uso correcto del cambio de variable.
- 1.0 Descomponer el denominador e identificar que raíz está dentro del círculo unitario.
- 1.0 Uso correcto de la fórmula de Cauchy.

Pregunta 2.

(a) (3 ptos.) Utilice las fórmulas de Cauchy para calcular

$$I = \oint_{\partial D(0,2)} \frac{e^2 - 5z^2 + 2z + 1}{(z-3)(z-1)^2} dz .$$

(b) (3 ptos.) Para

$$f(z) = \frac{1}{\sin(\pi z)} \frac{z+1}{z-1}$$

encuentre la región donde es analítica, identifique singularidades aisladas y determine si se trata de polos. En caso de ser polos indique el orden y calcule el residuo (en todas las singularidades aisladas).

Solución.

(a) De la fórmula integral de Cauchy

$$\oint_{\Gamma} \frac{p(z)}{(z-1)^2} dz = 2\pi i \frac{p'(1)}{1!} ,$$

donde $p(z) = \frac{e^2 - 5z^2 + 2z + 1}{(z-3)}$. Note que $(z-3)$ está dentro de la definición de $p(z)$ pues $z=3$ no está dentro del disco centrado en cero y radio 2. Así

$$p'(z) = \frac{(-10z+2)}{(z-3)^2} - \frac{(e^2 - 5z^2 + 2z + 1)}{(z-3)^2} .$$

Luego

$$I = 2\pi i \left(\frac{18 - e^2}{4} \right) .$$

Puntaje :

- 1.0 Identificar que $z=1$ está contenido en $|z|=1$ y que la función del numerador es holomorfa.
- 1.0 Uso correcto de las formulas de integración de Cauchy.
- 1.0 Concluir.

(b) Vemos que f es analítica en todo punto z tal que $\sin(\pi z) \neq 0$, es decir en $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$. Los puntos $k \in \mathbb{Z}$ son por lo tanto singularidades aisladas de f .

El punto $z=-1$ es una singularidad removible, ya que

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow -1} f(z) &= \lim_{z \rightarrow -1} \frac{1}{\sin(\pi z)} \frac{z+1}{z-1} \\ &= -\frac{1}{2} \lim_{z \rightarrow -1} \frac{z+1}{\sin(\pi z)} \\ &= -\frac{1}{2} \lim_{z \rightarrow -1} \frac{1}{\pi \cos(\pi z)} \\ &= \frac{1}{2\pi} . \end{aligned}$$

Veamos que $k \in \mathbb{Z}$, $k \neq -1$ es un polo. Partimos con $k \neq \pm 1$. Tenemos, usando el teorema de l'Hopital,

$$\begin{aligned}\lim_{z \rightarrow k} (z - k)f(z) &= \lim_{z \rightarrow k} (z - k) \frac{1}{\sin(\pi z)} \cdot \lim_{z \rightarrow k} (z - k) \frac{z + 1}{z - 1} \\ &= \lim_{z \rightarrow k} \frac{1}{\pi \cos(\pi z)} \cdot \frac{k + 1}{k - 1} \\ &= \frac{(-1)^k}{\pi} \cdot \frac{k + 1}{k - 1}.\end{aligned}$$

Como $k \in \mathbb{Z}$, $k \neq \pm 1$ es un polo simple, tenemos además

$$\text{Res}(f, k) = \lim_{z \rightarrow k} (z - k)f(z) = \frac{(-1)^k}{\pi} \cdot \frac{k + 1}{k - 1}.$$

Veamos que $k = 1$ es un polo doble. En efecto

$$\lim_{z \rightarrow k} (z - 1)f(z) = \lim_{z \rightarrow k} (z - 1) \frac{1}{\sin(\pi z)} \frac{z + 1}{z - 1}$$

no existe mientras que

$$\begin{aligned}\lim_{z \rightarrow 1} (z - 1)^2 f(z) &= \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1)^2 \frac{1}{\sin(\pi z)} \frac{z + 1}{z - 1} \\ &= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z - 1}{\sin(\pi z)} (z + 1) \\ &= 2 \lim_{z \rightarrow 1} \frac{1}{\pi \cos(\pi z)} \\ &= -\frac{2}{\pi}.\end{aligned}$$

