CONTROL 2
MA2002: CÁLCULO AVANZADO Y APLICACIONES 2015-2

PROFESOR: ÁLVARO HERNÁNDEZ
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS, UNIVERSIDAD DE CHILE

Pregunta 1. Encuentre el valor de las siguientes integrales.

1. (4 puntos) $\displaystyle \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\int_{|z|=2}\frac{z^n}{1-2z\cos\theta+z^2}\,dz\,d\theta$
2. (2 puntos) $\displaystyle \int_0^{\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2+a^2}\,dx$, donde $a>0$

Pregunta 2. Suponga que $f\in H(\mathbb{C})$ y que f es no nula en el círculo unitario $C=\partial B(0,1)$.

1. (2 puntos) Muestre que si
$$\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz=2,$$
entonces f tiene exactamente dos ceros en $B(0,1)$. Indicación: Si f tiene exactamente dos ceros z_1 y z_2 en $B(0,1)$, entonces $f(z)=(z-z_1)(z-z_2)h(z)$ para cierta función h sin ceros en $B(0,1)$.
2. (2 puntos) Suponga que además f satisface
$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\int_C z\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz &= 0,\\ \frac{1}{2\pi i}\int_C z^2\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$
Encuentre todos los ceros de f en $B(0,1)$.

Pregunta 3.

1. (2 puntos) Demuestre que para todo par de enteros $n>k\geq 1$ se tiene
$$\binom{n}{k}=\frac{1}{2\pi}\int_{|z|=1}\frac{(z+1)^n}{z^{k+1}}\,dz$$
2. (2 puntos) A partir de lo anterior muestre la siguiente igualdad:
$$\sum_{k=0}^{\infty}\binom{2n}{n}\frac{1}{5^n}=\sqrt{5}$$

Pregunta 4.

1. (2 puntos) Dado $a\in\mathbb{R}$ y $n\in\{0,1,2,\ldots\}$ encuentre el valor de
$$\int_{|z|=1}\frac{e^{az}}{z^{n+1}}\,dz$$
y deducir que
$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{a^n}{n!}\right)^2=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1}\frac{e^{a(1/z+z)}}{z}\,dz$$
2. (2 puntos) Finalmente deducir que
$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{a^n}{n!}\right)^2=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{2a\cos t}\,dt$$

Total: 18 puntos. Nota $N=6p/18+1$ donde p puntos obtenidos

Pauta C2 CAA 2015-2. Álvaro Hernández.

P1 1.- $\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=2} \frac{z^n}{1-2z\cos\theta+z^2}dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=2} \frac{z^n}{(z-e^{i\theta})(z-e^{-i\theta})}dz$

$$= \text{Res}\left(\frac{z^n}{(z-e^{i\theta})(z-e^{-i\theta})}, e^{i\theta}\right) + \text{Res}\left(\frac{z^n}{(z-e^{i\theta})(z-e^{-i\theta})}, e^{-i\theta}\right)$$

$$= \left.\frac{z^n}{z-e^{-i\theta}}\right|_{z=e^{i\theta}} + \left.\frac{z^n}{z-e^{i\theta}}\right|_{z=e^{-i\theta}}$$

$$= \frac{e^{in\theta}}{e^{i\theta}-e^{-i\theta}} + \frac{e^{-in\theta}}{e^{-i\theta}-e^{i\theta}} = \frac{e^{in\theta}-e^{-in\theta}}{e^{i\theta}-e^{-i\theta}} = \frac{\sin n\theta}{\sin\theta}$$

$$\therefore \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=2} \frac{z^n}{1-2z\cos\theta+z^2}dz = \int_0^{2\pi} \frac{\sin n\theta}{\sin\theta}d\theta$$

$$= \int_{|z|=1} \frac{z^n-z^{-n}}{z-z^{-1}}\frac{dz}{iz} = \frac{1}{i}\int_{|z|=1} \frac{z^{2n}-1}{z^2-1}\frac{1}{z^n}dz$$

$$= \frac{1}{i}\int_{|z|=1} (1+z^2+\cdots+z^{2n-1})\frac{1}{z^n}dz = I$$

Si n es par entonces la integral es nula, si n es impar el único termino que importa es $\frac{1}{z}$, luego n impar $\therefore I = \frac{1}{i}\int_{|z|=1} \frac{1}{z}dz = 2\pi$, en resumen

$$I = \begin{cases} 0 & n \text{ par} \\ 2\pi & n \text{ impar} \end{cases}$$

2.- $\int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2+a^2}dx = I$

Notemos que $f(x) = \frac{\sin^2 x}{a^2+x^2}$ es par luego

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}.$$

$$\therefore I = \cancel{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1-\cos 2x}{\cancel{2}(x^2+a^2)}dx$$

