Control 2 - Cálculo Avanzado y Aplicaciones, Prof: C. Conca - R. Gormaz
Escuela de Ingeniería, Universidad de Chile
Jueves 18 de Octubre, 2012, **Tiempo 3:00 horas**
Auxiliares: Hugo Carrillo - Matías Godoy

Pregunta 1.

(a) **(3 puntos)** Una función $u(x,y)$ de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$ se dice armónica si

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Dada u armónica en todo el plano, se define

$$v(x,y) = \int_0^y \frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\,dt - \int_0^x \frac{\partial u}{\partial y}(s,0)\,ds.$$

Pruebe que $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ es holomorfa en todo $\mathbb{C}$.
Recuerdo de CVV: La derivada de

$$F(x) = \int_{a(x)}^{b(x)} g(x,t)dt \quad \text{es} \quad F'(x) = g(x,b(x))\,b'(x) - g(x,a(x))\,a'(x) + \int_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\,dt.$$

(b) **(3 puntos)** Considere la función $u(x,y) = x\sin(x)\cosh(y) - y\cos(x)\sinh(y)$. Determine $v(x,y)$ tal que la función $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ sea holomorfa en todo $\mathbb{C}$.

Pregunta 2.

(a) **(4 puntos)** Encuentre los discos de convergencia de las siguientes series:

(i) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} (\ln(n))^n (z+1)^{n^2}$

(ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^{(\ln(n))^2} z^n$

(b) **(2 puntos)** Sea $f(z) = \frac{z}{z+1}$, encuentre la expansión en serie de $f(z)$ en torno al punto $z_0 = 0$ y calcule su radio de convergencia.

Pregunta 3. Considere el polinomio $p(z) = (z + (1+i))\,(z + (1-i))$. Se desea calcular

$$I = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p'(it)}{p(it)}\,dt.$$

(i) **(1 punto)** Compruebe que $\displaystyle\frac{p'(z)}{p(z)} = \frac{1}{z+(1+i)} + \frac{1}{z+(1-i)}$.

(ii) **(2 puntos)** Para la curva Γ_R formada por los dos arcos regulares, $L_R = [-iR, iR]$ y la semicircunferencia $S_R = \{z \mid |z| = R,\ Re(z) \leq 0\}$ (curvas que dependen de $R > 0$), muestre que

$$\oint_{\Gamma_R} \frac{p'(z)}{p(z)}\,dz = 4\pi i,$$

si R es suficientemente grande.

(iii) **(2 puntos)** Muestre que

$$\lim_{R\to\infty} \int_{S_R} \frac{dz}{z+(1+i)} = \lim_{R\to\infty} \int_{S_R} \frac{dz}{z+(1-i)} = i\pi.$$

(iv) (1 punto) Usando los resultados anteriores, calcule

$$I = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p'(it)}{p(it)}\, dt.$$

Pauta Control 2 - Cálculo Avanzado y Aplicaciones, Prof: C. Conca - R. Gormaz
Escuela de Ingeniería, Universidad de Chile
Jueves 18 de Octubre, 2012, **Tiempo 3:00 horas**
Auxiliares: Hugo Carrillo - Matías Godoy

Pregunta 1.

(a) **(3 puntos)** Una función $u(x,y)$ de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$ se dice armónica si

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Dada u armónica en todo el plano, se define

$$v(x,y) = \int_0^y \frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\,dt - \int_0^x \frac{\partial u}{\partial y}(s,0)\,ds.$$

Pruebe que $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ es holomorfa en todo $\mathbb{C}$.
Recuerdo de CVV: La derivada de

$$F(x) = \int_{a(x)}^{b(x)} g(x,t)dt \quad \text{es} \quad F'(x) = g(x,b(x))\,b'(x) - g(x,a(x))\,a'(x) + \int_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\,dt.$$

do $\mathbb{C}$.

