Pauta Control 2
Cálculo Avanzado y Aplicaciones 2013/2

Prof: J. Dávila, Auxiliares: R. Bobadilla, A. Bustos

Pregunta 1.
(a) Determine en qué región es diferenciable la función

$$f(x+iy) = x^2 + y^2 + \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + i\frac{2xy}{x^2+y^2}.$$

(b) Encuentre el desarrollo en serie de potencias de

$$\frac{z^4}{(1-z^3)^2}$$

en torno de 0, indicando el radio de convergencia.

(c) Suponga que $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es analítica en $\mathbb{C}$. Pruebe que $g(z) = \overline{f(\overline{z})}$ es analítica en $\mathbb{C}$.

Solución.
(a) Escribamos $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ con

$$u(x,y) = x^2 + y^2 + \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$$
$$v(x,y) = \frac{2xy}{x^2+y^2}.$$

Calculamos las derivadas

$$\partial_x u = \partial_x(x^2 + y^2 + \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}) = 2x + \frac{4xy^2}{(x^2+y^2)^2}$$
$$\partial_y u = \partial_y(x^2 + y^2 - \frac{y^2-x^2}{x^2+y^2}) = 2y - \frac{4yx^2}{(x^2+y^2)^2}$$
$$\partial_x v = \partial_x(\frac{2xy}{x^2+y^2}) = \frac{2y^3-2yx^2}{(x^2+y^2)^2}$$
$$\partial_y v = \partial_y(\frac{2xy}{x^2+y^2}) = \frac{2x^3-2xy^2}{(x^2+y^2)^2}$$

calcular derivadas: 1 pto.

Veamos en qué puntos se satisfacen las condiciones de Cauchy-Riemann: $\partial_x u = \partial_y v$

$$x(x^2+y^2)^2 + 2xy^2 = x^3 - xy^2$$

$\partial_y u = -\partial_x v$

$$y(x^2+y^2)^2 - 2x^2y = -y^3 + x^2y.$$

condiciones de Cauchy-Riemmann: 0,5

Supongamos $x \neq 0$, $y \neq 0$. De la primera ecuación tenemos

$$(x^2+y^2)^2 = x^2 - 3y^2$$

y de la segunda

$$(x^2+y^2)^2 = -y^2 + 3x^2$$

por lo que
$$x^2 - 3y^2 = -y^2 + 3x^2$$
es decir
$$0 = 2y^2 + 2x^2,$$
y por lo tanto $x = y = 0$. Esto no es posible porque f no está definida en $z = 0$.

Supongamos $y = 0$. La segunda ecuación se satisface automáticamente y la primera nos da
$$x^5 = x^3.$$
Descartando $x = 0$, tenemos $x^2 = 1$, y así $x = \pm 1$.

Supongamos $x = 0$. La primera ecuación se satisface y la segunda nos da
$$y^5 = -y^3.$$
De nuevo, descartando $y = 0$ encontramos $y^2 = -1$, que no tiene solución real. Por lo tanto hemos encontrado que f es diferenciable en $z = \pm 1$.

resolver y llegar a la conclusión: 0,5

(b) Primero notemos que
$$\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{1-z^3}\right) = \frac{3z^2}{(1-z^3)^2}$$

esta observación: 0,4

Podemos expandir, para $|z| < 1$
$$\frac{1}{1-z^3} = \sum_{k=0}^{\infty} z^{3k}.$$

serie geométrica: 0,4

y derivando
$$3\frac{z^2}{(1-z^3)^2} = \sum_{k=1}^{\infty} 3kz^{3k-1}.$$

derivar: 0,4

Por lo tanto
$$\frac{z^2}{(1-z^3)^2} = \sum_{k=1}^{\infty} kz^{3k-1}.$$
y entonces
$$\frac{z^4}{(1-z^3)^2} = \sum_{k=1}^{\infty} kz^{3k+1}.$$

serie: 0,4

La podemos escribir como
$$\frac{z^4}{(1-z^3)^2} = \sum_{j=1}^{\infty} a_j z^j$$
Donde
$$a_j = \begin{cases} \frac{j-1}{3} & j = 3k+1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Finalmente el radio de convergencia es 1, lo que resulta de
$$\lim \frac{1}{\sqrt[j]{\frac{j-1}{3}}} = 1.$$

radio de convergencia: 0,4

(c) Primero escribamos $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ lo que implica que
$$\overline{f(\overline{z})} = u(x,-y) - iv(x,-y) = \tilde{u}(x,u) + i\tilde{v}(x,y).$$

