MA26B Matemáticas Aplicadas
Solución Control 2 - Semestre 2005-2

Profs.: Carlos Conca R.
Jorge San Martín H.

Problema 1.

a) Tenemos el campo vectorial en $\mathbb{R}^3$ definido en coordenadas cilíndricas por la ecuación

$$\vec{F} = \frac{1}{\rho}\hat{\theta} + z\hat{k}.$$

i) En coordenadas cilíndricas se tiene que $h_\rho = 1$, $h_\theta = \rho$ y $h_z = z$, por lo tanto

$$\begin{aligned}
\operatorname{rot}\left(\vec{F}\right) &= \frac{1}{\rho}\det\begin{pmatrix} \hat{\rho} & \rho\hat{\theta} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial\rho} & \frac{\partial}{\partial\theta} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_\rho & F_\theta\rho & F_z \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\rho}\det\begin{pmatrix} \hat{\rho} & \rho\hat{\theta} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial\rho} & \frac{\partial}{\partial\theta} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 1 & z \end{pmatrix} = \frac{1}{\rho}\begin{pmatrix} \frac{\partial z}{\partial\theta} - \frac{\partial 1}{\partial z} \\ \rho\left(\frac{\partial 0}{\partial z} - \frac{\partial z}{\partial\rho}\right) \\ \frac{\partial 1}{\partial\rho} - \frac{\partial 0}{\partial\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

ii) La curva es una circunferencia contenida en el plano horizontal $z = 1$ de centro $(0,0,1)$ y radio 1. Por lo tanto su parametrización es $\vec{r} = (\cos\theta, \sin\theta, 1)$ con $\theta \in [0, 2\pi]$.
El vector derivada es $\dot{\vec{r}} = \hat{\theta}$.
Por lo tanto $\vec{F}\cdot\dot{\vec{r}} = 1$ y la integral pedida vale 2π.
Este resultado podría parecer que contradice al teorema de Stokes, sin embargo, no es así, ya que la función no es derivable en el eje vertical $\rho = 0$.

b) El teorema de Green dice que

$$\int_{\partial\Omega} (Mdx + Ndy) = \int_{\Omega}\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dxdy.$$

En este caso se tiene que $N = x$, por lo tanto

$$\int_{\partial\Omega} xdy = \int_{\Omega} dxdy = A(\Omega),$$

donde $A(\Omega)$ denota el área de la región Ω considerada.
Como nuestra región está limitada por la astroide se tiene que

$$\begin{aligned}
A &= \int_0^{2\pi} \cos^3\theta \cdot 3\operatorname{sen}^2\theta\cos\theta d\theta \\
&= 3\int_0^{2\pi} \cos^4\theta\cdot\operatorname{sen}^2\theta d\theta
\end{aligned}$$

Aplicando la primera reducción dada en las indicaciones, con $m = 4$ y $n = 2$ se tiene que

$$A = 3\cdot\frac{1}{6}\int_0^{2\pi}\cos^4\theta d\theta.$$

Ahora aplicamos la segunda reducción con $m = 4$ para obtener

$$A = 3\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{3}{4}\int_0^{2\pi}\cos^2\theta d\theta.$$

Aquí, la última integral vale π por lo tanto se obtiene que

$$A = \frac{3\pi}{8}$$

Problema 2.

a) Para la primera serie usamos el criterio del cuociente, con lo cual

$$\begin{aligned} R &= \lim \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim \frac{n!}{n^n} \cdot \frac{(n+1)^{(n+1)}}{(n+1)!} \\ &= \lim \frac{(n+1)^n}{n^n} \\ &= \lim (1+\frac{1}{n})^n = e. \end{aligned}$$

La segunda serie es una serie geométrica evaluada en $\frac{z}{e^i}$ que converge cuando $\left|\frac{z}{e^i}\right| < 1$, es decir $|z| < 1$. Por lo tanto su radio de convergencia es 1.

