Universidad de Chile.
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas.
Departamento de Ingeniería Matemática.
Santiago, Jueves 18 de Octubre 2012.

Profesores:
M. Duarte,
A. Hernández.
Tiempo: 3:00 hrs.

Control 2 - Cálculo Avanzado y Aplicaciones

P1.

1. Sea $J(z)$ la función definida mediante la serie de potencias

$$J(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k}}{(k!)^2 2^{2k}}.$$

Muestre que $J(z)$ es una función holomorfa en $\mathbb{C}$. Muestre que $w = J(z)$ satisface la ecuación diferencial

$$w'' + \frac{1}{z}w' + w = 0.$$

2. Muestre que

$$\frac{e^z}{1+z} = 1 + \frac{1}{2}z^2 - \frac{1}{3}z^3 + \frac{3}{8}z^4 - \frac{11}{3}z^5 + \cdots .$$

Muestre que el término general para los coeficientes de esta serie está dado por

$$a_n = (-1)^n \left[\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!}\right], \qquad n \geq 2.$$

¿Cuál es el radio de convergencia de esta serie?

P2. Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto tal que $0 \in \Omega$, f es holomorfa en Ω, y $R > 0$, tal que $\overline{D(0,R)} \subset \Omega$.

1. Muestre que para cada $z \in D(0,R)$ se satisface la siguiente identidad

$$\int_{|\gamma|=R} \frac{f(\zeta)\bar{z}}{\zeta\bar{z} - R^2}\, d\zeta = 0.$$

Indicación: separe los casos $z = 0$, $z \neq 0$.

Deducir que

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\gamma|=R} f(\zeta)\left(\frac{1}{\zeta - z} - \frac{\bar{z}}{\zeta\bar{z} - R^2}\right)\, d\zeta.$$

2. Muestre que para cada $\theta \in [0, 2\pi]$ y $r \in [0, R)$ se cumple la siguiente identidad

$$f\left(re^{i\theta}\right) = \int_0^{2\pi} P_{r/R}(\theta - t) f\left(Re^{it}\right)\, dt$$

donde para cada $x \in [0,1)$

$$P_x(\phi) = \frac{1}{2\pi}\frac{1 - x^2}{1 - 2x\cos\phi + x^2}, \quad \phi \in \mathbb{R},$$

función que se conoce como *núcleo de Poisson*.

3. Muestre que

$$\int_0^{2\pi} P_x(\phi)\, d\phi = 1, \quad \forall x \in (0,1).$$

P3. Calcule las siguientes integrales

1. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{(x^2 + 2x + 2)(x^2 + 4)} dx.$

2. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2 + 1} dx.$

Universidad de Chile.
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas.
Departamento de Ingeniería Matemática.
Santiago, Jueves 18 de Octubre 2012.

Profesores:
M. Duarte,
A. Hernández.
Tiempo: 3:00 hrs.

Control 2 - Cálculo Avanzado y Aplicaciones

P1.

1. Sea $J(z)$ la función definida mediante la serie de potencias

$$J(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k}}{(k!)^2 2^{2k}}.$$

Muestre que $J(z)$ es una función holomorfa en $\mathbb{C}$. Muestre que $w = J(z)$ satisface la ecuación diferencial

$$w'' + \frac{1}{z} w' + w = 0.$$

Solución. Calculemos el radio de convergencia de la serie. Para k impar, el coeficiente de la serie es cero, luego sólo importan los coeficientes de tipo c_{2k}. (0,5 pts)

De esta manera,

$$\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_k|} = \limsup_{k\to\infty} \sqrt[2k]{|c_{2k}|} = \limsup_{k\to\infty} \frac{1}{2\sqrt[k]{k!}} = 0.$$

(0,5 pts)

El radio de convergencia de la serie es $R = \infty$, y luego la serie define una función holomorfa en todo $\mathbb{C}$. (0,5 pts)

Más aún, las derivadas de la serie se obtienen derivando término a término, y las primeras derivadas de $J(z)$ están dadas por

$$J'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k 2k z^{2k-1}}{(k!)^2 2^{2k}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k k z^{2k-1}}{(k!)^2 2^{2k-1}} \qquad J''(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k k(2k-1) z^{2k-2}}{(k!)^2 2^{2k-1}},$$

