P1. a) *(2 ptos.)* Demostrar que si f es una función holomorfa en un abierto Ω que contiene al disco $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq r\}$, entonces

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) d\theta.$$

Usando la fórmula integral de Cauchy tenemos que

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f(u)du}{u - z_0}$$

0.5pts

donde γ es el círculo de radio r en torno a z_0.
Parametrizamos el círculo con:

$$u(\theta) = z_0 + re^{i\theta}, \qquad \theta \in [0, 2\pi], \qquad du = rie^{i\theta} d\theta$$

0.5pts

Así, reemplazando en la fórmula de Cauchy queda:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{i\theta}) rie^{i\theta} d\theta}{re^{i\theta}},$$

de donde se obtiene la fórmula pedida simplificando. 1.0pts

b) *(1 ptos.)* Use la parte anterior para demostrar que si $u(x, y)$ es una función real armónica (es decir, dos veces derivable y tal que $\Delta u = 0$) en un dominio Ω abierto, simplemente conexo y que contiene al disco $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \leq r\}$, entonces

$$u(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(x_0 + r\cos\theta, y_0 + r\operatorname{sen}\theta) d\theta.$$

Sabemos que si $u(x, y)$ es una función real armónica en un dominio simplemente conexo, entonces existe $v(x, y)$ real armónica, de modo que $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ es holomorfa en Ω.
Luego, usando la parte a) se tiene que:

$$u(x_0, y_0) + iv(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) d\theta$$

0.5pts

Como $z_0 + re^{i\theta} = (x_0, y_0) + (r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)$, queda

$$u(x_0, y_0) + iv(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Big[u(x_0 + r\cos\theta, y_0 + r\operatorname{sen}\theta) + iv(\sim, \sim) \Big] d\theta$$

0.5pts

de aquí se obtiene la fórmula identificando las partes reales.

c) *(3 ptos.)* Use las partes anteriores apropiadamente, con $f(z) = \cos z$ para calcular

$$\int_0^{2\pi} \cos(\cos\theta) \cosh(\operatorname{sen}\theta) d\theta.$$

Ind: (50 % del puntaje) Comience por expresar $\cos z$ *en la forma* $u(x, y) + iv(x, y)$.

Sabemos que:

$$\begin{aligned}
\cos z &= \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \frac{e^{i(x+iy)} + e^{-i(x+iy)}}{2} = \frac{e^{ix}e^{-y} + e^{-ix}e^{y}}{2} \\
&= \frac{(\cos x + i\operatorname{sen} x)e^{-y} + (\cos x - i\operatorname{sen} x)e^{y}}{2} \\
&= \cos x \frac{e^{-y} + e^{y}}{2} + i\operatorname{sen} x \frac{e^{-y} - e^{y}}{2} \\
&= \cos x \cosh y - i\operatorname{sen} x \operatorname{senh} y
\end{aligned}$$

1.5pts

Usando la parte b) con $u(x,y) = Re(\cos z)$, $(x_0, y_0) = (0,0)$ y $r = 1$, se obtiene que:

$$cos x_0 \cosh y_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos(\cos\theta)\cosh(\operatorname{sen}\theta)d\theta$$ 1.0pts

de donde, considerando que $\cos 0 = \cosh 0 = 1$, se obtiene que

$$\int_0^{2\pi} \cos(\cos\theta)\cosh(\operatorname{sen}\theta)d\theta = 2\pi$$ 0.5pts

P2. a) Sean $m > 0$ y f una función holomorfa en $\mathbb{C} \setminus \{p_1, \dots, p_N\}$ que posee polos $p_1, \dots, p_N \in \mathbb{C}$, tales que:

$$Im(p_j) > 0 \quad \forall j \in \{1, \dots, K\} \qquad \text{y} \qquad Im(p_j) < 0 \quad \forall j \in \{K+1, \dots, N\}, \quad 1 \leq K \leq N.$$

