

MA2002. Cálculo Avanzado y Aplicaciones. Verano 2014.

Profesor de Cátedra: Álvaro Hernández

Profesor Auxiliar: Camilo Gómez Araya.



Pauta P1 C3

Denotamos por \mathcal{F} y \mathcal{F}^{-1} a las transformadas y antittransformadas de Fourier. Además por I denotamos al operador identidad, es decir, $I(f) = f$ para toda función f y por \mathcal{P} denotamos al operador paridad, es decir, $\mathcal{P}(f) = f(-s)$ para toda función f .

1. (3 puntos) Muestre que

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^2 f &= \mathcal{P} f \\ \mathcal{F}^3 f &= \mathcal{F}^{-1} f \\ \mathcal{F}^4 f &= I f\end{aligned}$$

Solución:

- (1.5 puntos) $\mathcal{F}^2 f = \mathcal{P} f$.

Notemos que debemos probar que $\forall s \in \mathbb{R}, \mathcal{F}^2(f)(s) = \mathcal{P}(f)(s)$.

Entonces, sea $s \in \mathbb{R}$ arbitrario;

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^2(f)(s) &= \mathcal{F}(\mathcal{F}(f))(s) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-isw} \mathcal{F}(f)(w) dw && \text{Def. de Transformada} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(-s)w} \mathcal{F}(f)(w) dw && \text{Asociando convenientemente} \\ &= \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f))(-s) && \text{Identificando Antittransformada} \\ &= f(-s) && \text{Teo. de Inversión} \\ &= \mathcal{P}(f)(s) && \text{Def. Operador Paridad}\end{aligned}$$

De donde se concluye, $\mathcal{F}^2 f = \mathcal{P} f$.

- (1 punto) $\mathcal{F}^3 f = \mathcal{F}^{-1} f$.

Debemos probar que $\mathcal{F}^3(f)(s) = \mathcal{F}^{-1}(f)(s), \quad \forall s \in \mathbb{R}$.

En efecto, sea $s \in \mathbb{R}$ arbitrario;

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^3(f)(s) &= \mathcal{F}(\mathcal{F}^2(f))(s) = \mathcal{F}(\mathcal{P}(f))(s) && \text{Parte Anterior} \\ &= \mathcal{F}(f(-w))(s) && \text{Def. Operador Paridad} \\ &= \mathcal{F}(f(w))(-s) && \text{Inversión del Espacio (Tiempo)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(-s)w} f(w) dw && \text{Def. Transformada} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{isw} f(w) dw \\ &= \mathcal{F}^{-1}(f)(s) && \text{Def. Antittransformada}\end{aligned}$$

De donde se concluya, $\mathcal{F}^3 f = \mathcal{F}^{-1} f$.

- (0.5 punto) $\mathcal{F}^4 f = I f$.

Análogamente a los casos anteriores, debemos probar que $\forall s \in \mathbb{R}$, $\mathcal{F}^4(f)(s) = I(f)(s)$. En efecto, dado $s \in \mathbb{R}$ arbitrario:

$$\mathcal{F}^4(f)(s) = \mathcal{F}(\mathcal{F}^3(f))(s) = \mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}(f))(s) = f(s) = I(f)(s)$$

Donde se usó la parte anterior, el Teo. de Inversión y la def. del operador Identidad.

2. (1 punto) Sea f una función y considere $g = f + \mathcal{F}f + \mathcal{F}^2 f + \mathcal{F}^3 f$. Muestre que $\mathcal{F}g = g$. Note que esto dice que g es una función propia con valor propia 1 de la transformada de Fourier.

Solución: En efecto,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}g &= \mathcal{F}(f + \mathcal{F}f + \mathcal{F}^2 f + \mathcal{F}^3 f) \\ &= \mathcal{F}f + \mathcal{F}(\mathcal{F}f) + \mathcal{F}(\mathcal{F}^2 f) + \mathcal{F}(\mathcal{F}^3 f) && \text{Linealidad de } \mathcal{F}(\cdot) \\ &= \mathcal{F}f + \mathcal{F}^2 f + \mathcal{F}^3 f + \underbrace{\mathcal{F}^4 f}_f \\ &= f + \mathcal{F}f + \mathcal{F}^2 f + \mathcal{F}^3 f = g && \text{Parte Anterior y def. de } g \end{aligned}$$

■

3. (2 puntos) Muestre que f es par ssi $\mathcal{F}f$ es par.