Encontrar el valor de

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2+a^2}\, dx = I$$

Sabemos que $\sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$ y que

$f(x) = \dfrac{\sin^2 x}{x^2+a^2}$ es par, luego

$$I = \cancel{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1-\cos 2x}{\cancel{2}(x^2+a^2)}\, dx$$

Consideremos $f(z) = \dfrac{1}{z^2+a^2}$, $I_1 = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+a^2}\, dx$

Notemos que los polos de f son $P = \{ia, -ia\}$ de los cuales, el único que interesa es ia (asumiendo que $a>0$), luego

$$I_1 = 2\pi i \operatorname{Res}\big(f(z), z = ia\big) =$$

$$= 2\pi i \lim_{z \to ia} \frac{1}{(z+ia)(z-ia)}(z-ia)$$

$$= 2\pi i \frac{1}{2ia} = \frac{\pi}{a}$$

Sea $I_2 = -\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x^2+a^2}\, dx$

Sabemos que $e^{2ix} = \cos 2x + i \sin 2x$,

$\therefore I_2 = -\mathrm{Re}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{2ix}}{x^2+a^2}\,dx\right)$, aplicando el mismo razonamiento anter

notamos que los polos de

$$f(z) = \frac{e^{2iz}}{z^2+a^2} \quad \text{son } P = \{ia, -ia\}, \text{ de}$$

los cuales el único que importa es ia (asumiendo $a>0$) luego

$$I_2 = -\mathrm{Re}\left(2\pi i\, \mathrm{Res}\left(\frac{e^{2iz}}{z^2+a^2}, ia\right) 2\pi i\right)$$

$$= -\mathrm{Re}\left(\lim_{z\to ia} \frac{e^{2iz}}{(z+ia)(z-ia)}(z-ia)\ 2\pi i\right)$$

$$= -\mathrm{Re}\left(\frac{e^{2i(ia)}}{2ia}\ 2\pi i\right)$$

$$= -\mathrm{Re}\left(e^{-2a}\frac{\pi}{a}\right) = -\frac{\pi}{a}e^{-2a}$$

$$\therefore I = I_1 + I_2 = \frac{\pi}{a}\left(1 - e^{-2a}\right)$$

(a) Muestre que si $\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1}\frac{f'(z)}{f(z)}dz = 2$

Entonces f tiene exactamente dos ceros en $B(0,1)$

(b) Suponga además que

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|} z\frac{f'(z)}{f(z)}dz = 0 \quad \wedge \quad \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1} z^2\frac{f'(z)}{f(z)}dz = \frac{1}{2}$$

Encuentre los ceros de f en $B(0,1)$.

(a) $f(z) = (z-z_1)(z-z_2)\,h(z)$,

$$f'(z) = (z-z_2)h(z) + (z-z_1)h(z) + (z-z_1)(z-z_2)h'(z)$$

$$\int_{|z|=1}\frac{f'(z)}{f(z)}dz = \underbrace{\int_{|z|=1}\frac{1}{z-z_1}dz}_{2\pi i} + \underbrace{\int_{|z|=1}\frac{1}{z-z_2}dz}_{2\pi i} + \underbrace{\int_{|z|=1}\frac{h'(z)}{h(z)}dz}_{=0 \text{ pues } h \text{ no tiene ceros}}$$

$\therefore \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1}\frac{f'(z)}{f(z)}dz$ cuenta la cantidad de ceros que f tiene, en este caso 2.

