Universidad de Chile
Facultad de Cs. Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática

MA2002 Cálculo Avanzado y Aplicaciones
Profesores:Michal Kowalczyk, Mauricio Soto
Auxiliares: Ignacio Bugueño, Leonel Huerta

Control 2

Jueves 28 de Mayo de 2015

P1. Sea $f\colon D(0,1) \longrightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$f(z) = \frac{1}{1+z+z^2}$$

(a) (3 pt.) Pruebe que

$$f(z) = \frac{1}{i\sqrt{3}} \left(\frac{1}{z - e^{\frac{i2\pi}{3}}} - \frac{1}{z - e^{\frac{-i2\pi}{3}}} \right).$$

(b) (3 pt.) Deduzca que

$$f(z) = \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) + \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) z + \sin\left(\frac{6\pi}{3}\right) z^2 + \cdots \right)$$

P2.

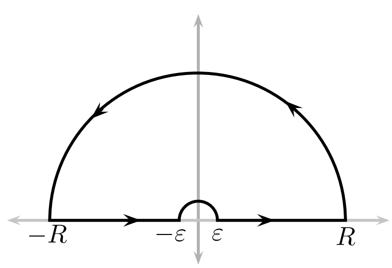
(a) (2 pt.) Calcule el radio de convergencia de las siguientes series:

$$\text{(i)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^n} \qquad \text{(ii)} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2} z^n$$

(b) (4 pt.) Muestre que

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}$$

Indicación: Considere la integral de la función $f(z) = \frac{e^{iz}-1}{z}$ sobre el camino de la figura siguiente:



P3.

(a) Calcule

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos(x)}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}\, dx, \quad a > b > 0$$

(b) Calcule

$$\int_0^{\pi} \frac{1}{k+\cos(\theta)}\, d\theta, \quad k > 1$$

MA2002 - Cálculo Avanzado y Aplicaciones
Semestre Otoño 2015

Pauta Control 2

$\boxed{\text{P1.}}$ (a) Notemos primero que:

$$e^{i\frac{2\pi}{3}} + e^{-i\frac{2\pi}{3}} = 2\mathbb{R}e(e^{i\frac{2\pi}{3}}) = 2\left(-\frac{1}{2}\right) = -1$$

Y además:

$$e^{i\frac{2\pi}{3}} - e^{-i\frac{2\pi}{3}} = 2i\mathbb{I}m(e^{i\frac{2\pi}{3}}) = 2i\frac{\sqrt{3}}{2} = i\sqrt{3}$$

Luego:

$$\frac{1}{z-e^{i\frac{2\pi}{3}}} - \frac{1}{z-e^{-i\frac{2\pi}{3}}} = \frac{\cancel{z} - e^{-i\frac{2\pi}{3}} - \cancel{z} + e^{i\frac{2\pi}{3}}}{(z-e^{i\frac{2\pi}{3}})(z-e^{-i\frac{2\pi}{3}})} = \frac{i\sqrt{3}}{(z-e^{i\frac{2\pi}{3}})(z-e^{-i\frac{2\pi}{3}})}$$

Multiplicando término a término la expresión del denominador:

$$(z-e^{i\frac{2\pi}{3}})(z-e^{-i\frac{2\pi}{3}}) = z^2 - z(e^{i\frac{2\pi}{3}} + e^{-i\frac{2\pi}{3}}) + e^{i\frac{2\pi}{3}}e^{-i\frac{2\pi}{3}} = z^2 - z(-1) + e^0 = z^2 + z + 1$$

Así:

$$\frac{1}{z-e^{i\frac{2\pi}{3}}} - \frac{1}{z-e^{-i\frac{2\pi}{3}}} = \frac{i\sqrt{3}}{z^2+z+1}$$

Y se concluye que:

$$f(z) = \frac{1}{i\sqrt{3}}\left(\frac{1}{z-e^{i\frac{2\pi}{3}}} - \frac{1}{z-e^{-i\frac{2\pi}{3}}}\right)$$

Que es lo que queríamos probar.