b) Consideremos la serie de potencias $\sum a_k z^k$ definida por

$$a_k = \begin{cases} 2i & \text{si } k \text{ es par} \\ e^{ik\frac{\pi}{2}} & \text{si } k \text{ es impar} \end{cases}$$

i) Para calcular su rádio de convergencia usamos el criterio de la raiz enésima. Es decir

$$R = \frac{1}{\lim \sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{\lim \sqrt[n]{2 \text{ ó } 1}} = 1.$$

En el caso $|z| = 1$, el módulo del término enésimo de la serie es $|2 \text{ ó } 1|$, dependiendo de si n es par o impar. Como este término enésimo no converge a cero (tiene 2 puntos de acumulación) se deduce que la serie diverge.

ii) En el caso $|z| < R$ se tiene que

$$\begin{aligned} \sum a_k z^k &= \sum a_{2k} z^{2k} + \sum a_{2k+1} z^{2k+1} \\ &= \sum 2i \cdot z^{2k} + \sum e^{i(2k+1)\frac{\pi}{2}} \cdot z^{2k+1} \\ &= \frac{2i}{1-z^2} + e^{i\frac{\pi}{2}} z \cdot \sum e^{ik\pi} z^{2k} \\ &= \frac{2i}{1-z^2} + e^{i\frac{\pi}{2}} z \cdot \sum \left(e^{i\pi} z^2\right)^k \\ &= \frac{2i}{1-z^2} + \frac{e^{i\frac{\pi}{2}} z}{1-e^{i\pi} z^2} \\ &= \frac{2i}{1-z^2} + \frac{zi}{1+z^2} \\ &= \frac{2\left(1+z^2\right) + z\left(1-z^2\right)}{1-z^4} i \\ &= \frac{2+z+2z^2-z^3}{1-z^4} i. \end{aligned}$$

Problema 3.

a) El segmento $[i, 2i]$ se puede parametrizar como $z = ti$, con $t \in [1,2]$. Por lo tanto la integral es

$$\begin{aligned}\int_\Gamma \log(z)dz &= \int_0^1 \left(\log|z| + i\frac{\pi}{2}\right) idt \\ &= \int_0^1 \log|z| idt - \int_0^1 \frac{\pi}{2} dt.\end{aligned}$$

En consecuencia, la parte real que se pide es igual a $-\frac{\pi}{2}$.

b) La desigualdad de la derecha es simplemente la desigualdad triangular aplicada a $\left|z^3+1\right|$, es decir

$$\left|z^3+1\right| \le |z|^3 + 1.$$

La desigualdad de la izquierda es más delicada y se prueba haciendo un “ni quita ni pone”:

$$|z|^3 = \left|z^3+1-1\right| \le \left|z^3+1\right| + 1,$$

de donde, restando 1 se obtiene el resultado pedido.
Para la integral acotamos del modo siguiente:

$$\begin{aligned}\left|\int_{|z|=R} \frac{z}{z^3+1} dz\right| &\le \max\left(\frac{R}{|z^3+1|}\right) \cdot 2\pi R \\ &\le \frac{2\pi R^2}{R^3-1} \to 0 \quad \text{si } R \to \infty.\end{aligned}$$

c) Para estudiar la derivabilidad de esta funcion, se puede verificar si se cumplen o no las condiciones de Cauchy-Riemann.
Las derivadas son

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{2x\left(x^2+y^2\right) - \left(x^2-y^2\right)(2x)}{\left(x^2+y^2\right)^2} = \frac{4xy^2}{\left(x^2+y^2\right)^2} \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{-2x\left(x^2+y^2\right) + 2xy\cdot(2y)}{\left(x^2+y^2\right)^2} = \frac{2x\left(y^2-x^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2} \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{-2y\left(x^2+y^2\right) - \left(x^2-y^2\right)(2y)}{\left(x^2+y^2\right)^2} = -\frac{4x^2y}{\left(x^2+y^2\right)^2} \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{-2y\left(x^2+y^2\right) + 2xy\cdot(2x)}{\left(x^2+y^2\right)^2} = \frac{2y\left(x^2-y^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2}\end{aligned}$$

Este cálculo muestra claramente que la función no es holomorfa en su dominio.