Con esto

identificar parte real e imaginaria de la nueva función: 0,5

$$
\begin{aligned}
\partial_x \tilde{u}(x,y) &= \partial_x u(x,-y)\\
\partial_y \tilde{u}(x,y) &= -\partial_y u(x,-y)\\
\partial_x \tilde{v}(x,y) &= -\partial_x v(x,-y)\\
\partial_y \tilde{v}(x,y) &= \partial_y v(x,-y)
\end{aligned}
$$

relacionar derivadas

Verifiquemos las condiciones de Cauchy-Riemann es sencillo teniendo en cuenta que se cumple para la función original.

$$
\begin{aligned}
\partial_x \tilde{u}(x,y) &= \partial_x u(x,-y) = \partial_y v(x,-y) = \partial_y \tilde{v}(x,y)\\
\partial_y \tilde{u}(x,y) &= -\partial_y u(x,-y) = \partial_x v(x,-y) = -\partial_x \tilde{v}(x,y).
\end{aligned}
$$

verificar CR: 1

Pregunta 2.
(a) Calcule

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)(x^2-4)}\, dx.$$

(b) Para $a > 0$, calcule

$$\int_{0}^{\pi/2} \frac{1}{a^2+\sin^2(x)}\, dx$$

(c) Calcule

$$\int_I \frac{e^z}{(z+1)^4}\, dz.$$

donde I es el eje imaginario, desde $-i\infty$ hasta $i\infty$. Se sugiere considerar un camino de $-iR$ a iR y luego una semicircunferencia de radio R, donde $R \to \infty$.

Solución.

(a) Usaremos teorema de los residuos, integrando sobre una semicircunferencia ubicada en el semiplano superior. Como el numerador de la función es un polinomio de grado 2, mientras que el denominador es de grado 4, podemos asegurar que cuando $R \to \infty$ la integral sobre la parte curva de la semicircunferencia converge a 0, i.e.:

$$\lim_{R\to\infty} \oint_{\gamma(R)} \frac{z^2\, dz}{(z^2+1)(z^2-4)} = \int_{\infty}^{\infty} \frac{x^2\, dx}{(x^2+1)(x^2-4)}$$

Por teorema de los residuos la primera integral es igual a $2\pi i$ por la suma de los residuos en el semiplano superior, más πi por la suma de los residuos en el eje real. La función f tiene singularidades en $z = \pm i$ y $z = \pm 2$, de modo tal que:

$$\int_{\infty}^{\infty} \frac{x^2\, dx}{(x^2+1)(x^2-4)} = 2\pi i \operatorname{Res}(f,i) + \pi i(\operatorname{Res}(f,2) + \operatorname{Res}(f,-2))$$

llegar a esto, como dicho acá o aplicación de teorema: 0,4

Se tiene que:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}(f,i) &= \lim_{z\to i} \frac{z^2}{(z+i)(z^2-4)} \\
&= \frac{-1}{2i(-5)} \\
&= \frac{1}{10i} \\
\operatorname{Res}(f,2) &= \lim_{z\to 2} \frac{z^2}{(z^2+1)(z+2)} \\
&= \frac{4}{20} \\
\operatorname{Res}(f,2) &= \lim_{z\to -2} \frac{z^2}{(z^2+1)(z-2)} \\
&= -\frac{4}{20}
\end{aligned}$$

0,4 cada residuo: 1,2

con lo que concluimos que:

$$\int_{\infty}^{\infty} \frac{x^2\,dx}{(x^2+1)(x^2-4)} = 2\pi i \cdot \frac{1}{10i} + \pi i \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{5}\right) = \frac{\pi}{5}$$

integral: 0,4

(b)

Por argumentos de simetría:

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{a^2 + \operatorname{sen}^2(x)} = \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} \frac{1}{a^2 + \operatorname{sen}^2(x)}$$

integral que, con el cambio de variables $w = e^{ix}$, puede interpretarse como una integral de contorno sobre la circunferencia unitaria S^1. De este modo: llevarla a $[0, 2\pi]$: 0,4

$$I = \frac{1}{4}\oint_{S^1} \frac{1}{a^2 + (\frac{w^2-1}{2wi})^2} \cdot \frac{dw}{iw} = \frac{1}{4}\oint_{S^1} \frac{4wi\,dw}{-4w^2a^2 + (w^2-1)^2}$$

o bien:

$$I = i\oint_{S^1} \frac{w\,dw}{w^4 - (2+4a^2)w^2 + 1}$$

que tiene singularidades en los cuatro puntos: cambio de variable: 0,4

$$w_0 = \sqrt{\frac{2+4a^2 \pm \sqrt{16a^4 - 8a^2}}{2}} = \sqrt{\frac{2+4a^2 \pm 4a^2\sqrt{a^2 - \frac{1}{2}}}{2}}$$

en que tomamos los dos signos posibles para la raíz. Vemos que cuando tomamos el signo $+$ en la fórmula cuadrática obtenemos términos con la forma $\pm\sqrt{1+\varepsilon}$ con $\varepsilon > 0$, de modo que estas singularidades se hallarn en puntos w con $|w| > 1$ y por tanto quedarn fuera de S^1. Por tanto nos interesan solamente los valores de w_0 obtenidos al tomar el signo $-$, digamos w_0^- y $-w_0^-$. encontrar polos dentro del círculo: 0,4

El denominador de la función $f(w)$ puede factorizarse como $(w+w_0^+)(w-w_0^+)(w+w_0^-)(w-w_0^-)$, o bien:

$$\left(w^2 - \frac{2+4a^2\left(1+\sqrt{a^2-\frac{1}{2}}\right)}{2}\right)(w-w_0^-)(w+w_0^-)$$

y reemplazando obtenemos que los denominadores de los residuos en $\pm w_0^-$ son:

$$\pm\left[2+4a^2\left(1+\sqrt{a^2-\frac{1}{2}}\right)\right]2w_0^-$$

y como el numerador es iw_0^- obtenemos que ambos residuos tienen por valor:

$$\operatorname{Res}(f, \pm w_0^-) = -\frac{i}{2}\left[2+4a^2\left(1+\sqrt{a^2-\frac{1}{2}}\right)\right]^{-1}$$

y por lo tanto por teorema de los residuos la integral tiene por valor: residuos: 0,4

$$2\pi\left[2+4a^2\left(1+\sqrt{a^2-\frac{1}{2}}\right)\right]^{-1}$$

integral: 0,4

(c)

Esta integral tiene un único polo en $z=-1$, de orden 4. Para calcularla usaremos una semicircunferencia ubicada en el semiplano **izquierdo**, de radio R, de modo idea de la semicircunferencia en el lado izquierdo: 0,4 que la integral sobre la parte curva converge a 0 (pues $e^{-x}P(x) \to 0$ más rápido que $\frac{1}{x^2}$ para P fracción algebraica, cuando $x \to \infty$) y la integral sobre la parte recta corresponde a:

$$\int_{-Ri}^{Ri} \frac{e^z\,dz}{(z+1)^4} \xrightarrow{R\to\infty} \int_I \frac{e^z\,dz}{(z+1)^4}$$

algún argumento de que la integral en la semicircunferencia tiende a 0: 0,4

Por lo tanto, el teorema de los residuos nos dice que el valor de la integral corresponde a $2\pi i \operatorname{Res}(f,-1)$. Al ser un polo de orden 4, vemos que:

identificar polo y orden: 0,4

$$\operatorname{Res}(f,-1) = \frac{1}{3!}\lim_{z\to -1}\frac{d^3}{dz^3}\big((z+1)^4 f(z)\big) = \frac{1}{6}e^{-1}$$

residuo: 0,4

ya que la derivada de una exponencial coincide consigo misma. Concluimos que:

$$\int_I \frac{e^z\,dz}{(z+1)^4} = \frac{\pi i}{3e}$$

integral: 0,4

Pregunta 3.
(a) (4 ptos.) Calcule

$$\oint_C \frac{z^3+1}{(e^{2\pi iz}-1)^2}\,dz$$

donde C es la circunferencia de centro $-1/2$ y radio 1, con orientación positiva.