(b) **Alternativa (i):**

Recordando la fórmula para la serie geométrica, tenemos que para $z \in D(0,1)$:

$$\frac{1}{z-e^{i\frac{2\pi}{3}}} = \frac{1}{e^{i\frac{2\pi}{3}}}\left(\frac{1}{ze^{-i\frac{2\pi}{3}}-1}\right) = -e^{-i\frac{2\pi}{3}}\sum_{k=0}^{\infty}(ze^{-i\frac{2\pi}{3}})^k = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\sum_{k=0}^{\infty}(ze^{-i\frac{2\pi}{3}})^k$$

Y:

$$\frac{1}{z-e^{-i\frac{2\pi}{3}}} = \frac{1}{e^{-i\frac{2\pi}{3}}}\left(\frac{1}{ze^{i\frac{2\pi}{3}}-1}\right) = -e^{i\frac{2\pi}{3}}\sum_{k=0}^{\infty}(ze^{i\frac{2\pi}{3}})^k = \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\sum_{k=0}^{\infty}(ze^{i\frac{2\pi}{3}})^k$$

Luego:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{z-e^{i\frac{2\pi}{3}}}-\frac{1}{z-e^{-i\frac{2\pi}{3}}} &= \left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\sum_{k=0}^{\infty}(ze^{-i\frac{2\pi}{3}})^k-\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\sum_{k=0}^{\infty}(ze^{i\frac{2\pi}{3}})^k \\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}z^k(e^{-i\frac{2\pi}{3}k}-e^{i\frac{2\pi}{3}k})+i\frac{\sqrt{3}}{2}\sum_{k=0}^{\infty}z^k(e^{-i\frac{2\pi}{3}k}+e^{i\frac{2\pi}{3}k}) \\
&= \frac{1}{\cancel{2}}\sum_{k=0}^{\infty}z^k(-\cancel{2}i\sin(\frac{2\pi}{3}k))+i\frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}}\sum_{k=0}^{\infty}z^k\cancel{2}\cos(\frac{2\pi}{3}k) \\
&= i\sum_{k=0}^{\infty}z^k(-\sin(\frac{2\pi}{3}k))+i\sum_{k=0}^{\infty}z^k\sqrt{3}\cos(\frac{2\pi}{3}k) \\
&= i\sum_{k=0}^{\infty}z^k\left[-\sin(\frac{2\pi}{3}k)+\sqrt{3}\cos(\frac{2\pi}{3}k)\right]
\end{aligned}$$

Notando que $\forall k\in\mathbb{N}$:

$$-\sin(\frac{2\pi}{3}k)+\sqrt{3}\cos(\frac{2\pi}{3}k)=2\sin(\frac{2\pi}{3}k)$$

Gracias a la parte (a), se tiene que:

$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{i\sqrt{3}}\left(\frac{1}{z-e^{i\frac{2\pi}{3}}}-\frac{1}{z-e^{-i\frac{2\pi}{3}}}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{3}}\sum_{k=0}^{\infty}z^k\left[2\sin(\frac{2\pi}{3}k)\right] \\
&= \frac{2}{\sqrt{3}}\sum_{k=0}^{\infty}z^k\sin(\frac{2\pi}{3}k) \\
&= \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\sin(\frac{2\pi}{3})+\sin(\frac{4\pi}{3})z+\sin(\frac{6\pi}{3})z^2+...\right)
\end{aligned}$$

Que es lo que se quería probar.

Alternativa (ii):

Recordando que el seno es una función 2π-periódica, tenemos que:

$$\begin{aligned}
\sin(\frac{2\pi}{3}) + \sin(\frac{4\pi}{3})z + \sin(\frac{6\pi}{3})z^2 + ... &= \sum_{k=0}^{\infty} \sin(\frac{2\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3}) z^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sin(\frac{2\pi}{3}) + \sin(\frac{4\pi}{3})z + \cancelto{0}{\sin(\frac{6\pi}{3})}z^2 \right) z^{3k} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sin(\frac{2\pi}{3}) + \sin(\frac{4\pi}{3})z \right) z^{3k} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - z\frac{\sqrt{3}}{2} \right) z^{3k} \\
&= \frac{\sqrt{3}}{2}(1-z) \sum_{k=0}^{\infty} z^{3k}
\end{aligned}$$