El objetivo de este problema es probar que si $\lim\limits_{R\to+\infty} M_R = 0$, donde $M_R = \max\limits_{|z|=R} |f(z)|$, entonces

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{R} f(x)e^{imx}dx = 2\pi i \sum_{j=1}^{K} Res(f(z)e^{imz}, p_j). \tag{1}$$

Para lograr este objetivo, se pide lo siguiente:

I) *(1 ptos.)* Demuestre la siguiente desigualdad: $\displaystyle\int_0^{\pi} e^{-mR\operatorname{sen}\theta}d\theta \leq \frac{\pi}{mR}$

Indicación: Para acotar inferiormente la función $\operatorname{sen}\theta$ *en* $[0,\pi]$*, comience acotándola inferiormente en* $[0,\pi/2]$ *por la mejor recta posible y luego aproveche su simetría.*

Usando la simetría de la función $\operatorname{sen}\theta$ se tiene que:

0.2pts

$$\int_0^{\pi} e^{-mR\operatorname{sen}\theta}d\theta = 2\int_0^{\pi/2} e^{-mR\operatorname{sen}\theta}d\theta \tag{2}$$

Además, en el intervalo $[0,\pi/2]$, por la concavidad de sen, se cumple que $\operatorname{sen}\theta \geq m\theta$ donde m es la pendiente de la recta secante que une los puntos $(0,0)$ y $(\pi/2, 1)$, es decir $m = \frac{2}{\pi}$. 0.2pts
De este modo se tiene que

$$-mR\operatorname{sen}\theta \leq -\frac{2mR}{\pi}\theta$$ 0.1pts

Por lo tanto:

$$\int_0^{\pi/2} e^{-mR\operatorname{sen}\theta}d\theta \quad \leq \quad \int_0^{\pi/2} e^{-\frac{2mR}{\pi}\theta}d\theta = \frac{\pi}{2mR}e^{-\frac{2mR}{\pi}\theta}\Bigg|_{\pi/2}^{0} = \frac{\pi}{2mR}(1-e^{-mR}) \leq \frac{\pi}{2mR}$$ 0.5pts

Juntando este resultado con (2) se concluye.

II) *(1 pto.)* Demuestre que si $\Gamma_R = \{z = x + iy : |z| = R, y \geq 0\}$ (arco de circunferencia de radio R centrado en el origen, del primer y segundo cuadrante), entonces

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{\Gamma_R} f(z)e^{imz}dz = 0.$$

Parametrizamos la curva Γ_R del modo siguiente: $z = Re^{i\theta}$ donde $\theta \in [0,\pi]$.
Claramente: $dz = Re^{i\theta}id\theta$ y $z = R\cos\theta + Ri\operatorname{sen}\theta$.
Con esto la integral queda:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\pi} f(z)e^{im(R\cos\theta + Ri\operatorname{sen}\theta)}Rie^{i\theta}d\theta \\ &= \int_0^{\pi} f(z)e^{imR\cos\theta}e^{-mR\operatorname{sen}\theta}Rie^{i\theta}d\theta \end{aligned}$$ 0.4pts

Por lo tanto, acotando queda:

$$\begin{aligned} |I| &\leq \int_0^{\pi} |f(z)|e^{-mR\operatorname{sen}\theta}Rd\theta \\ &\leq RM_R\int_0^{\pi} e^{-mR\operatorname{sen}\theta}d\theta \\ &\leq RM_R\left[\frac{\pi}{mR}\right] = \frac{\pi}{m}M_R \end{aligned}$$ 0.4pts 0.2pts

Cómo, según dato, $M_R \to 0$ cuando $R \to +\infty$, por teorema del sandwich se concluye.

III) *(1 pto.)* Use lo anterior y el Teorema de los residuos apropiadamente para demostrar la fórmula (1). Debe detallar cuales son las curvas tomadas, sus parametrizaciones y la aplicación del teorema.