Solución: Debemos probar una doble implicancia:

- \implies Supongamos que f es par, es decir, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = f(-x)$. Aplicando la transformada de Fourier a la igualdad, obtenemos $\mathcal{F}(f(x))(s) = \mathcal{F}(f(-x))(s)$ y de la fórmula de inversión del espacio (tiempo) $\mathcal{F}(f(-x))(s) = \mathcal{F}(f(x))(-s)$, y se sigue que $\mathcal{F}(f)(s) = \mathcal{F}(f)(-s)$, $\forall s \in \mathbb{R}$, es decir, $\mathcal{F}f$ es par.
- \impliedby Supongamos que $\mathcal{F}f$ es par, es decir, $\mathcal{F}(f)(s) = \mathcal{F}(f)(-s)$, $\forall s \in \mathbb{R}$, y nuevamente por la fórmula de inversión del espacio (tiempo) tenemos que $\mathcal{F}(f)(-s) = \mathcal{F}(\mathcal{P}(f))(s)$, luego $\mathcal{F}(f)(s) = \mathcal{F}(\mathcal{P}(f))(s)$. Por lo tanto, aplicando antitransformada a esta igualdad y usando el Teo. de Inversión, se obtiene que $f = \mathcal{P}(f)$, es decir, f es una función par.

■

MA2002. Cálculo Avanzado y Aplicaciones. Verano 2014.**Profesor de Cátedra:** Álvaro Hernández**Profesor Auxiliar:** Camilo Gómez Araya.

Pauta P2 C3

Pregunta 2 Resuelva la siguiente EDP:

$$u_{tt} = \alpha^2 u_{xx} - \beta u, \quad 0 < x < 1, t > 0$$

(α, β constantes positivas) con condiciones de borde

$$u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad t \geq 0$$

y condiciones iniciales

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= 1 - x & 0 \leq x \leq 1, \\ u_t(x, 0) &= 0 & 0 \leq x \leq 1. \end{aligned}$$

Indicación: tenga cuidado con el intervalo de definición.

Solución: Por separación de variables, busquemos soluciones no triviales de la forma

$$u(x, t) = X(x)T(t)$$

de modo que la EDP se traduce a

$$T''X = \alpha^2 X''T - \beta XT$$

y suponiendo que ambas funciones son distintas de cero (con que lo sean en un punto basta, por continuidad) podemos dividir y escribir la ecuación de la siguiente manera

$$\frac{T''}{T} + \beta = \frac{\alpha^2 X''}{X} = \lambda$$

De modo que obtenemos las EDO siguientes

$$\begin{aligned} X'' + \left(\frac{-\lambda}{\alpha^2}\right)X &= 0 \\ T'' + (\beta - \lambda)T &= 0 \end{aligned}$$

La solución de la primera está dada por

$$X(x) = A \sin\left(\sqrt{\frac{-\lambda}{\alpha^2}}x\right) + B \cos\left(\sqrt{\frac{-\lambda}{\alpha^2}}x\right)$$

Analizando las condiciones de borde obtenemos...

$$\begin{aligned} u(0, t) &= X(0)T(t) = 0 \Rightarrow X(0) = 0 \\ u(1, t) &= X(1)T(t) = 0 \Rightarrow X(1) = 0 \end{aligned}$$

puesto que $T(t)$ no es trivial. $X(0) = B = 0 \Rightarrow B = 0$, y

$$X(1) = A \sin\left(\sqrt{\frac{-\lambda}{\alpha^2}}\right) = 0 \Rightarrow \sqrt{\frac{-\lambda}{\alpha^2}} = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

ya que si $A = 0$ obtendríamos que $X(x)$ es trivial. Así,

$$\sqrt{\frac{-\lambda}{\alpha^2}} = k\pi \Leftrightarrow \frac{\lambda}{\alpha^2} = -(k\pi)^2.$$

En la segunda EDO tenemos

$$T'' + (\beta - \lambda) = 0,$$

de modo que si queremos soluciones acotadas debemos imponer $\beta - \lambda > 0$. Llamando a $\beta - \lambda = \omega_k^2$ tenemos que las soluciones están dadas por

$$T_k = A_k \sin \omega_k t + B_k \cos \omega_k t.$$

Reconstruyendo la solución total, y aplicando principio de superposición obtenemos

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sin k\pi x [a_k \sin \omega_k t + b_k \cos \omega_k t].$$

Imponemos condiciones iniciales...

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin k\pi x = 1 - x \leftarrow \text{expansión impar de } 1 - x$$

de modo que los b_k corresponden a los coeficientes de fourier de la expansión impar de $1 - x$. Así

$$\begin{aligned} b_k &= 2 \int_0^1 (1-x) \sin k\pi x \, dx; && \text{por partes, con } u = 1-x, \, dv = \sin k\pi x \, dx... \\ &= 2 \left(\frac{-\cos k\pi x}{k\pi} (1-x) \Big|_0^1 - \frac{1}{k\pi} \int_0^1 \cos k\pi x \, dx \right) \\ &= 2 \left(\frac{1}{k\pi} - \frac{1}{k\pi} \left(\frac{\sin k\pi x}{k\pi} \right) \Big|_0^1 \right) \\ &= \frac{2}{k\pi} \end{aligned}$$

$$u_t(x, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \omega_k \sin k\pi x = 0,$$

luego $a_k \omega_k$ son los coeficientes de fourier de la función cero, y son todos cero. Así la solución final queda expresada por:

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k\pi} \sin k\pi x \cos \omega_k t.$$