Sabemos que para $|z| < 1$:

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^{3k} = \frac{1}{1-z^3} = \frac{1}{(1-z)(1+z+z^3)}$$

Luego, $\forall z \in D(0,1)$:

$$\frac{\sqrt{3}}{2}(1-z) \sum_{k=0}^{\infty} z^{3k} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cancel{(1-z)} \frac{1}{\cancel{(1-z)}(1+z+z^3)} = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{1}{(1+z+z^3)} = \frac{\sqrt{3}}{2} f(z)$$

Por lo tanto, hemos probado que:

$$\sin(\frac{2\pi}{3}) + \sin(\frac{4\pi}{3})z + \sin(\frac{6\pi}{3})z^2 + ... = \frac{\sqrt{3}}{2} f(z)$$

Multiplicando por $\frac{2}{\sqrt{3}}$ se deduce la igualdad pedida.

$\boxed{\text{P2.}}$ (a) (i) Por definición, sabemos que:

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{1}{n^n}\right|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^n}} = \frac{1}{n} = 0$$

De donde se obtiene que $R = \infty$.

(ii) Nuevamente, de la definición del radio de convergencia:

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}\right|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n}$$

Cuando este último límite existe.

Recordando que:

$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

Tenemos que:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n} = \lim_{n\to\infty} \left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^{-1} = e^{-1}$$

Y sigue que $R = e$.

(b) Siguiendo la indicación, sea $f(z) := \dfrac{e^{iz}-1}{z}$ y sea γ la curva de la figura. Definamos además:

- γ_1 : la recta que va de ε a R.
- γ_2 : el arco de la semicircunferencia de radio R con la orientación de la figura.
- γ_3 : la recta que va de $-R$ a $-\varepsilon$.
- γ_4 :el arco de la semicircunferencia de radio ε con la orientación de la figura.

Notemos que como f es holomorfa en $\mathbb{C}\backslash\{0\}$, del teorema de Cauchy-Goursat:

$$\int_\gamma f(z)dz = 0$$

Y entonces:

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_3} f(z)dz = -\int_{\gamma_2} f(z)dz - \int_{\gamma_4} f(z)dz \tag{1}$$

Calculemos las integrales del lado izquierdo:

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_\varepsilon^R \frac{e^{iz}-1}{z}dz = \int_\varepsilon^R \frac{\cos(z)-1}{z}dz + i\int_\varepsilon^R \frac{\sin(z)}{z}dz$$

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_3} f(z)dz = \int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{e^{iz}-1}{z}dz &= \int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{\cos(z)-1}{z}dz + i\int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{\sin(z)}{z}dz \\ &= -\int_{\varepsilon}^{R} \frac{\cos(z)-1}{z}dz + i\int_{\varepsilon}^{R} \frac{\sin(z)}{z}dz\end{aligned}$$

Luego, podemos reescribir (1) como:

$$2i\int_{\varepsilon}^{R} \frac{\sin(z)}{z}dz = -\int_{\gamma_2} f(z)dz - \int_{\gamma_4} f(z)dz \tag{2}$$

Y estudiemos ahora las integrales del lado derecho:

$$\int_{\gamma_4} f(z)dz = \int_{\pi}^{0} \frac{e^{i\varepsilon e^{i\theta}}-1}{\cancel{\varepsilon e^{i\theta}}} i\cancel{\varepsilon e^{i\theta}}d\theta = -i\int_{0}^{\pi}(e^{i\varepsilon e^{i\theta}}-1)d\theta$$

Como e^{iz} es continua en 0, dado $\hat{\varepsilon} > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para $|z| \leq \delta$ se tiene que $|e^{iz}-1| < \hat{\varepsilon}$. Luego, para $\varepsilon < \delta$:

$$\left|\int_{0}^{\pi}(e^{i\varepsilon e^{i\theta}}-1)d\theta\right| \leq \int_{0}^{\pi}\left|e^{i\varepsilon e^{i\theta}}-1\right|d\theta \leq \int_{0}^{\pi}\hat{\varepsilon}dz = \hat{\varepsilon}\pi$$

Y entonces:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\gamma_4} f(z)dz = 0$$

