

**CONTROL 3****MA2002: CÁLCULO AVANZADO Y APLICACIONES**

DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS, UNIVERSIDAD DE CHILE

**P1).**

a) (2 pts.) Calcule

$$\int_C \frac{1}{\sin(z)^2} dz$$

donde  $C$  es la circunferencia de centro 0 y radio 1 con orientación positiva.

b) (4 pts.) Calcule

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos(t)}{2 - \cos(t)} dt.$$

**P2).**

a) (4 pts.) Calcule

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^4} dx.$$

b) (2 pts.) Sea  $D \subset \mathbb{C}$  el disco abierto de centro 0 y radio 1. Sea  $f : D \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$  analítica y suponga que 0 es un polo simple de  $f$ . Verifique que 0 es polo de  $g(z) = f(z^2)$ , determine su orden, y pruebe que

$$\text{Res}(g, 0) = 0.$$

**P3).** Considere la ecuación

$$iu_t = u_{xx}, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0$$

donde  $u = u(x, t) \in \mathbb{C}$ , con condición de borde

$$u_x(0, t) = u_x(\pi, t) = 0, \quad t > 0$$

y condición inicial

$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 < x < \pi.$$

a) (4 pts.) Usando el método de separación de variables encuentre una solución de este problema.

b) (2 pts.) Para la función  $f(x) = x^2$  encuentre explícitamente la solución del problema anterior.

**PAUTA CONTROL 3**  
**MA2002: CÁLCULO AVANZADO Y APLICACIONES**  
 DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA  
 FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS, UNIVERSIDAD DE CHILE

**P1).**

a) (2 ptos.) Calcule

$$\int_C \frac{1}{\sin(z)^2} dz$$

donde  $C$  es la circunferencia de centro 0 y radio 1 con orientación positiva.

b) (4 ptos.) Calcule

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos(t)}{2 - \cos(t)} dt.$$

**Solución.**

a) Para calcular la integral

$$\int_C f(z) dz, \quad f(z) = \frac{1}{\sin(z)^2}$$

usamos el teorema de los residuos. Observamos que  $f$  es meromorfa en  $\mathbb{C}$  con polos en los puntos  $z_k = k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , pues estos son los únicos puntos donde  $\sin(z) = 0$ . Todos estos puntos son además polos de orden 2, porque usando la regla de l'Hopital,

indicar puntos en los cuales se anula  $\sin(z)$ : 0,3

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow k\pi} (z - k\pi)^2 f(z) &= \lim_{z \rightarrow k\pi} \frac{(z - k\pi)^2}{\sin(z)^2} \\ &= \lim_{z \rightarrow k\pi} \frac{2(z - k\pi)}{2 \sin(z) \cos(z)} \\ &= \lim_{z \rightarrow k\pi} \frac{1}{\cos^2(z) - \sin(z)^2} \\ &= 1 \end{aligned}$$

existe y es no nulo.

Para aplicar el teorema de los residuos notamos que la curva  $C$  solo encierra al polo  $z_0 = 0$ . Por lo tanto

$z_0 = 0$  es polo de orden 2 (cálculo del límite): 0,3

$$\int_C f(z) dz = 2\pi i \text{Res}(f, 0).$$

Como 0 es un polo de orden 2 podemos calcular el residuo usando la fórmula

uso correcto de teorema de residuos: 0,2

$$\text{Res}(f, 0) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d}{dz} (z^2 f(z))$$

fórmula de residuos en caso de polos: 0,4

$$\begin{aligned} &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d}{dz} \left( \frac{z^2}{\sin(z)^2} \right) \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{2z \sin(z)^2 - z^2 2 \sin(z) \cos(z)}{\sin(z)^4} \end{aligned}$$

derivar: 0,3

$$\begin{aligned}
&= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{2z \sin(z) - z^2 2 \cos(z)}{\sin(z)^3} \\
&= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{2z \sin(z) - z^2 2 \cos(z)}{z^3}
\end{aligned}$$