Solución: Notemos que como u es armónica, entonces $u \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$, más aun:

$$v(x,y) = \int_0^y \partial_x u(x,t)dt - \int_0^x \partial_y u(s,0)ds$$

es, al menos, diferenciable gracias al Teorema fundamental del cálculo. Luego, si $\partial_x v$ y $\partial_y v$ son continuas (cosa que aun no podemos asegurar), entonces se tendrá la equivalencia siguiente:

$$f \in H(\mathbb{C}) \Leftrightarrow u, v \text{ satisfacen las condiciones de CR } \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

Hagamos el cálculo de las derivadas de v:

$$\partial_y v(x,y) = \partial_y \left(\int_0^y \partial_x u(x,t)dt \right) - \underbrace{\partial_y \left(\int_0^x \partial_y u(s,0)ds \right)}_{0} = \partial_x u(x,y)$$

gracias a la regla de derivación de CVV, el segundo término es 0 pues no depende de y. y se tiene entonces que:

$$\partial_y v(x,y) = \partial_x u(x,y)$$

Notar que esto en particular nos dice que $\partial_y v(x,y)$ es continua.

Hagamos ahora el cálculo de $\partial_x v(x,y)$

$$\partial_x v(x,y) = \partial_x \left(\int_0^y \partial_x u(x,t)dt \right) - \partial_x \left(\int_0^x \partial_y u(s,0)ds \right) = \int_0^y \partial_{xx} u(x,t)dt - \partial_y u(x,0)$$

Como u es armónica, entonces $\partial_{xx} u(x,y) = -\partial_{yy} u(x,y),\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, luego:

$$\begin{aligned}\partial_x v(x,y) = -\int_0^y \partial_{yy} u(x,t)dt - \partial_y u(x,0) &= -\int_0^y \partial_y(\partial_y u(x,t))dt - \partial_y u(x,0) \\ &= -\partial_y u(x,y) + \partial_y u(x,0) - \partial_y u(x,0) = -\partial_y u(x,y)\end{aligned}$$

en esto último se ha usado el Teorema Fundamental del Cálculo notando que estamos integrando (en y) la derivada (en y) de la función $\partial_y u(x,y)$, y entonces se tiene que:

$$-\partial_x v(x,y) = \partial_y u(x,y)\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

lo que en particular nos dice que $\partial_x v(x,y)$ es continua.
Así, hemos probado que u y v satisfacen las condiciones de Cauchy-Riemann para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, como además u y v son de clase $\mathcal{C}^1$ en $\mathbb{R}^2$, se concluye que $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ es holomorfa en $\mathbb{C}$.

(b) (3 puntos) Considere la función $u(x,y) = x\sin(x)\cosh(y) - y\cos(x)\sinh(y)$. Determine $v(x,y)$ tal que la función $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ sea holomorfa en todo $\mathbb{C}$.

Solución: Es claro que $u \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$ pues es composición de funciones de esta clase. Así, debemos primero ver que u es una función armónica, y en función de esto podremos usar la parte anterior para calcular explícitamente $v(x,y)$ tal que $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ resulte holomorfa en $\mathbb{C}$.
Veamos pues, que u es armónica, calculemos sus derivadas:

$$\begin{aligned}
\partial_x u &= \sin x \cosh y + x\cos x \cosh y + y \sin x \sinh y \\
\partial_y u &= x \sin x \sinh y - \cos x \sinh y - y\cos x \cosh y \\
\partial_{xx} u &= \cos x \cosh y + \cos x \cosh y - x \sin x \cosh y + y \cos x \sinh y \\
\partial_{yy} y &= x \sin x \cosh y - \cos x \cosh y - \cos x \cosh y - y \cos x \sinh y
\end{aligned}$$

