Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática

Universidad de Chile
Semestre Otoño, 2017

MA2002 Cálculo Avanzado y Aplicaciones
Profesores: Juan Dávila, Manuel del Pino, Gino Montecinos

Control 2

Jueves 1 de junio, 2017

P1. **(a)** 2 ptos. Verifique el teorema de Stokes para

$$\vec{\mathbf{F}} = y\hat{\imath} + z\hat{\jmath} + x\hat{k} \ ,$$

y la superficie dada por el paraboloide

$$z = 1 - (x^2 + y^2) \quad \text{y} \quad z \geq 0.$$

(b) 2 ptos. Sea C una curva cerrada que encierra una superficie de área 30. Si C está parametrizada por

$$\vec{\mathbf{r}}(s) = (x(s), y(s), 2),$$

con $s \in [0,1]$, calcule la integral de línea $\int_C \vec{\mathbf{F}}(\vec{\mathbf{r}}(s)) \cdot \vec{\mathbf{r}}'(s)ds$, donde $\vec{\mathbf{F}} = (y, xz^2 + x, -zx^2 + y^2)$.

Hint: Use el teorema de Stokes para evaluar la integral, es decir, calcule el rotor de $\vec{\mathbf{F}}$. Considere el vector normal con orientación positiva.

(c) 2 ptos. Hallar el trabajo realizado por el campo $\vec{F} = (x(1+2z)+y)\hat{\imath} + (2y+x)\hat{\jmath} + (y+x^2)\hat{k}$ a lo largo del arco mas corto sobre la circunferencia sobre la esfera que une los puntos $A = (3,4,0)$ y $B = (0,0,5)$.

Hint: Use el teorema Stokes para evaluar la integral. Considere la curva cerrada indicada en la figura 1. Utilice la parametrización $\vec{\varphi}(u,v) = (\frac{3}{5} \cdot u \cdot sin(v), \frac{4}{5} \cdot u \cdot sin(v), u \cdot cos(v))$, con $0 \leq u \leq 5$, $0 \leq v \leq \frac{\pi}{2}$.

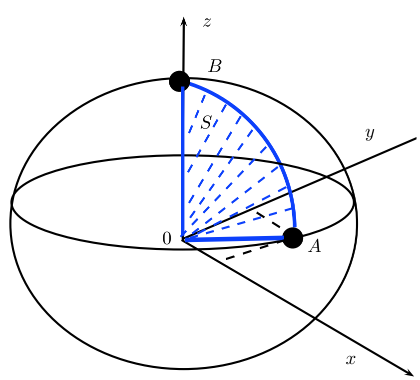

Figura 1: Superficie S, con bordes $\widehat{AB} + \overline{BO} + \overline{OA}$.

P2. **(a)** 2 ptos. Si $u(x,y) = x^2 - y^2 + \frac{1}{2}log(x^2+y^2)$ corresponde a la parte real de una función holomorfa $f(z)$, encuentre la parte imaginaria $v(x,y)$ sabiendo que $f(1) = 1$.

(b) 2 ptos. Considere $f = u + iv$ holomorfa. Sean $\gamma_1(x) = (x, y_1(x))$ y $\gamma_2(x) = (x, y_2(x))$ curvas en el plano $x - y$ tales que por $u(x, y_1(x))) = u_0$ y $v(x, y_2(x)) = v_0$ con u_0 y v_0 constantes.

Pruebe que si $(x, y_1(x))$ y $(x, y_2(x))$ se intersectan en un punto (x_0, y_0) entonce son ortogonales en $x = x_0$.

Hint: Calcule las pendientes $y'(x)$ de cada curva utilizando la derivada implícita de y en función de x mediante $u(x,y)$ y $v(x,y)$, respectivamente.

(c) 2 ptos. Verifique lo anterior para $f(z) = z + iz$. Grafique las curvas ortogonales para todos los casos; $u_0 = v_0 = 0$, $u_0 > 0$, $u_0 < 0$, $v_0 > 0$ y $v_0 < 0$.

P3. **(a)** 1.5 ptos. Encuentre la serie de potencias de la función $h(z) = \log(1+z^2)/z$ en torno al punto $z = 0$ e indique su radio de convergencia. (Utilice la rama del logaritmo tal que $Im(\log(w)) \in (-\pi, \pi]$.)

(b) 1.5 ptos. Sea $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ con $a_n = (\frac{n}{n+5})^{n^2}$, calcule su radio de convergencia R.