donde en la última línea hemos usado que

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin(z)}{z} = 0.$$

Continuando,

$$\begin{aligned}
\text{Res}(f, 0) &= 2 \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin(z) - z \cos(z)}{z^2} \\
&= 2 \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\cos(z) - \cos(z) - z \sin(z)}{2z} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

calcular límite: 0,3

Así

$$\int_C \frac{1}{\sin(z)^2} dz = 0.$$

resultado: 0,2

b) Sustituimos  $z = e^{it}$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ . Entonces

$$\cos(t) = \frac{z + z^{-1}}{2}, \quad dt = \frac{dz}{iz}$$

y por lo tanto

fórmulas de cambio de variable:

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos(t)}{2 - \cos(t)} dt = -i \int_{|z|=1} \frac{\frac{z+z^{-1}}{2}}{2 - \frac{z+z^{-1}}{2}} \frac{dz}{z}$$

0,7

donde la circunferencia  $|z| = 1$  se recorre con orientación positiva. Simplificando la expresión anterior queda

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos(t)}{2 - \cos(t)} dt = i \int_{|z|=1} \frac{z^2 + 1}{z(z^2 - 4z + 1)} dz.$$

La función

integral transformada: 0,7

$$f(z) = \frac{z^2 + 1}{z(z^2 - 4z + 1)}$$

está bien definida en  $\mathbb{C}$  excepto 0 y las raíces de  $z^2 - 4z + 1$  que vienen dadas por

$$z_1 = 2 - \sqrt{3}, \quad z_2 = 2 + \sqrt{3}.$$

Fuera de estos puntos  $f$  es analítica y estos tres puntos son polos de orden uno, que se ve de la expresión

$$f(z) = \frac{z^2 + 1}{z(z - z_1)(z - z_2)}.$$

De estos 3 puntos 0 y  $z_1$  están encerrados por la curva  $|z| = 1$ . Por el teorema de los residuos

análisis de la función (polos, órdenes): 0,7

$$\int_{|z|=1} f(z) dz = 2\pi i (\text{Res}(f, 0) + \text{Res}(f, z_1)).$$

Calculamos

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}(f, 0) &= \lim_{z \rightarrow 0} z f(z) \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z^2 + 1}{(z - z_1)(z - z_2)} \\ &= \frac{1}{z_1 z_2}\end{aligned}$$

y

residuo en 0: 0,6

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}(f, z_1) &= \lim_{z \rightarrow z_1} (z - z_1) f(z) \\ &= \lim_{z \rightarrow z_1} \frac{z^2 + 1}{z(z - z_2)} \\ &= \frac{z_1^2 + 1}{z_1(z_1 - z_2)}.\end{aligned}$$

residuo en  $z_1$ : 0,6

Pero  $z_1 z_2 = 1$  y encontramos

$$\int_{|z|=1} f(z) dz = 2\pi i \left(1 + \frac{z_1^2 + 1}{z_1(z_1 - z_2)}\right)$$

y por lo tanto

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos(t)}{2 - \cos(t)} dt = -2\pi \left(1 + \frac{z_1^2 + 1}{z_1(z_1 - z_2)}\right).$$

resultado: 0,7

Pero usando las fórmulas explícitas vemos que

$$\begin{aligned}\frac{z_1^2 + 1}{z_1(z_1 - z_2)} &= \frac{z_1^2 + 1}{z_1^2 - 1} = \frac{(2 - \sqrt{3})^2 + 1}{(2 - \sqrt{3})^2 - 1} \\ &= \dots = -2\frac{\sqrt{3}}{3}.\end{aligned}$$

Reemplazando

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \frac{\cos(t)}{2 - \cos(t)} dt &= -2\pi \left(1 - 2\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \\ &= -2\pi + 4\pi \frac{\sqrt{3}}{3}.\end{aligned}$$

No es necesario llegar a la expresión simplificada para la integral para tener puntaje completo.