Luego, se tiene:

$$\partial_{xx} u + \partial_{yy} u = 0$$

por lo tanto u es efectivamente armónica. Calculemos ahora $v(x,y)$ dada por la fórmula de la parte anterior, para ello notemos que $\partial_x u(x,y)$ ya lo tenemos calculado, y $\partial_y u(x,y)$ debe ser evaluado en $y = 0$, lo que nos da:

$$\partial_y u(x,0) = 0$$

y por lo tanto:

$$\begin{aligned}
v(x,y) &= \int_0^y \partial_x u(x,t)dt - \int_0^x \partial_y u(s,0)ds = \int_0^y \sin x \cosh t + x \cos x \cosh t + t \sin x \sinh t dt - 0 \\
&= (\sin x + x\cos x)\int_0^y \cosh t dt + \sin x \int_0^y t \sinh t dt \\
&= (\sin x + x \cos x)\sinh y + \sin x \int_0^y t \sinh t dt
\end{aligned}$$

para calcular $\int_0^y t\sinh t dt$ se integra por partes como sigue:

$$\int_0^y t \sinh t dt = t\cosh t|_0^y - \int_0^y 1 \cdot \cosh t dt = y \cosh y - \int_0^y \cosh t dt = y\cosh y - \sinh y$$

de donde se concluye finalmente que:

$$v(x,y) = (\sin x + x\cos x)\sinh y + \sin x(y \cosh y - \sinh y) = x \cos x \sinh y + y \sin x \cosh y$$

Asignación de Puntajes:
(a) Se deben probar ambas ecuaciones de CR.
Para el cálculo de $\partial_y v$ es sencillo. Al aplicar la fórmula de la indicación de CVV, el segundo término muere pues no depende de y y el primero arroja inmediatamente $\partial_x u$ (1 punto)

Para el cálculo de $\partial_x v$:
(0.5 puntos) Aplicar fórmula de CVV (dejando $\int \partial_x x u(x,t)dt - \partial_y u(x,0)$)
(0.5 puntos) Aplicar u armónica y cambiar derivadas c/r a x por derivadas c/r a y.
(0.5 puntos) Aplicar TFC y llegar a la segunda condición de CR

Por último (0.5 puntos) Aplicar el resultado que dice: Si (i) CR se cumple en un dominio y (ii) u, v

son $\mathcal{C}^1$ o u, v tienen las derivadas parciales $\mathcal{C}^1$, entonces f holomorfa en el dominio (en este caso en todo $\mathbb{C}$) (Si solo justifican/mencionan una de estas 2 condiciones, el puntaje solo es 0.3 puntos)

(b) El cálculo de las derivadas de u tiene 1 punto. Deducir que u es armónica tiene 0.5 puntos.
El cálculo explícito de $v(x, y)$ posee los 1.5 puntos restantes (Si se calcula la primitiva sin evaluar $\partial_y u(x, y)$ en $y = 0$ dar solo 0.5).

Pauta Control 2 - Cálculo Avanzado y Aplicaciones, Prof: C. Conca - R. Gormaz
Escuela de Ingeniería, Universidad de Chile
Jueves 18 de Octubre, 2012, **Tiempo 3:00 horas**
Auxiliares: Hugo Carrillo - Matías Godoy

Pregunta 2.

(a) (4 puntos) Encuentre los discos de convergencia de las siguientes series:

(i) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}(\ln(n))^n(z+1)^{n^2}$

(ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}n^{(\ln(n))^2}z^n$

(b) (2 puntos) Sea $f(z)=\frac{z}{z+1}$, encuentre la expansión en serie de $f(z)$ en torno al punto $z_0=0$ y calcule su radio de convergencia.

Solución:
(a)(i) Antes de intentar calcular el radio de convergencia es necesario escribir la serie de la forma:

$$\sum_{n\geq 0}a_n(z+1)^n$$

de donde se desprende que $a_0=a_1=0$ y en general:

$$a_n=\begin{cases}(\ln\sqrt{n})^{\sqrt{n}} & \text{si } n=k^2, k\in\mathbb{N}, k>1\\ 0 & \text{si no}\end{cases}$$

naturalmente, debido a como está definido a_n, no es posible usar el criterio del cuociente, por lo que se debe acudir al criterio de la raíz n-ésima para determinar el radio de convergencia, primero notemos que:

$$\sqrt[n]{|a_n|}=\begin{cases}\sqrt[n]{(\ln\sqrt{n})^{\sqrt{n}}}=(\ln\sqrt{n})^{\frac{1}{\sqrt{n}}} & \text{si } n=k^2, k\in\mathbb{N}, k>1\\ 0 & \text{si no}\end{cases}$$

de donde se concluye que:

$$\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}(\ln\sqrt{n})^{\frac{1}{\sqrt{n}}}$$