Usamos el teorema de los residuos en la curva $\Gamma = \Gamma_X \cup \Gamma_R$, donde:

$$\Gamma_X = [-R, R] + 0i, \qquad \Gamma_R \text{ está definida en la parte anterior}, \qquad R > R_0 = \text{máx}\{|p_1|, \dots, |p_N|\}$$ 0.4pts

En este caso, el teorema de los residuos aplicado a la función $f(z)e^{imz}$ garantiza que $\forall R > R_0$:

$$\int_{\Gamma_X} f(z)e^{imz}dz + \int_{\Gamma_R} f(z)e^{imz}dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{K} Res(f(z)e^{imz}, p_j)$$ 0.4pts

Parametrizamos la curva Γ_X en forma clásica: $z = x$ donde $x \in [-R, R]$. Claramente: $dz = dx$. Luego:

$$\int_{R}^{R} f(x)e^{imx}dx + \int_{\Gamma_R} f(z)e^{imz}dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{K} Res(f(z)e^{imz}, p_j)$$ 0.2pts

Tomando límite cuando $R \to \infty$ y considerando el resultado probado en la parte anterior se concluye directamente (1).

b) *(3 ptos.)* Use el resultado deducido en a) para calcular las integrales:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2 - 2x + 2}dx \qquad \text{y} \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x^2 - 2x + 2}dx.$$

Esta es una aplicación de la parte anterior al caso $m = 1$ y $f(z) = \frac{1}{z^2 - 2z + 2}$.
Para aplicar ese resultado se debe verificar que la hipótesis se cumple:

$$\begin{aligned} M_R &= \max_{|z|=R} |f(z)| = \max_{|z|=R} \frac{1}{|z^2 - 2z + 2|} \\ &\leq \frac{1}{R^2 - (2R + 2)} \end{aligned}$$ 0.5pts

Con esto, claramente se cumple que $\lim_{R \to +\infty} M_R = 0$.
Para concluir, solo se deben encontrar los polos de f que tengan parte imaginaria positiva.
Polos: $z^2 - 2z + 2 = 0$, es decir, $(z - 1)^2 = -1$. Corresponden a $p_{1,2} = 1 \pm i$. 0.5pts
Orden del polo $p_1 = 1 + i$: Cómo $f(z)e^{iz} = \frac{e^{iz}}{(z-p_1)(z-p_2)}$, ambos polos son de orden 1. 0.5pts
Residuo en $p_1 = 1 + i$:

$$\begin{aligned} Res(f(z)e^{iz}, 1 + i) &= \lim_{z \to p_1} (z - p_1)f(z)e^{iz} = \lim_{z \to p_1} \frac{e^{iz}}{(z - p_2)} \\ &= \frac{e^{ip_1}}{(p_1 - p_2)} = \frac{e^{i(1+i)}}{2i} = \frac{e^{-1}e^{i}}{2i} \end{aligned}$$ 1.0pts

Aplicamos a) para deducir que:

$$\lim_{R \to +\infty} \int_{-R}^{R} \frac{e^{ix}}{x^2 - 2x + 2}dx = 2\pi i Res(f(z)e^{iz}, p_1) = \frac{\pi}{e}(\cos 1 + i \operatorname{sen} 1)$$ 0.5pts

con esto se tiene que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2 - 2x + 2}dx = \frac{\pi}{e}\cos 1 \qquad \text{y} \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x^2 - 2x + 2}dx = \frac{\pi}{e}\operatorname{sen} 1.$$

P3. a) *(3 ptos.)* Encuentre todas las funciones reales g, de modo que la función compleja

$$f(x+iy) = x^2 + g(y) + 2|x|y\, i$$

resulte ser holomorfa en el abierto $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ lo más grande posible.
En tal caso, indique los valores de g, Ω y f'.