Para calcular el residuo usamos la fórmula

$$\begin{aligned}\text{Res}(f, 1) &= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{d}{dz} ((z - 1)^2 f(z)) \\ &= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{d}{dz} \left(\frac{(z - 1)(z + 1)}{\sin(\pi z)} \right) \\ &= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{d}{dz} \frac{z^2 - 1}{\sin(\pi z)} \\ &= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{2z \sin(\pi z) - (z^2 - 1)\pi \cos(\pi z)}{\sin(\pi z)^2}\end{aligned}$$

Usamos la regla de l'Hopital:

$$\begin{aligned}&\lim_{z \rightarrow 1} \frac{2z \sin(\pi z) - (z^2 - 1)\pi \cos(\pi z)}{\sin(\pi z)^2} \\ &= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{2 \sin(\pi z) + 2\pi z \cos(\pi z) - 2\pi z \cos(\pi z) + (z^2 - 1)\pi^2 \sin(\pi z)}{2\pi \sin(\pi z) \cos(\pi z)} \\ &= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{2 + (z^2 - 1)\pi^2}{2\pi \cos(\pi z)} \\ &= -\frac{1}{\pi}.\end{aligned}$$

Puntaje :

- 1.0 Identificar correctamente las singularidades.

- 1.0 Determinar si son polos y de qué orden.
- 1.0 Calcular residuos.

Pregunta 3.

(a) (1,5 ptos.) Considere la función

$$f(z) = \frac{z^2}{1+z^4}.$$

Encuentre los polos de $f(z)$ y sus respectivos residuos.(b) (1,5 ptos.) Considere la curva Γ_R parametrizada por

$$\Gamma_R = \{x : 0 \leq x \leq R\} \cup \{Re^{i\theta} : 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\} \cup \{(R-x)i : 0 \leq x \leq R\},$$

con orientación positiva. Realice un bosquejo de la curva y los polos de $f(z)$. Calcule

$$\oint_{\Gamma_R} f(z) dz.$$

(c) (3 ptos.) Utilice el ejercicio anterior y el teorema de los residuos para calcular

$$I = \int_0^\infty \frac{x^2}{1+x^4} dx.$$

Solución.

(a) Note que este es un caso particular $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ donde $p(z)$ y $q(z)$ son los polinomios primos $p(z) = z^2$ y $q(z) = z^4 + 1$. De modo que los polos de $f(z)$ son las raíces simples de $q(z)$, que en este caso son todos los números complejos tales que $z^4 = -1$. Es decir, $e^{i\pi(1/4+k/2)}$, $k = 0, 1, 2, 3$ $z_0 = e^{i\pi/4}$, $z_1 = e^{i3\pi/4}$, $z_3 = e^{i5\pi/4}$ y $z_3 = e^{i7\pi/4}$.

Dado que cada polo z_k es de primer orden, de la formula de los residuos tenemos que

$$\lim_{z \rightarrow z_k} (z - z_k) \frac{p(z)}{q(z)} = \lim_{z \rightarrow z_k} p(z) \cdot \lim_{z \rightarrow z_k} \frac{(z - z_k)}{q(z)}.$$

Usando L'Hopital

$$\lim_{z \rightarrow z_k} (z - z_k) \frac{p(z)}{q(z)} = p(z_k) \cdot \lim_{z \rightarrow z_k} \frac{1}{4z^3} = \frac{p(z_k)}{4z_k^3} = \frac{e^{-i\pi \frac{(1+2k)}{4}}}{4}.$$

Puntaje :

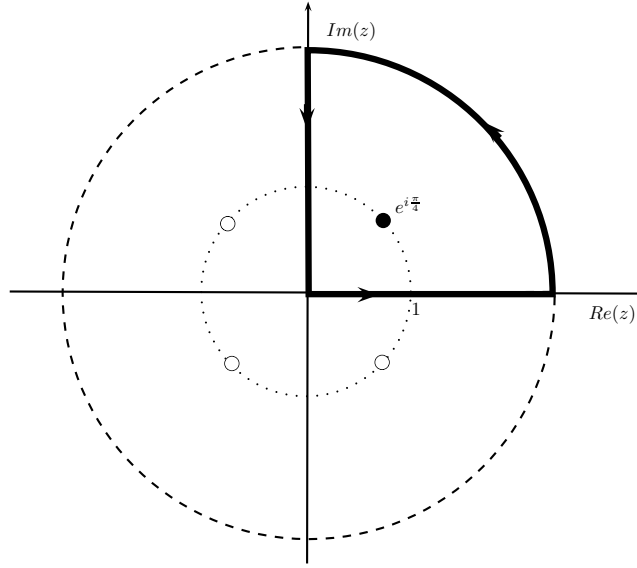
- 0.5 Encontrar los polos.
- 0.5 Usar la definición de los residuos.
- 0.5 Calcular los residuos.