Para calcular este límite, aprovechemos que la función logaritmo es continua e inyectiva en $\mathbb{R}^+$, pues en tal caso:

$$\lim_n\ln((\ln\sqrt{n})^{\frac{1}{\sqrt{n}}})=\ln(\lim_n(\ln\sqrt{n})^{\frac{1}{\sqrt{n}}})$$

y gracias a la inyectividad podremos conocer el valor del límite sin ambiguedad. Se tiene entonces:

$$\lim_n\ln((\ln\sqrt{n})^{\frac{1}{\sqrt{n}}})=\lim_n\frac{\ln(\ln\sqrt{n})}{\sqrt{n}}=\lim_k\frac{\ln(\ln k)}{k}$$

y este último límite se puede calcular con la regla de L'Hopital (es de la forma ∞/∞) como:

$$\lim_k\frac{\ln(\ln k)}{k}=\lim_k\frac{\frac{1}{\ln k}\cdot\frac{1}{k}}{1}=\lim_k\frac{1}{k\ln k}=0$$

lo que, por inyectividad del logaritmo implica que:

$$\lim_{n\to\infty}(\ln\sqrt{n})^{\frac{1}{\sqrt{n}}}=1$$

luego el radio de convergencia $R = 1/1 = 1$ y por lo tanto el disco de convergencia es:

$$D = D(-1, 1) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z + 1| < 1\}$$

(a)(ii) En este caso es directo que:

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^{(\ln(n))^2}} = \lim_{n\to\infty} n^{\frac{(\ln(n))^2}{n}}$$

Al igual que en el caso anterior, utilizaremos la función logaritmo para simplificar el cálculo del límite, notar que:

$$\ln(n^{\frac{(\ln(n))^2}{n}}) = \frac{(\ln(n))^2}{n} \cdot \ln(n) = \frac{(\ln(n))^3}{n}$$

y para calcular el límite de esta última expresión, basta aplicar la regla de L'Hopital repetidas veces:

$$\lim_n \frac{(\ln(n))^3}{n} = \lim_n \frac{3 \cdot (\ln(n))^2 \cdot 1/n}{1} = \lim_n \frac{3 \cdot (\ln(n))^2}{n} = \lim_n \frac{6 \cdot (\ln(n)) \cdot 1/n}{1}$$
$$= \lim_n \frac{6 \cdot (\ln(n))}{n} = \lim_n \frac{6 \cdot 1/n}{1} = \lim_n \frac{6}{n} = 0$$

y por lo tanto:

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$$

por lo que $R = 1/1 = 1$, de donde se concluye que el disco de convergencia es:

$$D = D(0, 1) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$$

(b) Para este problema basta reconocer una suma geométrica (que será válida si $|-z| < 1$):

$$\frac{z}{z+1} = z \cdot \frac{1}{z+1} = z \cdot \frac{1}{1-(-z)} = z \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-z)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} z^n$$

así, hemos encontrado la serie de potencias alrededor de $z_0 = 0$. Para el radio de convergencia basta ver que:

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|(-1)^{n-1}|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1} = 1$$

de donde se concluye que $R = 1$.

Asignación de Puntajes: Para <u>cada</u> serie de **(a)** los 2 puntos se reparten:
0.5 puntos Explicitar cual es el límite (o $\limsup$) que se debe calcular
1.0 puntos por el cálculo
0.5 puntos por explicitar el disco de convergencia (Radio y centro)

Para **(b)**:
1.0 puntos por formar la serie, haciendo aparecer la suma de una serie geométrica (si se equivocan con el signo, es decir, ponen z^n en lugar de $(-z)^n$, solo 0.5 puntos).
1.0 puntos por radio de convergencia. Pueden calcularlo con la fórmula, o bien indicar que para la serie geométrica el radio es 1.