(c) Asumiendo que el radio de convergencia de la serie $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ es $0 < R < \infty$, calcule el radio de convergencia de las siguientes series:

i) 1 pto. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} z^n$.
Hint: Calcule el radio de convergencia de la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$.

ii) 1 pto. $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^{mn}$, con $m \in \mathbb{N}$, $m > 0$.

iii) 1 pto. $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^2 z^n$.

Tiempo: 3 horas.

MA2002 Cálculo Avanzado y Aplicaciones
Profesores: Juan Dávila, Manuel del Pino, Gino Montecinos

Control 2

Jueves 17 de noviembre 2016

P1. **(a)** 2 ptos. Verifique el teorema de Stokes para

$$\vec{\mathbf{F}} = y\hat{\imath} + z\hat{\jmath} + x\hat{k} \;, \tag{1}$$

y superficie dada por el paraboloide

$$z = 1 - (x^2 + y^2) \tag{2}$$

y $z \geq 0$.
Solución: La frontera de la superficie corresponde al circulo, $x^2 + y^2 = 1$. De modo que consideremos la parametrización del circulo: $\vec{\mathbf{r}}(\theta) = (\cos(\theta), \sin(\theta), 0)$. Luego $\vec{\mathbf{F}}(\mathbf{r}(\theta)) = (\sin(\theta), 0, \cos(\theta))$, con $\theta \in [0, 1]$. Por otro lado, $\vec{\mathbf{r}}' = (-\sin(\theta), \cos(\theta), 0)$. Luego

$$\vec{\mathbf{F}}(\vec{\mathbf{r}}(\theta)) \cdot \vec{\mathbf{r}}(\theta) = -\sin^2(\theta), \tag{3}$$

de modo que

$$\oint \vec{\mathbf{F}} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} \vec{\mathbf{F}}(\vec{\mathbf{r}}(\theta) \cdot \vec{\mathbf{r}}(\theta) d\theta = -\int_0^{2\pi} \sin^2(\theta) d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1-\cos(2\theta)}{2} d\theta = \frac{-2\pi}{2} = -\pi \;. \tag{4}$$

Por otro lado, $rot\tilde{\mathbf{F}} = (-1, -1, -1)$.
Para obtener un vector normal, notamos que la superficie puede ser parametrizada por $\vec{\psi}(x, y) = (x, y, 1 - (x^2 + y^2))$. De modo que un vector normal corresponde a

$$\frac{\partial \vec{\psi}}{\partial x} \times \frac{\partial \vec{\psi}}{\partial y} = (2x, 2y, 1) \;.$$

Otra opción: recuerde que dado un campo escalar, g, ∇g es siempre perpendicular a las curvas equipotenciales, en particular si consideramos $g(x, y, z) = z - 1 + (x^2 + y^2))$, que contiene a la parametrización $z = 1 - (x^2 + y^2)$, vemos que un vector normal a la superficie puede ser $\nabla g(x, y, z)$, es decir, $\mathbf{n} = (2x, 2y, 1)$.
Luego

$$\begin{gathered} \int\int_S rot\vec{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{n} dA = \\ \int\int_S (-1, -1, -1) \cdot (2x, 2y, 1) dxdy = \int\int_S (-2x - 2y - 1) dA = \\ \int_0^{2\pi}\int_0^1 (-2r(\cos(\theta) + \sin(\theta)) - 1) r dr d\theta = \\ \int_0^{2\pi} (-\frac{2}{3}(\cos(\theta) + \sin(\theta)) - \frac{1}{2}) d\theta = 0 + 0 - \frac{1}{2}(2\pi) = -\pi. \end{gathered} \tag{5}$$

Puntaje :

- 0.25 Determinar la frontera de la superficie y la parametrización de dicha frontera.
- 0.25 Calcular la derivada de la parametrización, $\vec{r}'(t)$.
- 0.25 Evaluar la parametrización en el campo vectorial, calcular la integral de linea.
- 0.25 Determinar una parametrización para la superficie.
- 0.25 Obtener el vector normal.
- 0.25 Calcular el rotor de $\vec{F}$ y evaluar en la parametrización
- 0.25 Calcular la integral de superficie del $rot\vec{F} \cdot \hat{n}$ sobre S.