(1,0 pts)

De manera que

$$\begin{aligned} J''(z) + \frac{1}{z} J'(z) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k k z^{2k-2}}{(k!)^2 2^{2k-1}} (1 + 2k - 1) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k-2}}{((k-1)!)^2 2^{2k-2}} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} z^{2n}}{(n!)^2 2^{2n}} = -J(z), \end{aligned}$$

lo que muestra que $J(z)$ resuelve la ecuación $w'' + z^{-1} w' + w'' = 0$. (0,5 pts)

2. Muestre que

$$\frac{e^z}{1+z} = 1 + \frac{1}{2} z^2 - \frac{1}{3} z^3 + \frac{3}{8} z^4 - \frac{11}{3} z^5 + \cdots.$$

Muestre que el término general para los coeficientes de esta serie está dado por

$$a_n = (-1)^n \left[\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!} \right], \qquad n \geq 2.$$

¿Cuál es el radio de convergencia de esta serie?

Para hallar la serie de potencias damos dos alternativas. Cad una reparte un total de 1,5 puntos.
Solución a. Conocemos las series para e^z y para $(1+z)^{-1}$:

$$e^z = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{j!} \qquad\qquad \frac{1}{1+z} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k z^k$$

(0,5 pts)

Recordando la multiplicación de series: $\sum a_j \cdot \sum b_k = \sum c_n$ donde $c_n = \sum_{j=0}^{n} a_j b_{n-j}$ tenemos que

$$\frac{e^z}{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{n} \frac{(-1)^{n-j}}{j!} \right) z^n.$$

Notar que el coeficiente de esta última serie es

$$a_n = \sum_{j=0}^{n} \frac{(-1)^{n-j}}{j!} = (-1)^n \sum_{j=0}^{n} \frac{(-1)^{-j}}{j!} = (-1)^n \sum_{j=0}^{n} \frac{(-1)^j}{j!}$$

(0,8 pts)

Esto es,

$$a_n = (-1)^n \left[1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!} \right].$$

Cancelando los unos se tiene lo pedido. (0,2 pts)

Solución b. Usaremos la expansión binomial de Leibniz para la derivada de un producto, esto es:

$$[f(z)g(z)]^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)}(z) g^{(k)}(z).$$

Tomando $g(z) = (1+z)^{-1}$ se obtiene que $g^{(k)}(z) = (-1)^k k!(1+z)^{-k-1}$, y tomando $f(z) = e^z$ se obtiene que $f^{(n-k)}(z) = e^z$. Entonces

$$\frac{1}{n!} \frac{d^n}{dz^n} \frac{e^z}{1+z}\bigg|_{z=0} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k k! = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(n-k)!} (-1)^{n-(k-n)} = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$$

Lo anterior corresponde al coeficiente de la serie de Taylor de $e^z(1+z)^{-1}$ en torno a cero. (1,0 pts)

Por el teorema de expansión en serie de Taylor para funciones holomorfas, dado que $e^z(1+z)^{-1}$ tiene un polo en $z = -1$ tenemos que la siguiente expansión es válida en $D(0,1)$:

$$\frac{e^z}{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n,$$

donde

$$a_n = (-1)^n \left[1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!} \right].$$

(0,5 pts)

Fin del cálculo de la serie.

El siguiente argumento finaliza ambas soluciones: la serie dada en el enunciado corresponde, por unicidad, a la serie de Taylor de la función $e^z(1+z)^{-1}$ en torno a cero. Dado que la función no es holomorfa en $z = -1$, la serie de Taylor solo converge en el mayor disco de centro $z = 0$, que no contiene a $z = -1$, esto es $D(0,1)$. Como la serie de potencia converge al menos en $D(0,R)$ y a lo más en $\overline{D(0,R)}$, donde R es su radio de convergencia, deducimos que $R = 1$. (1,5 pts).

P2. Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto tal que $0 \in \Omega$, f es holomorfa en Ω, y $R > 0$, tal que $\overline{D(0,R)} \subset \Omega$.