Pauta Control 2 - Cálculo Avanzado y Aplicaciones, Prof: C. Conca - R. Gormaz
Escuela de Ingeniería, Universidad de Chile
Jueves 18 de Octubre, 2012, **Tiempo 3:00 horas**
Auxiliares: Hugo Carrillo - Matías Godoy

Pregunta 3. Considere el polinomio $p(z) = (z + (1+i))\,(z + (1-i))$. Se desea calcular

$$I = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p'(it)}{p(it)}\,dt.$$

(i) **(1 punto)** Compruebe que $\dfrac{p'(z)}{p(z)} = \dfrac{1}{z+(1+i)} + \dfrac{1}{z+(1-i)}$.

(ii) **(2 puntos)** Para la curva Γ_R formada por los dos arcos regulares, $L_R = [-iR, iR]$ y la semicircunferencia $S_R = \{z \mid |z| = R,\ Re(z) \leq 0\}$ (curvas que dependen de $R > 0$), muestre que

$$\oint_{\Gamma_R} \frac{p'(z)}{p(z)}\,dz = \ 4\pi i,$$

si R es suficientemente grande.

(iii) **(2 puntos)** Muestre que

$$\lim_{R\to\infty}\int_{S_R}\frac{dz}{z+(1+i)} = \lim_{R\to\infty}\int_{S_R}\frac{dz}{z+(1-i)} = i\pi.$$

(iv) **(1 punto)** Usando los resultados anteriores, calcule

$$I = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{p'(it)}{p(it)}\,dt.$$

Solución: Por simplicidad notacional denotaremos a lo largo de esta pregunta $p_1 = -(1+i)$ y $p_2 = -(1-i)$, notar que en tal caso:

$$P(z) = (z-p_1)(z-p_2)$$

(i) Basta notar que $P'(z) = 1\cdot(z-p_2) + (z-p_1)\cdot 1 = (z-p_1) + (z-p_2)$ luego:

$$\frac{P'(z)}{P(z)} = \frac{(z-p_1)+(z-p_2)}{(z-p_1)(z-p_2)} = \frac{1}{z-p_1} + \frac{1}{z-p_2}$$

y se concluye lo pedido.

(ii) Notemos, de la parte anterior, que podemos escribir

$$\frac{P'(z)}{P(z)} = \frac{1}{z-p_1} + \frac{1}{z-p_2} = f_1(z) + f_2(z)$$

con $f_1 \in H(\mathbb{C}\setminus\{p_1\})$ y $f_2 \in H(\mathbb{C}\setminus\{p_2\})$. Así, si R es suficientemente grande (específicamente si $R > r = |p_1| = |p_2|$, pero basta decir que R debe ser suficientemente grande para encerrar a los puntos) se tiene que Γ_R encierra a p_1 y p_2, luego, en virtud del 'Teorema de la curva', se tiene que $\forall R > r$:

$$\oint_{\Gamma_R}\frac{P'(z)}{P(z)}dz = \oint_{\Gamma_R} f_1(z) + f_2(z)dz = \oint_{\Gamma_R} f_1(z)dz + \oint_{\Gamma_R} f_2(z)dz$$
$$= \oint_{\partial D(p_1,\varepsilon)} f_1(z)dz + \oint_{\partial D(p_2,\varepsilon)} f_2(z)dz$$

siempre que $\varepsilon > 0$ sea suficiemente pequeño tal que $D(p_1,\varepsilon)\cup D(p_2,\varepsilon) \subset$ Región encerrada por Γ_R
Finalmente, como estas últimas integrales son sobre circunferencias, se puede explicitar su valor en virtud de la fórmula integral de Cauchy, reconociendo en cada integral $f(z) = 1 \in H(\mathbb{C})$, y por lo tanto:

$$\oint_{\partial D(p_1,\varepsilon)} f_1(z)dz = \oint_{\partial D(p_1,\varepsilon)} \frac{1}{z-p_1}dz = \oint_{\partial D(p_1,\varepsilon)} \frac{f(z)}{z-p_1}dz = 2\pi i\cdot f(p_1) = 2\pi i$$