**P2).**

a) (4 ptos.) Calcule

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^4} dx.$$

b) (2 ptos.) Sea  $D \subset \mathbb{C}$  el disco abierto de centro 0 y radio 1. Sea  $f : D \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$  analítica y suponga que 0 es un polo simple de  $f$ . Verifique que 0 es polo de  $g(z) = f(z^2)$ , determine su orden, y pruebe que

$$\text{Res}(g, 0) = 0.$$

**Solución.** Utilizamos un resultado visto en clases que dice que si  $f$  es meromorfa en  $\mathbb{C}$ , sin polos reales, y que satisface

$$|f(z)| \leq \frac{C}{|z|^p}$$

para  $|z|$  suficientemente grande y constantes  $C > 0$ ,  $p > 1$ , entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_{j=1}^k \text{Res}(f, z_j)$$

donde  $z_1, \dots, z_k$  son los polos de  $f$  con parte imaginaria positiva.  
La función

Mencionar este teorema: 0,5

$$f(z) = \frac{z^2}{1+z^4}$$

estas condiciones con  $p = 2$ . Tiene polos en las raíces de  $z^4 + 1$  que vienen dadas por

elegir la función: 0,2

$$z_0 = e^{i\frac{\pi}{4}}, \quad z_1 = e^{i\frac{3\pi}{4}}, \quad z_2 = e^{i\frac{5\pi}{4}}, \quad z_3 = e^{i\frac{7\pi}{4}}.$$

Podemos escribir

$$f(z) = \frac{z^2}{(z-z_0)(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)}$$

y vemos  $z_0, \dots, z_3$  son polos simples. Los polos que tienen parte real positiva son  $z_0$  y  $z_1$ . Deducimos que

encontrar polos y mencionar el orden: 0,8

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^4} dx = 2\pi i (\text{Res}(f, z_0) + \text{Res}(f, z_1)).$$

Identificar los que sirven: 0,5

Calculamos

$$\begin{aligned} \text{Res}(f, z_0) &= \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z) \\ &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{z^2}{(z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)} \\ &= \frac{z_0^2}{(z_0 - z_1)(z_0 - z_2)(z_0 - z_3)}. \end{aligned}$$

Similarmente

residuo en  $z_0$ : 0,7

$$\text{Res}(f, z_1) = \frac{z_1^2}{(z_1 - z_0)(z_1 - z_2)(z_1 - z_3)}.$$

Con esto podemos expresar

residuo en  $z_1$ : 0,7

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^4} dx = 2\pi i \left( \frac{z_0^2}{(z_0-z_1)(z_0-z_2)(z_0-z_3)} + \frac{z_1^2}{(z_1-z_0)(z_1-z_2)(z_1-z_3)} \right).$$

Podemos simplificar esta expresión

expresión para la integral: 0,6

$$\begin{aligned} & \frac{z_0^2}{(z_0-z_1)(z_0-z_2)(z_0-z_3)} + \frac{z_1^2}{(z_1-z_0)(z_1-z_2)(z_1-z_3)} \\ &= \frac{1}{z_0-z_1} \left( \frac{z_0^2}{(z_0-z_2)(z_0-z_3)} - \frac{z_1^2}{(z_1-z_2)(z_1-z_3)} \right) \\ &= \frac{1}{z_0-z_1} \left( \frac{e^{i\frac{\pi}{2}}}{(e^{i\frac{\pi}{4}}-e^{i\frac{5\pi}{4}})(e^{i\frac{\pi}{4}}-e^{i\frac{7\pi}{4}})} - \frac{e^{i\frac{3\pi}{2}}}{(e^{i\frac{3\pi}{4}}-e^{i\frac{5\pi}{4}})(e^{i\frac{3\pi}{4}}-e^{i\frac{7\pi}{4}})} \right) \\ &= \frac{1}{z_0-z_1} \left( \frac{1}{(1-(-1))(1+i)} - \frac{1}{(1-i)(1-(-1))} \right) \\ &= \frac{1}{e^{i\frac{\pi}{4}}-e^{i\frac{3\pi}{4}}} \frac{1}{2} \left( \frac{1}{(1+i)} - \frac{1}{(1-i)} \right) \\ &= -\frac{i\sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