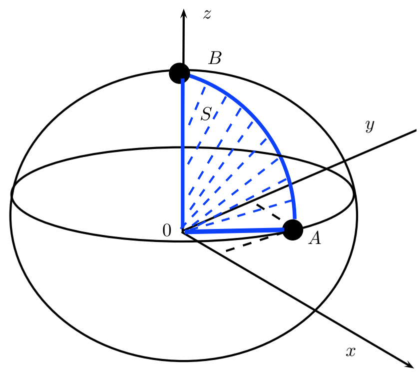

Figura 1: Superficie S, con bordes $\widehat{AB} + \overline{BO} + \overline{OA}$.

- 0.25 Concluir que ambas integrales de linea y de superficie coinciden.

(b) 2 ptos. Sea C una curva cerrada que encierra una superficie de área 30. Si C está parametrizada por

$$\vec{\mathbf{r}}(s) = (x(s), y(s), 2),$$

con $s \in [0,1]$, calcule la integral de linea $\int_C \vec{\mathbf{F}}(\vec{\mathbf{r}}(s)) \cdot \vec{\mathbf{r}}'(s) ds$, donde $\vec{\mathbf{F}} = (y, xz^2 + x, -zx^2 + y^2)$.

Hint: Use Stokes para evaluar la integral, es decir, calcule el rotor de $\vec{\mathbf{F}}$. Considere el vector normal con orientación positiva.

Solución: Del teorema de Stokes

$$\oint \vec{\mathbf{F}}(\vec{\mathbf{r}}) \cdot \mathbf{dr} = \int\int_S rot\vec{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{n} dA \ . \tag{6}$$

Por otro lado, note que la superficie está ubicada en el plano $z = 2$, luego un vector normal con orientación positiva es $\mathbf{n} = (0, 0, 1)$. Así, si definimos $\vec{\mathbf{F}} = F_1\hat{\imath} + F_2\hat{\jmath} + F_3\hat{k}$, con $F_1 = y, F_2 = xz^2 + x, F_3 = -zx^2 + y^2$, tenemos

$$rot\vec{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{n} = \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F1}{\partial y} = (z^2 + 1) - (1) = z^2 \ , \tag{7}$$

como estamos en el plano $z = 2$, $rot\vec{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{n} = z^2 = 2^2 = 4$, luego

$$\oint \vec{\mathbf{F}}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{dr} = \int\int 4dA = 4 \int\int dA = 4 \cdot 30 = 120 \ . \tag{8}$$

Puntaje :

- 0.5 Calcular el rotor de $\vec{F}$.
- 0.5 Encontrar el vector normal de la superficie con orientación positiva.
- 0.5 Evalue el $rot\vec{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{n}$ en la parametrización.
- 0.5 Calcular la integral de superficie de $rot\vec{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{n}$.

(c) 2 ptos. Hallar el trabajo realizado por el campo $\vec{F} = (x(1+2z) + y)\hat{\imath} + (2y + x)\hat{\jmath} + (y + x^2)\hat{k}$ a lo largo del arco mas corto sobre la circunsferencia sobre la esfera que une los puntos $A = (3, 4, 0)$ y $B = (0, 0, 5)$.

Hint: Use Stokes para evaluar la integral. Considere la curva cerrada indicada en la figura 1. Utilice la parametrización de S dada por $\vec{\varphi}(u, v) = (\frac{3}{5} \cdot u \cdot sin(v), \frac{4}{5} \cdot u \cdot sin(v), u \cdot cos(v))$, con $0 \leq u \leq 5$, $0 \leq v \leq \frac{\pi}{2}$.

Solución: Dada la parametrización $\vec{\varphi}(u, v)$ de la superficie S, obtenemos el vector normal como

$$\hat{\mathbf{n}} = \partial_v \vec{\varphi} \times \partial_u \vec{\varphi} = \left(\frac{4}{5}u, -\frac{3}{5}u, 0 \right) \ , \tag{9}$$

además

$$rot\vec{F} = (1, 0, 0) \ . \tag{10}$$

Luego

$$\int\int_S rot\vec{F}\cdot\hat{\mathbf{n}}dA = \int_0^5\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1,0,0)\cdot\left(\tfrac{4}{5}u,-\tfrac{3}{5}u,0\right)dudv = \int_0^5\int_0^{\frac{\pi}{2}} ududv = 5\pi\ . \tag{11}$$

Por otro lado, del teorema de Stokes, tenemos que

$$\int_{\widehat{AB}}\vec{F}\cdot dr + \int_{\overline{BO}}\vec{F}\cdot dr + \int_{\overline{OA}}\vec{F}\cdot dr = \int\int_S rot\vec{F}\cdot\hat{\mathbf{n}}dA\ . \tag{12}$$