análogamente:

$$\oint_{\partial D(p_2,\varepsilon)} f_2(z)dz = \oint_{\partial D(p_2,\varepsilon)} \frac{1}{z-p_2}dz = \oint_{\partial D(p_2,\varepsilon)} \frac{f(z)}{z-p_2}dz = 2\pi i \cdot f(p_2) = 2\pi i$$

y por lo tanto:

$$\oint_{\Gamma_R} \frac{P'(z)}{P(z)}dz = 2\pi i + 2\pi i = 4\pi i$$

Observación: Es posible también que hayan identificado:

$$\oint_{\Gamma_R} \frac{P'(z)}{P(z)}dz = \oint_{\Gamma_R} \frac{1}{z-p_1}dz + \oint_{\Gamma_R} \frac{1}{z-p_2}dz = 2\pi i Ind_{\Gamma_R}(p_1) + 2\pi i Ind_{\Gamma_R}(p_1)$$

y luego, si R es suficientemente grande, entonces $Ind_{\Gamma_R}(p_1) = Ind_{\Gamma_R}(p_1) = 1$ de donde se concluye.

(iii) Veamos el primer límite, es decir, probemos que:

$$\lim_{R\to\infty} \int_{S_R} \frac{dz}{z-p_1} = \pi i$$

Dado $R > r$, explicitemos la integral, notar que una parametrización para S_R es: $\gamma(t) = Re^{it}$ con $t \in [\pi/2, 3\pi/2]$, luego $\gamma'(t) = iRe^{it}$, y por lo tanto:

$$\int_{S_R} \frac{dz}{z-p_1} = \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \frac{iRe^{it}}{Re^{it}-p_1}dt$$

la idea será reacomodar los términos de la integral de modo de que obtengamos la cantidad $i\pi$ y otra integral, la cual probaremos que converge a 0 si $R \to \infty$, para ello, notemos que:

$$\int_{\pi/2}^{3\pi/2} \frac{iRe^{it}}{Re^{it}-p_1}dt = \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \frac{iRe^{it}-ip_1+ip_1}{Re^{it}-p_1}dt = \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \frac{iRe^{it}-ip_1}{Re^{it}-p_1} + \frac{ip_1}{Re^{it}-p_1}dt$$

$$= \int_{\pi/2}^{3\pi/2} i + \frac{ip_1}{Re^{it}-p_1}dt = i\pi + i\int_{\pi/2}^{3\pi/2} \frac{p_1}{Re^{it}-p_1}dt$$

así, basta probar que $\lim_{R\to\infty} \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \frac{p_1}{Re^{it}-p_1}dt = 0$ para concluir.
Para probar esto, notemos primero que:

$$\left|\int_{\pi/2}^{3\pi/2} \frac{p_1}{Re^{it}-p_1}dt\right| \leq \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \frac{|p_1|}{|Re^{it}-p_1|}dt$$

ahora, recordando que de la desigualdad triangular se puede probar que:

$$||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2| \quad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$$

entonces se tiene que:

$$||Re^{it}| - |p_1|| \leq |Re^{it} - p_1| \Rightarrow \frac{1}{|Re^{it}-p_1|} \leq \frac{1}{||Re^{it}| - |p_1||} = \frac{1}{R-|p_1|}$$

esto último pues $R > r$, y luego:

$$\int_{\pi/2}^{3\pi/2} \frac{|p_1|}{|Re^{it}-p_1|}dt \leq \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \frac{|p_1|}{R-|p_1|}dt = \frac{|p_1|}{R-|p_1|} \cdot \pi$$

pues la cantidad $\frac{|p_1|}{R-|p_1|}$ no depende de t, por lo tanto tenemos:

$$\left|\int_{\pi/2}^{3\pi/2} \frac{p_1}{Re^{it}-p_1}dt\right| \leq \frac{|p_1|}{R-|p_1|} \cdot \pi = \frac{\sqrt{2}}{R-\sqrt{2}}$$