Así

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^4} dx = \frac{\sqrt{2}}{2} \pi.$$

b) Como  $f$  tiene un polo simple en 0, sabemos que

$$\lim_{w \rightarrow 0} wf(w) = L$$

existe y es no nulo. Tenemos  $g(z) = f(z^2)$ . Entonces

$$\lim_{z \rightarrow 0} z^2 g(z) = \lim_{z \rightarrow 0} z^2 f(z^2)$$

y cambiando variables,  $w = z^2$ , deducimos que

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow 0} z^2 g(z) &= \lim_{z \rightarrow 0} z^2 f(z^2) \\ &= L \end{aligned}$$

existe y es no nulo.

Esto prueba que 0 es un polo de  $g$  de orden 2.

La función  $h(z) = zf(z)$  tiene un singularidad removible en 0, porque

justificar que es polo de orden 2:

$$\lim_{z \rightarrow 0} h(z) = L.$$

0,6

Luego se puede considerar  $h$  como una función analítica en el disco  $D$  con  $h(0) = L$ . Entonces

$$g(z) = \frac{h(z^2)}{z^2}$$

definir  $h$  y justificar singularidad reparable: 0,7

y calculamos

$$\begin{aligned} \text{Res}(g, 0) &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d}{dz} (z^2 g(z)) \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d}{dz} h(z^2) \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} h'(z^2) 2z \\ &= 0. \end{aligned}$$

Otra forma de argumentar es la siguiente. Como  $h$  es analítica en  $D$  podemos representar  $h$  como serie de potencias

$$h(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \quad |z| < R$$

para algún  $R > 0$ . De esto deducimos

$$f(z) = \frac{h(z)}{z} = \frac{a_0}{z} + \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+1} z^k$$

y encontramos

$$g(z) = f(z^2) = \frac{a_0}{z^2} + \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+1} z^{2k} \quad |z| < R.$$

La serie de potencias es analítica en el disco de radio  $R$ . Como no hay un término de la forma  $1/z$  en esta expresión deducimos que el residuo es 0.

**P3).** Considere la ecuación

$$iu_t = u_{xx}, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0$$

donde  $u = u(x, t) \in \mathbb{C}$ , con condición de borde

$$u_x(0, t) = u_x(\pi, t) = 0, \quad t > 0$$

y condición inicial

$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 < x < \pi.$$

- a) (4 ptos.) Usando el método de separación de variables encuentre una solución de este problema.
- b) (2 ptos.) Para la función  $f(x) = x^2$  encuentre explícitamente la solución del problema anterior.

### Solución.

Buscamos soluciones que separen variables

$$u(x, t) = F(x)G(t).$$

La ecuación para una función de esta forma que

$$iF(x)G'(t) = F''(x)G(t).$$

plantear separación de variables:

0,3

Suponiendo que  $F$  ni  $G$  se anulan

ecuación transformada:

0,3

$$i \frac{G'(t)}{G(t)} = \frac{F''(x)}{F(x)} = \lambda$$

donde  $\lambda$  es independiente de  $x, t$ .

reducción a EDOs:

0,3

Resolvemos la ecuación

$$F'' = \lambda F.$$

Como  $u$  satisface la condición de borde

$$u_x(0, t) = u_x(\pi, t) = 0, \quad t > 0$$

es natural pedir que

$$F'(0) = F'(\pi) = 0.$$

Dependiendo de  $\lambda$  tenemos los siguientes casos.