1. Muestre que para cada $z \in D(0,R)$ se satisface la siguiente identidad
$$\int_{|\gamma|=R} \frac{f(\zeta)\bar{z}}{\zeta\bar{z} - R^2}\, d\zeta = 0.$$
Indicación: separe los casos $z = 0$, $z \neq 0$. Deducir que
$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\gamma|=R} f(\zeta)\left(\frac{1}{\zeta - z} - \frac{\bar{z}}{\zeta\bar{z} - R^2}\right)\, d\zeta.$$
Solución. Para $z = 0$ la igualdad es obvia. Si $0 < |z| < R$ entonces
$$\frac{\bar{z}}{\zeta\bar{z} - R^2} = \frac{\bar{z}}{\bar{z}\left(\zeta - \frac{R^2}{\bar{z}}\right)} = \frac{1}{\zeta - \frac{R^2}{\bar{z}}},$$
luego $|R^2/\bar{z}| = R^2/|z| > R$, por lo tanto, como función de ζ
$$\frac{f(\zeta)\bar{z}}{\zeta\bar{z} - R^2} \in H(\Omega),$$
pues $\overline{D(0,R)} \subset \Omega$. (1,0 pts)

Como $\gamma = \{\zeta : |\zeta| = R\}$ es una curva cerrada, por el teorema de Cauchy-Goursat se tiene que
$$\int_{|\zeta|=R} \frac{f(\zeta)\bar{z}}{\zeta\bar{z} - R^2}\, d\zeta = 0.$$
(0,5 pts)

Finalmente, por el teorema integral de Cauchy se tiene
$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=R} f(\zeta)\left(\frac{1}{\zeta - z} - \frac{\bar{z}}{\zeta\bar{z} - R^2}\right)\, d\zeta. \tag{1}$$
(0,5 pts)

2. Muestre que para cada $\theta \in [0, 2\pi]$ y $r \in [0, R)$ se cumple la siguiente identidad
$$f\left(re^{i\theta}\right) = \int_0^{2\pi} P_{r/R}(\theta - t) f\left(Re^{it}\right)\, dt$$
donde para cada $x \in [0,1)$
$$P_x(\phi) = \frac{1}{2\pi}\frac{1 - x^2}{1 - 2x\cos\phi + x^2}, \quad \phi \in \mathbb{R},$$
función que se conoce como *núcleo de Poisson.*
Solución. Se tiene que (1) equivale a
$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=R} f(\zeta)\frac{|z|^2 - R^2}{\zeta^2\bar{z} - R^2\zeta - |z|^2\zeta + R^2 z}\, d\zeta.$$
Tomando $\gamma(t) = Re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$ y $z = re^{i\theta}$ (1,0 pts)
se tiene
$$\begin{aligned} f(re^{i\theta}) &= \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} f(Re^{it})\frac{(r^2 - R^2)Rie^{it}}{R^2re^{2it-i\theta} - R^3e^{it} - Rr^2e^{it} + R^2re^{i\theta}}\, dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(Re^{it})\frac{R^2 - r^2}{r^2 - 2Rr\cos(\theta - t) + R^2}\, dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(Re^{it})\frac{1 - (r/R)^2}{1 - 2(r/R)\cos(\theta - t) + (r/R)^2} dt \\ &= \int_0^{2\pi} P_{r/R}(\theta - t) f(Re^{it})\, dt \end{aligned}$$
(1,0 pts)

3. Muestre que

$$\int_0^{2\pi} P_x(\phi)\ d\phi = 1, \quad \forall x \in (0,1).$$

Solución a. Usando la parte anterior con $f(z)=1$, haciendo $x = r/R$, y haciendo $\phi = t - \theta$ se obtiene el resultado. (2,0 pts)

Solución b. Según el cambio de variables $z = xe^{i\phi}$, $dz = xie^{i\phi}d\phi = izd\phi$, luego

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} P_x(\phi)\ d\phi &= \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=x} \frac{1-x^2}{1-z-\bar{z}+x^2}\frac{1}{z}\ dz \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=x} \frac{x^2-1}{(z-1)(z-x^2)}\ dz := I.\end{aligned}$$

(0,5 pts)

El integrando es una función holomorfa salvo en los puntos 1 y x^2, que son polos simples de tal función. La región interior que define $\{z : |z| = x\}$ corresponde a $D(0,x)$, luego $1 \notin D(0,x)$ y $x^2 \in D(0,x)$. (0,5 pts)