luego, como $\lim_{R\to\infty} \frac{\sqrt{2}}{R-\sqrt{2}} = 0$ se deduce:

$$\lim_{R\to\infty} \left| \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \frac{p_1}{Re^{it}-p_1} dt \right| = 0$$

y por lo tanto:

$$\lim_{R\to\infty} \int_{S_R} \frac{dz}{z-p_1} = i\pi + \lim_{R\to\infty} \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \frac{p_1}{Re^{it}-p_1} dt = i\pi + 0 = i\pi$$

que era lo deseado. Notemos que para p_2 el procedimiento es análogo, pues solo requería que p sea constante. Por lo tanto:

$$\lim_{R\to\infty} \int_{S_R} \frac{dz}{z-p_1} = \lim_{R\to\infty} \int_{S_R} \frac{dz}{z-p_2} = i\pi$$

(iv) Queremos calcular

$$I = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{P'(it)}{P(it)} dt$$

Notemos que en **(ii)** probamos que, para R suficientemente grande se tiene:

$$\oint_{\Gamma_R} \frac{P'(z)}{P(z)} dz = 4\pi i = \int_{L_R} \frac{P'(z)}{P(z)} dz + \int_{S_R} \frac{P'(z)}{P(z)} dz$$

pero, notemos que una parametrización de L_R es $\gamma(t) = it$ con $t \in [-R, R]$, luego $\gamma'(t) = i$, y por lo tanto:

$$\int_{L_R} \frac{P'(z)}{P(z)} dz = \int_{-R}^{R} \frac{P'(it)}{P(it)} i dt = i \int_{-R}^{R} \frac{P'(it)}{P(it)} dt$$

por otro lado, en **(iii)** vimos que:

$$\lim_{R\to\infty} \int_{S_R} \frac{dz}{z-p_1} = \lim_{R\to\infty} \int_{S_R} \frac{dz}{z-p_2} = i\pi$$

así, entonces:

$$\begin{aligned}
\lim_{R\to\infty} \oint_{\Gamma_R} \frac{P'(z)}{P(z)} dz = 4\pi i &= \lim_{R\to\infty} \int_{L_R} \frac{P'(z)}{P(z)} dz + \lim_{R\to\infty} \int_{S_R} \frac{P'(z)}{P(z)} dz \\
&= \lim_{R\to\infty} i \int_{-R}^{R} \frac{P'(it)}{P(it)} dt + \lim_{R\to\infty} \int_{S_R} \frac{dz}{z-p_1} + \lim_{R\to\infty} \int_{S_R} \frac{dz}{z-p_2} \\
&= \lim_{R\to\infty} i \int_{-R}^{R} \frac{P'(it)}{P(it)} dt + 2\pi i + 2\pi i = i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{P'(it)}{P(it)} dt + 4\pi i
\end{aligned}$$

de donde despejando, se obtiene:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{P'(it)}{P(it)} dt = 1$$

que es lo buscado.

Asignación de Puntajes: Para **(i)** 1 punto por el cálculo (que es directo)
(ii) Decir que para R grande ambas singularidades quedan enceradas por la curva tiene 1 punto
Aplicar la Fórmula integral de Cauchy para cada integral y en cada caso obtener $2\pi i$ tiene 0.5 + 0.5 puntos
(iii) Parametrizar la semicircunferencia (con t de $\pi/2$ a $3\pi/2$ por ejemplo) y escribir claramente lo que se debe probar que converge a πi tiene 0.5 puntos
Argumentar que el integrando converge a πi si $R \to \infty$ sin mayor detalle tiene solo 0.5 puntos (por ejemplo, se divide numerador y denominador por Re^{it})
Probar que converge, acotando las integrales y viendo en detalle la convergencia tiene 1.5 puntos
(iv) Escribir la ecuación que se cumple para cada R (grande) parametrizando el tramo L_R tiene 0.5

puntos
Finalmente, tomar límites, usando los resultados previos y obtener lo pedido tiene los 0.5 puntos restantes.