Así calculando el trabajo de $\vec{F}$ sobre $\overline{BO}$ y $\overline{OA}$ obtenemos el trabajo de $\vec{F}$ sobre el arco $\widehat{AB}$. En efecto, una parametrización de $\overline{BO}$ es $\vec{r}(t) = (0,0,5-t)$ con $0\le t\le 5$, luego $\vec{F}(t)\cdot\vec{r}'(t) = 0$

$$\int_{\overline{BO}}\vec{F}\cdot dr = \int_0^5\vec{r}(t)\cdot\vec{r}'(t)dt = 0\ . \tag{13}$$

Por otro lado, una parametrización de $\overline{OA}$ es $\vec{r}(t) = (t, 4/3t, 0)$ con $0\le t\le 3$ de modo que

$$\vec{r}'(t) = (1, 4/3, 0)\ ,$$

así

$$\vec{F}(t)\cdot\vec{r}'(t) = (1,4/3,0) = \frac{65}{9}t\ ,$$

$$\int_{\overline{OA}}\vec{F}\cdot dr = \int_0^3\vec{F}(\vec{r}(t))\cdot\vec{r}'(t)dt = \tfrac{65}{2}\ . \tag{14}$$

De modo que

$$\int_{\widehat{AB}}\vec{F}\cdot dr = 5\pi - \frac{65}{2}\ . \tag{15}$$

Puntaje :

- 0.5 Calcular el vector normal de la superficie con orientación positiva.
- 0.5 Evalue el $rot\vec{\mathbf{F}}\cdot\mathbf{n}$ en la parametrización.
- 0.25 Usar el teorema de Stokes, componer el camino cerrado que conteniendo el arco requerido.
- 0.25 Determinar las parametrizaciones de los segmentos indicados en la figura y relevantes para realizar los cálculos.
- 0.25 Evaluar el campo vectorial en las parametrizaciones y calcular sus integrales.
- 0.25 Calcular la integral buscada mediante la descomposición del teorema de superficie y las integrales de linea sobre los segmentos.

P2. **(a)** 2 ptos. Si $u(x,y) = x^2 - y^2 + \frac{1}{2}log(x^2+y^2)$ corresponde a la parte real de una función holomorfa $f(z)$. Encuentre la parte imaginaria $v(x,y)$ sabiendo que $f(1) = 1$.

Solución: Si $f(z) = u + iv$ es holomorfa, entonces las condiciones de Cauchy-Riemann se satisfacen. Es decir

$$\tfrac{\partial u}{\partial x} = \tfrac{\partial v}{\partial y}\ ,\quad \tfrac{\partial v}{\partial x} = -\tfrac{\partial u}{\partial y}\ . \tag{16}$$

Usaremos estas relaciones para encontrar v. En efecto,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x}{y^2+x^2} + 2x = \frac{\partial v}{\partial y}\ , \tag{17}$$

integrando

$$\begin{aligned} v(x,y) &= \int\left(\frac{x}{y^2+x^2} + 2x\right)dy\ ,\\ &= \text{atan}\left(\tfrac{y}{x}\right) + 2xy + k(x)\ , \end{aligned} \tag{18}$$

con k una constante de integración con respecto a y. Para encontrar $k(x)$, usamos nuevamente Cauchy-Riemann. Diferenciamos con respecto a x para obtener

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial x} = \tfrac{-y}{x^2+y^2} + 2y + k'(x) = -\tfrac{\partial u}{\partial y} = -(\tfrac{y}{y^2+x^2} - 2y) \ , \\ k'(x) = 0 \ , \end{aligned} \tag{19}$$

por tanto, $k(x) = a$, con a una constante, es decir, $v(x, y) = \operatorname{atan}\left(\frac{y}{x}\right) + 2xy + a$. Para obtener a evaluamos $f(1) = 1 = u(1, 0) + iv(1, 0) = 1 + i(\frac{\pi}{2} + a)$, luego $a = -\frac{\pi}{2}$.

Puntaje :

- 0.75 Utilizar Cacuhy-Riemann para encontrar parte real (imaginaria).
- 0.75 Diferenciar y utilizar Cauchy-Riemann para encontrar la parte imaginaria (real), faltante.
- 0.5 Utilizat la informacion de f en 1 para determinar la constante.

(b) 1.5 ptos. Considere $f = u + iv$ holomorfa. Sean $\gamma_1(x) = (x, y_1(x))$ y $\gamma_2(x) = (x, y_2(x))$ curvas en el plano $x - y$ definida por $u(x, y) = u_0$ y $v(x, y) = v_0$ respectivamente, con u_0 y v_0 constantes.

