Control 2

MA26-B: Matemáticas Aplicadas
Profesor: Rafael Correa
Auxiliares: Omar Larré, Tomas Spencer, Leonardo Zepeda

1. (a) (2 puntos)Sean $E(x,y,z,t)$ y $H(x,y,z,t)$ campos vectoriales que llamaremos Campo Eléctrico e Intensidad Magnética, dos campos vectoriales de clase C^2 tales que cumplen:

$$\int_{\partial S} E \cdot d\vec{s} = -\frac{d}{dt}\left(\int_S B \cdot d\vec{\sigma}\right)$$
$$\int_{\partial S} H \cdot d\vec{s} = \int_S \left(J + \frac{\partial D}{\partial t}\right) d\vec{\sigma}$$

para toda superficie orientable S, que pertenezca a $\mathbb{R}^3$, en donde $B(x,y,z,t)$, $J(x,y,z,t)$ y $D(x,y,z,t)$ son campos vectoriales, de clase C^2 llamados, Campo Magnético, Densidad de Corriente, y Corriente de Desplazamiento.

Pruebe la tercera y cuarta Ecuaciones de Maxwell :

$$iii)\ \ \nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t} \text{ y } \ iv)\ \nabla \times H = J + \frac{\partial D}{\partial t}$$

(b) (2 puntos)Probar que la integral de línea

$$\int_{\overline{PQ}} (2xe^{x^2+y^2+z^2} + \tfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}})dx + (2ye^{x^2+y^2+z^2} + \tfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}})dy + (2ze^{x^2+y^2+z^2} + \tfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}})dz$$

es independiente del camino de integración entre los puntos P(1, 1, 1) y Q(2, 3, 4). Hallar su valor.*Indicación:* Utilice un ansatz.

(c) (2 puntos)Dado S la porción de la esfera $x^2+y^2+z^2=4$ que queda bajo el plano $z=1$. Dado

$$\overrightarrow{F}(x,y,z) = \frac{-yz}{x^2+y^2+1}\hat{\imath} + \frac{xz}{x^2+y^2+1}\hat{\jmath} + \frac{-xyz}{x^2+y^2+1}\hat{k}$$

calcule:

$$\iint_S (\nabla \times \overrightarrow{F} \cdot \hat{n}) dA$$

con $\hat{n}$ la normal exterior de la esfera.

(a) (3 puntos)Pruebe que:

$\forall \zeta \in \mathbb{C}$ fijo se tiene que

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{2\zeta\cos\theta} d\theta = \sum_{n\geq 0}\left(\frac{\zeta^n}{n!}\right)^2$$

Para lo cual:

i. Considere $z = e^{i\theta}$, con $\theta \in \mathbb{R}$ luego muestre que:

$$\cos\theta = \frac{1}{2}(z + z^{-1})$$

ii. Utilice la paremetrización anterior, reemplace donde deba, expanda en serie de potencias $e^{\zeta z^{-1}}$ (explique cada paso) y pruebe que:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{2\zeta\cos\theta}d\theta = \sum_{n\geq 0}\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{n!}\left(\frac{\zeta}{z}\right)^n e^{\zeta z}\frac{dz}{z} = \sum_{n\geq 0}\frac{\zeta^n}{n!}\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{e^{\zeta z}}{z^{n+1}}dz$$

donde γ es la curva asociada a la parametrización de la parte anterior.

iii. Calcule mediante residuos

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{e^{\zeta z}}{z^{n+1}}dz$$

iv. Concluya

(b) (3 puntos)Sea $f:[0,1]\mapsto\mathbb{R}$ una función continua, entoces sea h una función en el plano compleja definida por:

$$h(z) = \int_0^1 f(t)\cos(zt)dt$$

pruebe que h es entera, i.e. analítica en todo el plano Complejo.
Para ello:

i. Expanda en serie en serie de Mclaurin (en torno a cero) $\cos z$.
Indicación: recuerde que $\cos z = \dfrac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$ o bien haga una expansión de Taylor, explique por qué lo puede hacer.

ii. Utilizando la parte anterior, expanda $\cos(tz)$, reemplace donde corresponda, reordene y pruebe que:

$$h(z) = \sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\left(\int_0^1 t^{2n}f(t)dt\right)z^{2n}$$

iii. Con lo anterior concluya que h tiene representación en serie de potencias, explique por qué, i.e. explicite los coeficientes.

iv. Encuentre una cota c tal que

$$\left|\int_0^1 t^{2n}f(t)dt\right| \leq c \qquad \forall n\in\mathbb{N}$$

Indicación: Recuerde que si $t\in[0,1]$ entonces $t^{n+1}\leq t^n$ $\forall n\in\mathbb{N}$

v. Con la cota encontrada anteriormente pruebe que el radio de convergencia para la serie de potencias de h es infinito

vi. Concluya.

(a) (1,5 puntos) Expanda en Serie de Mclaurin:

$$f(z) = \log\left(\frac{1-z}{1+z}\right)$$

(b) Para cada una de las siguientes funciones, encuentre los polos, con su respectivo orden, calcule el residuo en cada uno de esos polos y obtenga el valor de las integrales pedidas.

i. (2 puntos) $g(z) = \dfrac{\cos(\pi z)}{z^3 - z^2 + 4z - 4}$ y calcule $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)dx$

ii. (2,5 puntos) $h(z) = \left[z^n + \dfrac{1}{z^n}\right]\left[\dfrac{1}{z-a} - \dfrac{1}{z - \frac{1}{a}}\right]$ con $a \in (0,1)$ y calcule $\displaystyle\int_{|z|=1} h(z)dz$,

Luego deduzca de esto el valor de la siguiente integral $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos(nx)}{(1 + a^2 - 2a\cos x)}dx$

5 de Octubre de 2006