Si  $\lambda > 0$ , la solución general viene dada por

$$F(x) = c_1 e^{\sqrt{\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda}x}.$$

La condiciones de borde se traducen en

$$\begin{aligned} c_1 - c_2 &= 0 \\ c_1 e^{\sqrt{\lambda}\pi} - c_2 e^{-\sqrt{\lambda}\pi} &= 0 \end{aligned}$$

Este sistema tiene solución única  $c_1 = c_2 = 0$ , lo que conduce a  $F(x) \equiv 0$ .

caso  $\lambda > 0$ :

0,4

Si  $\lambda = 0$ , la solución general es

$$F(x) = c_1 + c_2 x.$$

La única forma de que cumplan las condiciones de borde es que  $c_2 = 0$  y encontramos una solución  $F(x) = c_1$ .

caso  $\lambda = 0$ :

0,4



Si  $\lambda < 0$ , escribamos  $\lambda = -\omega^2$  con  $\omega > 0$  y así la solución general es

$$F(x) = c_1 \cos(\omega x) + c_2 \sin(\omega x).$$

Imponiendo  $F'(0) = 0$  vemos que  $c_2 = 0$ . Imponiendo  $F'(\pi) = 0$  obtenemos

$$c_1 \sin(\omega \pi) = 0.$$

Para encontrar soluciones no triviales pedimos entonces que  $\omega \in \mathbb{Z}$ . Recordemos además que  $\omega > 0$ .

De los casos anteriores hemos encontrados soluciones no triviales  $F$  de  $F'' = \lambda F$  de la forma

$$F_k(x) = \cos(kx)$$

con  $k \in \mathbb{N}$  asociadas al valor  $\lambda_k = -k^2$ .

Resolvemos ahora la ecuación

$$iG'(t) = \lambda G$$

y encontramos

$$G(t) = e^{-i\lambda t} G(0).$$

Así hemos encontrado una familia de funciones

$$u_k(x, t) = a_k e^{ik^2 t} \cos(kx)$$

que satisfacen la ecuación y las condiciones de borde.

Suponiendo que  $a_k$  decae rápido a 0 cuando  $k \rightarrow \infty$ ,

$$u(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k e^{ik^2 t} \cos(kx) \quad (0.1)$$

satisface la ecuación y las condiciones de borde.

Los coeficientes  $a_k$  los determinamos para que  $u$  cumpla la condición inicial.

Para esto necesitamos

$$f(x) = u(x, 0) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos(kx).$$

Es clásico que usando una extensión par y luego  $2\pi$  periódica de la función  $f$ , obtenemos

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos(kx).$$

con

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos(kx) dx, \quad k \geq 0.$$

En síntesis hemos encontrado una solución  $u(x, t)$  dada por (??) con los coeficientes  $a_k$  dados por la expresión anterior.

b) Para el caso de  $f(x) = x^2$  calculamos

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \cos(kx) dx.$$

En particular

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 dx = \frac{2}{3} \pi^2.$$

caso  $\lambda < 0$ : 0,4

forma de  $\lambda$ : 0,3

solución EDO en  $t$ : 0,3

familia de soluciones: 0,3

superposición: 0,3

condiciones sobre coeficientes: 0,3

fórmula para los coeficientes: 0,4

$a_0$ : 0,5

Para  $k \geq 1$  integramos por partes:

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x^2 \cos(kx) dx \\ &= \frac{2}{\pi} \left[ \frac{\sin(kx)}{k} x^2 \Big|_0^\pi - \frac{2}{k} \int_0^\pi x \sin(kx) dx \right] \\ &= -\frac{4}{k\pi} \int_0^\pi x \sin(kx) dx \end{aligned}$$

integración por partes: 0,5

$$= -\frac{4}{k\pi} \left[ -\frac{\cos(kx)}{k} x \Big|_0^\pi + \frac{1}{k} \int_0^\pi \cos(kx) dx \right]$$

integración por partes: 0,5

$$\begin{aligned} &= -\frac{4}{k\pi} \left[ -\frac{\pi \cos(k\pi)}{k} + \frac{1}{k^2} \sin(kx) \Big|_0^\pi \right] \\ &= \frac{4(-1)^k}{k^2} \end{aligned}$$

resultado: 0,5