(b) (2 ptos.) Considere una función $f : B_R(0) \to \mathbb{C}$ analítica en el disco $B_R(0)$ de centro 0 y radio R, y sea $n \geq 1$ un entero. Muestre que $\frac{f(z)}{z^n}$ admite una primitiva en $B_R(0) \setminus \{0\}$ si y solo si

$$\frac{d^{n-1}f}{dz^{n-1}}(0) = 0.$$

Solución.
(a) Escribamos

$$f(z) = \frac{z^3+1}{(e^{2\pi iz}-1)^2}$$

y notemos que f es analítica excepto en los puntos donde $e^{2\pi iz} - 1 = 0$, es decir, cuando $e^{2\pi iz} = 1$. Estos puntos corresponden a todos los enteros $k \in \mathbb{Z}$. identificar polos: 0,5

La forma de f sugiere que $k \in \mathbb{Z}$ puede ser un polo de orden 2. Para esto calculemos

$$\lim_{z\to k}(z-k)^2 f(z) = \lim_{z\to k}(z-k)^2\frac{z^3+1}{(e^{2\pi iz}-1)^2}$$

Por la regla de l'Hopital

$$\begin{aligned}\lim_{z\to k}\frac{(z-k)}{e^{2\pi iz}-1} &= \lim_{z\to k}\frac{1}{2\pi i e^{2\pi iz}}\\ &= \frac{1}{2\pi i e^{2\pi ik}} = -\frac{i}{2\pi}.\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\lim_{z\to k}(z-k)^2\frac{z^3+1}{(e^{2\pi iz}-1)^2} = (-\frac{i}{2\pi})^2(k^3+1) = -\frac{k^3+1}{4\pi^2}.$$

Observamos que este límite existe para todo entero k, y además es no nulo para $k \neq -1$. Esto muestra que todo entero $k \neq -1$ es un polo de orden 2. Veamos que $k = -1$ es un polo de orden 1:

$$\lim_{z\to -1}(z+1)f(z) = \lim_{z\to k}(z+1)\frac{z^3+1}{(e^{2\pi iz}-1)^2}$$

Factorizamos $z^3+1 = (z+1)(z^2-z+1)$

$$\begin{aligned}\lim_{z\to -1}(z+1)f(z) &= \lim_{z\to -1}(z^2-z+1)\frac{(z+1)^2}{(e^{2\pi iz}-1)^2}\\ &= 3(-\frac{i}{2\pi})^2 = -\frac{3}{4\pi^2}.\end{aligned}$$

identificar orden de cada polo: 0,5

Por el teorema de los residuos, tomando en cuenta que los polos de f encerrados por la circunferencia C de centro $-1/2$ y radio 1 son $-1, 0$, tenemos

$$\oint_C \frac{z^3+1}{(e^{2\pi iz}-1)^2}\,dz = 2\pi i(Res(f,-1) + Res(f,0)).$$

Como -1 es polo de orden 1, directamente tenemos

$$Res(f,-1) = \lim_{z\to -1}(z+1)f(z) = -\frac{3}{4\pi^2}.$$

residuo en -1: 0,5

Veamos el residuo en 0:

$$\begin{aligned}
Res(f,0) &= \lim_{z\to 0}\frac{d}{dz}\left(z^2\frac{z^3+1}{(e^{2\pi iz}-1)^2}\right)\\
&= \lim_{z\to 0}\frac{d}{dz}\left(\frac{z^5+z^2}{(e^{2\pi iz}-1)^2}\right)\\
&= \lim_{z\to 0}\left(\frac{5z^4+2z}{(e^{2\pi iz}-1)^2} - 2\frac{z^5+z^2}{(e^{2\pi iz}-1)^3}2\pi i\right)
\end{aligned}$$