Pruebe que si $(x, y_1(x))$ y $(x, y_2(x))$ se intersectan en un punto (x_0, y_0) entonce las curvas $y_1(t)$ e $y_2(t)$ son ortogonales en $x = x_0$.

Hint: Calcule las pendientes $y'(x)$ de cada curva utilizando la derivada implícita de y en función de x mediante $u(x, y)$ y $v(x, y)$, respectivamente.

Solución: Como $f = u + iv$ es holomorfa

$$\tfrac{\partial u}{\partial x} = \tfrac{\partial v}{\partial y} \ , \ \ \tfrac{\partial v}{\partial x} = -\tfrac{\partial u}{\partial y} \ , \tag{20}$$

como u_0 es constante, entonces se cumple que

$$0 = \frac{du_0}{dx} = \frac{du(x, y_1(x))}{dx} = u_x(x, y_1) + u_y(x, y_1)\frac{dy_1}{dx} \ , \tag{21}$$

es decir,

$$\frac{dy_1}{dx} = -\frac{u_y(x, y_1)}{u_x(x, y_1)} \ . \tag{22}$$

Del mismo modo, como v_0 es constante, se cumple que

$$0 = \frac{dv_0}{dx} = \frac{dv(x, y_2(x))}{dx} = v_x(x, y_2) + v_y(x, y_2)\frac{dy_2}{dx} \ , \tag{23}$$

es decir,

$$\frac{dy_2}{dx} = -\frac{v_y(x, y_2)}{v_x(x, y_2)} \ . \tag{24}$$

Luego como ambas curvas pasan por (x_0, y_0), entonces $y_1(x_0) = y_2(x_0) = y_0$. Así usando Cauchy-Riemann, obtenemos

$$\frac{dy_1(x_0)}{dx} = -\frac{u_y(x_0, y_1(x_0))}{u_x(x_0, y_1(x_0))} = -\frac{-v_x(x_0, y_2(x_0))}{v_y(x_0, y_2(x_0))} = -\frac{1}{\frac{dy_2(x_0)}{dx}} \ , \tag{25}$$

es decir,

$$\frac{dy_1(x_0)}{dx} \cdot \frac{dy_2(x_0)}{dx} = -1 \ . \tag{26}$$

Puntaje :

- 0.5 Usar el hecho que $u(x, y) = cte$ y $v(x, y) = cte$ definen curvas y en función de x.
- 0.5 Diferenciar $u(x, y) = cte$ y $v(x, y) = cte$ con respecto a x para obtener implícitamente la forma de las pendientes y'.

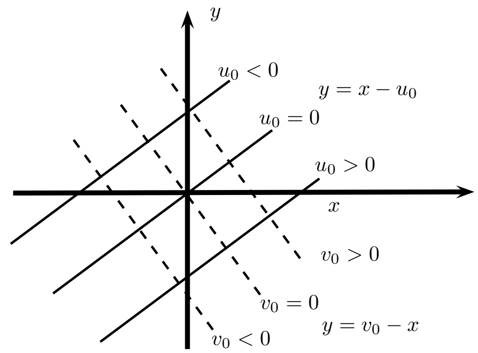

Figura 2: Familias ortogonales: $y = x - u_0$ y $y = v_0 - x$.

- 0.5 Utilizar que dos curvas coinciden en un punto junto con Cacuhy-Riemann para ver que el productor de ambas curvas es -1.

(c) 1.5 ptos. Verifique lo anterior para $f(z) = z + iz$. Grafique las curvas ortogonales para todos los casos; $u_0 = v_0 = 0$, $u_0 > 0$, $u_0 < 0$, $v_0 > 0$ y $v_0 < 0$

Solución: $f(z) = u + iv$ con

$$u(x, y) = x - y \ , \tag{27}$$

$$v(x, y) = x + y \ , \tag{28}$$

luego $u(x, y) = u_0$ genera la familia de rectas $y = x - u_0$ y $v(x, y) = v_0$ genera la familia de rectas $y = v_0 - x$. Luego es fácil ver que las pendientes de estas rectas es -1, de modo que son perpendiculares. Esto se muestra gráficamente en la figura 2.

Puntaje :

- 0.25 Determinar las partes real e imaginaria de f.
- 0.5 Determinar la familia de rectas que genera la parte real.
- 0.5 Determinar la familia de rectas que genera la parte imaginaria.
- 0.25 Comprobar que el producto de las pendientes es -1, graficar.