(b) Un bosquejo de la curva y de los polos de $f(z)$ debe ser de la forma de la figura 1. Vemos que $f(z)$ es meromorfa, además Γ_R sólo encierra el polo $z_0 = e^{i\pi/4}$. Luego del teorema de los residuos

$$\oint_{\Gamma_R} f(z) dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, z_0) = \pi i \frac{e^{-i\pi/4}}{2} = \pi i \frac{\sqrt{2}}{4} (1 - i) = \pi \frac{\sqrt{2}}{4} (i + 1),$$

Puntaje :

- 0.5 Dibujar el bosquejo de la curva e identificar los residuos.
- 0.5 Ver que solo un punto critico esta encerrada por la curva Γ_R .
- 0.5 Usar el teorema de los residuos.

FIGURE 1. Bosquejo de Γ_R y los polos de $f(z) = z^2/(1+z^4)$.

(c) Del ejercicio anterior

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma_R} f(z)dz &= 2\pi i \operatorname{Res}(f, z_0) = \pi i \frac{e^{-i\pi/4}}{2} = \pi i \frac{\sqrt{2}}{4}(1-i) = \pi \frac{\sqrt{2}}{4}(i+1) \\ &= \int_0^R \frac{x^2}{1+x^4}dx + \int_0^{\pi/2} \frac{R^2 e^{2i\theta}}{1+R^4 e^{4i\theta}} Rie^\theta d\theta - \int_0^R \frac{x^2 e^{i\pi}}{1+x^4 e^{i2\pi}} e^{i\pi/2} dx. \end{aligned}$$

Note que

$$\frac{x^2 e^{i\pi}}{1+x^4 e^{i2\pi}} e^{i\pi/2} = -i \frac{x^2}{1+x^4},$$

así

$$\pi \frac{\sqrt{2}}{4}(i+1) = (1+i) \int_0^R \frac{x^2}{1+x^4}dx + \int_0^{\pi/2} \frac{R^2 e^{2i\theta}}{1+R^4 e^{4i\theta}} Rie^{i\theta} d\theta$$

Note que

$$\begin{aligned} \left| \int_0^{\pi/2} \frac{R^2 e^{2i\theta}}{1+R^4 e^{4i\theta}} Rie^{i\theta} d\theta \right| &= \left| \int_0^{\pi/2} \frac{R^2 e^{2i\theta}}{(1+R^4 \cos(4\theta) + iR^4 \sin(4\theta))} Rie^{i\theta} d\theta \right| = \\ &= \left| \int_0^{\pi/2} \frac{R^2 e^{2i\theta} (1+R^4 \cos(4\theta) - iR^4 \sin(4\theta))}{(1+R^4 \cos(4\theta))^2 + R^8 \sin^2(4\theta)} Rie^{i\theta} d\theta \right| \\ \frac{1}{R^3} \left| \int_0^{\pi/2} \frac{R^{-2} e^{2i\theta} (R^{-4} + e^{-4i\theta})}{(R^{-8} + 2R^{-4} \cos(4i\theta) + 1)} ie^{i\theta} d\theta \right| &\leq \frac{M\pi}{2R^3(R^{-8} - 2R^{-4} + 1)} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

para $R \rightarrow \infty$, donde $M = R^{-2}|R^{-4} + 1|$. Así tomando límite $R \rightarrow \infty$ tenemos

$$(1+i) \int_0^\infty \frac{x^2}{1+x^4}dx = \pi \frac{\sqrt{2}}{4}(i+1)$$

Así

$$\int_0^\infty \frac{x^2}{1+x^4} dx = \pi \frac{\sqrt{2}}{4} .$$

Puntaje :

- 1.0 Uso correcto del cambio de variable.
- 1.0 Uso correcto del teorema de los residuos y descomponer las integrales.
- 1.0 Obtener correctamente las integrales sobre las curvas.