Por l'Hopital

$$\lim_{z\to 0}\frac{5z^4}{(e^{2\pi iz}-1)^2} = 0$$

y también

$$\lim_{z\to 0}\frac{z^5}{(e^{2\pi iz}-1)^2} = 0$$

Entonces (usando l'Hopital nuevamente)

$$\begin{aligned}
Res(f,0) &= \lim_{z\to 0}\left(\frac{2z}{(e^{2\pi iz}-1)^2} - 4\pi i\frac{z^2}{(e^{2\pi iz}-1)^3}\right)\\
&= 2\lim_{z\to 0}\frac{ze^{2\pi iz}-z-2\pi iz^2}{(e^{2\pi iz}-1)^3}\\
&= 2\lim_{z\to 0}\frac{e^{2\pi iz}+2\pi ize^{2\pi iz}-1-4\pi iz}{3(e^{2\pi iz}-1)^2 2\pi i}\\
&= 2\lim_{z\to 0}\frac{2\pi ie^{2\pi iz}+2\pi ie^{2\pi iz}-4\pi^2ze^{2\pi iz}-4\pi i}{-6(e^{2\pi iz}-1)4\pi^2}\\
&= 2\lim_{z\to 0}\frac{4\pi i(e^{2\pi iz}-1)-4\pi^2ze^{2\pi iz}}{-24\pi^2(e^{2\pi iz}-1)}\\
&= -\frac{i}{3\pi}+\frac{1}{3}\lim_{z\to 0}\frac{ze^{2\pi iz}}{e^{2\pi iz}-1}.\\
&= -\frac{i}{3\pi}+\frac{1}{3}\lim_{z\to 0}\frac{e^{2\pi iz}+2\pi ize^{2\pi iz}}{2\pi ie^{2\pi iz}}\\
&= -\frac{i}{3\pi}-\frac{i}{6\pi}\\
&= -\frac{i}{2\pi}.
\end{aligned}$$

residuo en 0: 1,5

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
\oint_C \frac{z^3+1}{(e^{2\pi iz}-1)^2}\,dz &= 2\pi i\left(-\frac{3}{4\pi^2}-\frac{i}{2\pi}\right)\\
&= -\frac{3i}{2\pi}+1.
\end{aligned}$$

integral: 0,5

(b) Como f es analítica en el disco $B_R(0)$, sabemos que se puede escribir como serie de potencias

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$$

donde

$$a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$$

y la serie tiene radio de convergencia R^* y sabemos que $R^* \geq R$. Por lo tanto

escribir f como serie e identificar coeficientes: 0,5

$$\frac{f(z)}{z^n} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{k-n}$$

Vemos que aparecen potencias negativas de z: $a_0 z^{-n}$, ... $a_{n-1} z^{-1}$. Definamos

$$g(z) = \sum_{k=n}^{\infty} a_k z^{k-n} = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+n} z^k.$$

Entonces g es una función analítica en el disco $B_R(0)$, ya que está definida por una serie de potencias con radio de convergencia R^*. Entonces

$$\frac{f(z)}{z^n} = a_0 z^{-n} + \ldots + a_{n-2} z^{-2} + a_{n-1} z^{-1} + g(z)$$

Todos los términos en la expresión anterior tienen una primitiva, excepto $a_{n-1} z^{-1}$, a menos que $a_{n-1} = 0$.

representación para $f(x)/z^n$: 0,5

Si $f^{(n-1)}(0) = 0$ entonces $a_{n-1} = 0$ y podemos encontrar una primitiva de $\frac{f(z)}{z^n}$ en $B_R(0) \setminus \{0\}$ de la forma:

$$a_0 \frac{z^{-n+1}}{(-n+1)} + \ldots + a_{n-2} \frac{z^{-1}}{(-1)} + G(z)$$

donde G es una primitiva de g, por ejemplo,

$$G(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+n} \frac{z^{k+1}}{k+1}.$$

argumento derivada =0, implica existencia de primitiva: 0,5

Por otro lado, si $\frac{f(z)}{z^n}$ admite primitiva en $B_R(0) \setminus \{0\}$, digamos que H es una función analítica en $B_R(0) \setminus \{0\}$ tal que $H'(z) = \frac{f(z)}{z^n}$, entonces

$$\oint_{C_r} \frac{f(z)}{z^n}\, dz = \oint_{C_r} H'(z)\, dz = 0,$$

donde C_r es la circunferencia de radio $0 < r < R$ y centro 0. Por otro lado,

$$\oint_{C_r} \frac{f(z)}{z^n}\, dz = a_{n-1} = \frac{f^{(n-1)}(0)}{n!}.$$

Deducimos que si $\frac{f(z)}{z^n}$ tiene primitiva entonces

$$f^{(n-1)}(0) = 0.$$

recíproca: 0,5