Por lo tanto

$$I = \frac{1}{2\pi i}\left(2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{x^2-1}{(z-1)(z-x^2)}, x^2\right)\right)$$

(0,5 pts)

pero

$$\operatorname{Res}\left(\frac{x^2-1}{(z-1)(z-x^2)}, x^2\right) = \lim_{z\to x^2} \frac{x^2-1}{(z-1)(z-x^2)}(z-x^2) = 1$$

por lo tanto $I = 1$. (0,5 pts)

P3. Calcule las siguientes integrales

1. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{(x^2+2x+2)(x^2+4)}dx.$

   Solución. Los polinomios $p(z) = z$ y $q(z) = (z^2+2x+2)(x^2+4)$ no comparten raíces y el grado de q es 3 más que el de p. Además $q(z)$ no tiene raíces reales, asi que por una aplicación del Teorema de Residuos vista en clase

   $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{(x^2+2x+2)(x^2+4)}dx = 2\pi i \sum_{z\in Z_q} \operatorname{Res}(p/q;z),$$

   donde Z_q es el conjunto de ceros de q, que también corresponde a los polos de p/q, que están en el semi plano superior. (1,0 pts)

   Hallemos los ceros de $q(z)$: Tenemos que $z^2+2z+2 = 0$ o $z^2+4 = 0$. En el primer caso obtenemos dos ceros $z_1 = -1+i$ y $z_2 = -1-i$. En el segundo caso tenemos $z_3 = 2i$ y $z_4 = -2i$. Como todos éstos son ceros simples de $q(z)$, corresponden a polos simples de $p(z)/q(z)$. Los que tienen parte imaginaria positiva son z_1 y z_3. (0,9 pts)

   Calculemos los residuos de z_1 y z_3:

   $$\operatorname{Res}(p/q;z_1) = \lim_{z\to z_1} \frac{(z-z_1)p(z)}{q(z)} = \frac{z_1}{(z_1-z_2)(z_1^2+4)} = \frac{-1+i}{2i(1-2i-1+4)} = \frac{-1+i}{4(2i+1)}$$
   $$\operatorname{Res}(p/q;z_3) = \lim_{z\to z_3} \frac{(z-z_3)p(z)}{q(z)} = \frac{z_3}{(z_3^2+2z_3+2)(z_3-z_4)} = \frac{2i}{(-4+4i+2)4i} = \frac{1}{4(2i-1)}$$

   (0,6 pts)

   Así obtenemos

   $$\operatorname{Res}(p/q;z_1) + \operatorname{Res}(p/q;z_3) = \frac{(-1+i)(2i-1)+2i+1}{4(2i+1)(2i-1)} = \frac{i}{20},$$

   y finalmente

   $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{(x^2+2x+2)(x^2+4)}dx = -\frac{\pi}{10}.$$

   (0,5 pts)

2. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2+1}dx.$

   Solución. De conocidas identidades trigonométricas sabemos que $\operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos(2x))$. Sea $f(z) = \dfrac{1-e^{2iz}}{2(z^2+1)}$. Para $z = x+iy$ con parte imaginaria positiva ($y > 0$) se tiene

   $$|f(z)| \le \frac{1}{2}\frac{1+e^{-2y}}{|z^2+1|} \le \frac{1}{|z^2+1|} \le \frac{2}{|z|^2},$$

   donde la última desigualdad vale para $|z|^2 > 2$. (1,0 pts)

   Los polos de $f(z)$ son las soluciones de $z^2+1 = 0$, es decir, $z_1 = i$ y $z_2 = -i$. Ambos son simples y $f(z)$ es holomorfa en el resto del plano complejo. Como sólo z_1 tiene parte real positiva, por un teorema visto en clase, se obtiene

   $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2+1}dx = 2\pi i \operatorname{Res}(f;i)$$

   (1,0 pts)

   Para calcular $\operatorname{Res}(f;i)$, basta tomar el límite:

   $$\lim_{z\to i}(z-i)f(z) = \lim_{z\to i} \frac{1-e^{2iz}}{2(z+i)} = \frac{1-e^{-2}}{2i},$$

   de manera que la integral buscada vale $\dfrac{\pi}{2}(1-e^{-2})$. (1,0 pts)