Escribiendo $f = u + iv$, tenemos que $u(x,y) = x^2 + g(y)$ y $v(x,y) = 2|x|y$. Si g es una función real derivable, estas funciones son derivables en todo $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,y) : y \neq 0\}$. 0.5pts
Para que f sea holomorfa, además deben cumplirse las condiciones de Cauchy-Riemann.
Primera condición: $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$. Dérivando, esta condición se traduce en la igualdad:

$$2x = 2|x|$$ 0.5pts

la cual es válida sólo para $x \geq 0$. Es decir f no es holomorfa en el segundo ni tercer cuadrante. 0.5pts
Segunda condición: $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$. Dérivando, esta condición se traduce en la igualdad:

$$g'(y) = -2y$$ 0.5pts

la cual es válida para $g(y) = -y^2 + C$, donde $C \in \mathbb{R}$ es una constante de integración. 0.5pts
Resumen:

$$\begin{aligned} g(y) &= -y^2 + C, \qquad C \in \mathbb{R} \\ \Omega &= \{z = x + yi : x > 0, y \in \mathbb{R}\} \\ f'(z) &= 2x + 2yi = 2z \end{aligned}$$ 0.5pts

b) *(3 ptos.)* Encuentre todos los polos y residuos de la función

$$f(z) = \frac{1 - e^z}{z^3(1-z)}$$

Cómo e^z, z^3 y $1 - z$ son funciones holomorfas en todo $\mathbb{C}$, su cuociente es holomorfo en todo $\mathbb{C}$ salvo $z_0 = 0$ y $z_0 = 1$. 0.5pts
En $z_0 = 0$ sabemos que $\lim\limits_{z\to 0} \frac{1-e^z}{z} = -1$ y $\lim\limits_{z\to 0} \frac{1}{1-z} = 1$, luego $\lim\limits_{z\to 0} z^2 f(z) = \lim\limits_{z\to 0} \frac{1-e^z}{z} \cdot \frac{1}{1-z} = -1 \neq 0$. Por lo tanto se trata de un polo de orden 2. 0.5pts
Para calcular el residuo, usamos la fórmula

$$\begin{aligned} Res(f,0) &= \lim_{z\to 0} \frac{d}{dz}(z^2 f(z)) = \lim_{z\to 0} \frac{d}{dz}\left[(1-e^z)\cdot\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-z}\right] \\ &= \lim_{z\to 0}\left[(-e^z)\cdot\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-z} + (1-e^z)\cdot\frac{(-1)}{z^2}\cdot\frac{1}{1-z} + \underbrace{(1-e^z)\cdot\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{(1-z)^2}}_{\to(-1)}\right] \\ &= -1 + \lim_{z\to 0}\Big[\underbrace{\frac{ze^z + (1-e^z)}{z^2}}_{\to\frac{0}{0},\ \text{(L'Hôpital)}} \cdot \underbrace{\frac{(-1)}{1-z}}_{\to(-1)}\Big] \\ &= -1 + (-1)\lim_{z\to 0}\left[\frac{e^z + ze^z - e^z}{2z}\right] = -1 + (-1)\lim_{z\to 0}\left[\frac{e^z}{2}\right] = -1 - \frac{1}{2} = -\frac{3}{2} \end{aligned}$$

0.5pts (first line), 0.5pts (last line)

En $z_0 = 1$ sabemos que $\lim\limits_{z\to 1} \dfrac{1-e^z}{z^3} = 1 - e$, luego $\lim\limits_{z\to 1}(z-1)f(z) = \lim\limits_{z\to 1} \dfrac{1-e^z}{z^3}\cdot(-1) = e - 1 \neq 0$. Por lo tanto se trata de un polo de orden 1. 0.5pts
Para calcular el residuo, usamos la fórmula

$$Res(f,1) = \lim_{z\to 1}(z-1)f(z) = \lim_{z\to 1}\frac{1-e^z}{z^3}\cdot(-1) = e - 1$$ 0.5pts

Tiempo: 2:45 horas.