P3. **(a)** 2 ptos. Encuentre la serie de potencias de la función $h(z) = \log(1 + z^2)/z$ en torno al punto $z = 0$ e indique su radio de convergencia. (Utilice la rama del logaritmo tal que $Im(\log(w)) \in (-\pi, \pi]$.)

Solución: Sabemos que $log(w) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1}(w-1)^{k+1}$ con radio de convergencia $|w - 1| < 1$. Luego con $w = 1 + z^2$, tenemos

$$h(z) = \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1}(1 + z^2 - 1)^{k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k+1)} z^{2k+1} \ , \tag{29}$$

si $z = x+iy$, vemos que el radio de convergencia es $|w-1| = |z^2| = \sqrt{(x^2 - y^2)^2 + 4x^2y^2} = (\sqrt{(x^2 + y^2)})^2 < 1$ o bien $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} < 1$.

Puntaje :

- 0.5 Usar la forma de una serie conocida, en este caso $log(z)$ junto a su radio de convergencia.
- 0.5 Introducir un cambio de variable que permita utilizar la serie conocida.
- 1.0 Determinar el radio de convergencia.

(b) 2 ptos. Sea $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ con $a_n = (\frac{n}{n+5})^{n^2}$, calcule su radio de convergencia $R > 0$.

Solución: Por definición el radio de convergencia se obtiene mediante

$$\frac{1}{R} = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|(\frac{k}{k+5})^{k^2}|} = \lim_{k\to\infty} (\frac{k}{k+5})^k \ . \tag{30}$$

Por otro lado, vemos que

$$\frac{1}{R} = \lim_{k\to\infty} (\frac{k}{k+5})^k = \lim_{k\to\infty} (\frac{k+5}{k})^{-k} = \lim_{k\to\infty} (1 + \frac{5}{k})^{-k} = (\lim_{k\to\infty} (1 + \frac{1}{\frac{k}{5}})^{\frac{k}{5}})^{-5} = e^{-5} \ . \tag{31}$$

Así el radio de convergencia es $R = e^5$.

Puntaje :

- 0.5 Utilizar la definición del radio de convergencia.
- 0.5 Usar la convergencia del limite $lim_n(1+1/n)^n$.
- 1.0 Determinar el radio de convergencia buscado.

(c) Asumiendo que el radio de convergencia de la serie $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ es R, calcule el radio de convergencia de las siguientes series:

i) 1 pto. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} z^n$.
Hint: Calcule el radio de convergencia de la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$.
Solución: Para calcular el radio de convergencia usemos la formula

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{R_0} &= \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{\tfrac{a_n}{n!}} \\ &= \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_n} \cdot \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{\tfrac{1}{n!}} \ . \end{aligned} \tag{32}$$

Por otro lado, notemos que $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|z|^n}{n!}$ converge a $e^{|z|}$ cuyo radio de convergencia es $R_1 = \infty$. Luego

$$\tfrac{1}{R_0} = \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_n} \cdot \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{\tfrac{1}{n!}} = \tfrac{1}{R} \cdot \tfrac{1}{R_1} = 0 \ , \tag{33}$$

es decir, $R_0 = \infty$.

Puntaje :

- 0.5 Uso de la definición del limite.
- 0.5 Usar la forma de una serie conocida.

ii) 1 pto. $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^{mn}$, con $n \in \mathbb{N}$.
Solución: Note que $a_k = 0$ para $k \neq 0_m$ es decir, solos los coeficientes múltiplos de m son no nulos, luego solo tiene sentido estimar el radio de convergencia para coeficientes múltiplos de m, es decir

$$\tfrac{1}{R_0} = \limsup_{k\to\infty} \sqrt[mk]{a_k} = \left(\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k}\right)^{\frac{1}{m}} = (R^{-1})^{\frac{1}{m}} = (e^{-5})^{\frac{1}{m}}, \tag{34}$$

luego $R_0 = e^{\frac{5}{m}}$.

Puntaje :

- 0.5 Uso de la definición del limite.
- 0.5 Usar la forma de una serie conocida.

iii) 1 pto. $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^2 z^n$.
Solución: Nuevamente por definición

$$\tfrac{1}{R_0} = \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k^2} = \left(\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k}\right)^2 = R^{-2} \ , \tag{35}$$

luego $R_0 = R^2 = e^{10}$.

Puntaje :

- 0.5 Uso de la definición del limite.
- 0.5 Usar la forma de una serie conocida.

Tiempo: 3 horas.