(b) $$0 = \int_{|z|=1} z\frac{f'(z)}{f(z)}dz = \underbrace{\int_{|z|=1}\frac{z}{z-z_1}dz}_{\substack{=z_1 \\ \text{(Por T. de Cauchy)}}} + \underbrace{\int_{|z|=1}\frac{z}{z-z_2}dz}_{\substack{z_2 \\ \text{por T. de Cauchy}}} + \underbrace{\int_{|z|=1} z\frac{h'(z)}{h(z)}dz}_{\substack{=0 \\ \text{pues } h \text{ no tiene ceros}}}$$

$0 = z_1 + z_2$

En forma análoga

$$\frac{1}{2} = \int_{|z|=1}\frac{z^2 f'(z)}{f(z)}dz = \int_{|z|=1}\frac{z^2}{z-z_1}dz + \int\frac{z^2}{z-z_2}dz + \int_{|z|=1} z^2\frac{h(z)}{h'(z)}dz$$

$$\frac{1}{2} = z_1^2 + z_2^2$$

$$\therefore \quad z_1 = -z_2 \Rightarrow \quad \frac{1}{2} = 2z_1^2 \Rightarrow \quad z_1 = \frac{1}{2},\ z_2 = -\frac{1}{2}$$

$\therefore$ hay 2 raíces y corresponden a $1/2$ y $-1/2$

P3

$$3: \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1} \frac{(z+1)^n}{(z+1)}\,dz = \frac{1}{k!}\frac{d^k}{dz^k}\left((z+1)^n\right)\Big|_{z=0}$$

$$= \frac{n!}{(n-k)!}(z+1)^{n-k}\Big|_{z=0}$$

$$= \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$$

$$\binom{2n}{n} = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1} \frac{(z+1)^{2n}}{z^{n+1}}\,dz$$

$$\therefore\ 2\pi i \binom{2n}{n} \sum_{n=0}^{\infty}\binom{2n}{n}\frac{1}{5^n} = \sum_{n=0}^{\infty}\int_{|z|=1}\frac{(z+1)^{2n}}{z^{n+1}}\frac{dz}{5^n}$$

$$= \int_{|z|=1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+1)^{2n}}{z(5z)^n}\,dz = \underbrace{\int_{|z|=1}\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{(z+1)^2}{5z}\right]^n dz}_{=I}$$

pero $\left|\frac{(z+1)^2}{5z}\right| = \frac{|z+1|^2}{5|z|} \leq \frac{(|z|+1)^2}{5|z|} = \frac{|z|^2+2|z|+1}{5|z|} \leq \frac{4}{5} < 1$

$\therefore$ La serie en I converge

$$I = \int_{|z|=1}\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{(z-1)^2}{5z}}\,dz = \int_{|z|=1}\frac{1}{\cancel{z}}\frac{-5\cancel{z}}{\underbrace{z^2-3z+1}_{\text{tiene 2 polos simples } z=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}}}\,dz$$

pero sólo $\frac{3-\sqrt{5}}{2} \in D(0,1)$

$$\therefore\ I = -5(2\pi i)\,\mathrm{Res}\left(\frac{1}{z^2-3z+1}, \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right) = \frac{2\pi i(-5)}{-\sqrt{5}} \quad \therefore \sum_{n=0}^{\infty}\binom{2n}{n}\frac{1}{5^n} = \sqrt{5}$$

P4 $\int_{|z|=1} \frac{e^{az}}{z^{n+1}} dz = \frac{2\pi i}{n!} \frac{d^n}{dz^n} \left(e^{az}\right)\Big|_{z=0} = \frac{a^n 2\pi i}{n!}$

esto gracias al teorema integral de Cauchy.

$$\left(\frac{a^n}{n!}\right)^2 = \frac{a^n}{n!} \int_{|z|=1} \frac{e^{az}}{z^{n+1}} dz \, \frac{1}{2\pi i}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a^n}{n!}\right)^2 = \int_{|z|=1} e^{az} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n! \, z^{n+1}} dz \, \frac{1}{2\pi i}$$

$$= \int_{|z|=1} e^{az} \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!} (z^{-1})^n dz \, \frac{1}{2\pi i}$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{e^{az} e^{-az}}{z} dz = I$$

$z = e^{it}$, $z^{-1} = e^{-it}$, $dz = i z \, dt$

$$\therefore I = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{e^{a e^{it} + a \cdot e^{-it}}}{e^{it}} i e^{it} dt.$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{2a \cos t} dt.$$