Por otra parte:

$$\int_{\gamma_2} f(z)dz = \int_{0}^{\pi} \frac{e^{iRe^{i\theta}}-1}{\cancel{Re^{i\theta}}} i\cancel{Re^{i\theta}}d\theta = i\int_{0}^{\pi}(e^{iRe^{i\theta}}-1)d\theta = i\int_{0}^{\pi} e^{iRe^{i\theta}}d\theta - i\pi$$

Pero:

$$\left|\int_{0}^{\pi} e^{iRe^{i\theta}}d\theta\right| \leq \int_{0}^{\pi}\left|e^{iRe^{i\theta}}\right|d\theta \leq \int_{0}^{\pi}\left|e^{-R\sin(\theta)}\right|d\theta = \int_{0}^{\pi} e^{-R\sin(\theta)}d\theta = 2\int_{0}^{\pi/2} e^{-R\sin(\theta)}d\theta$$

Y recordando que para $0 \leq \theta \leq \pi/2$, $\sin(\theta) \geq 2\theta/\pi$:

$$\left|\int_{0}^{\pi} e^{iRe^{i\theta}}d\theta\right| \leq 2\int_{0}^{\pi/2} e^{-R\sin(\theta)}d\theta \leq 2\int_{0}^{\pi/2} e^{-R\frac{2\theta}{\pi}}d\theta = \frac{\pi}{R}(1-e^{-R}) \leq \frac{\pi}{R}$$

Se deduce que:

$$\lim_{R\to\infty}\int_{\gamma 2} f(z)dz = -i\pi$$

Gracias a lo anterior, tomando límite cuando $\varepsilon \to 0$ y luego cuando $R \to \infty$ en (2) se obtiene que:

$$2i\int_{0}^{\infty}\frac{\sin(x)}{x}dx = i\pi$$

De donde se concluye lo pedido.

$\boxed{\text{P3.}}$ (a) Definamos, para $x \in \mathbb{R}$, $f(x)$ como:

$$f(x) := \frac{\cos(x)}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}$$

Y notemos que f es función par, por ser multiplicación y división de funciones pares. De este modo, queremos calcular:

$$I := \int_0^\infty \frac{\cos(x)}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)} = \int_0^\infty f(x)dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty f(x)dx$$

Notemos además que:

$$\frac{1}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)} = \frac{1}{(a^2-b^2)}\left(\frac{1}{x^2+b^2} - \frac{1}{x^2+a^2}\right)$$

Luego:

$$I = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty f(x)dx = \frac{1}{2(a^2-b^2)}\left(\int_{-\infty}^\infty \frac{\cos(x)}{x^2+b^2}dx - \int_{-\infty}^\infty \frac{\cos(x)}{x^2+a^2}dx\right)$$

Calculemos

$$I_t = \int_{-\infty}^\infty \frac{\cos(x)}{x^2+t^2}dx, \quad t > 0$$

Para ello, calculemos vía residuos la integral de $\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{ix}}{x^2+t^2}dx$. Claramente la función posee dos polos simples: it y $-it$, de los cuales consideramos sólo aquel en el semiplano superior. El residuo $Res(f(x), it) = \lim_{x\to it}(x-it)e^{ix}/[(x-it)(x+it)] = e^{-t}/2it$. Con lo cual la integral I_t es la parte real de $2i\pi Res(e^{ix}/(x^2+t^2), it = \pi e^{-t}/t$

Luego:

$$I = \frac{1}{2(a^2-b^2)}\left(\frac{\pi}{b}e^{-b} - \frac{\pi}{a}e^{-a}\right) = \frac{\pi(ae^{-b} - be^{-a})}{2(a^3b - ab^3)}$$

(b) Definamos, para $\theta \in \mathbb{R}$, $f(\theta)$ como:

$$f(\theta) := \frac{1}{k+\cos(\theta)}$$

Gracias a que el coseno es función par, f también lo es. Luego, nos interesa calcular:

$$I := \int_0^\pi \frac{1}{k+\cos(\theta)}d\theta = \int_0^\pi f(\theta)d\theta = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^\pi f(\theta)d\theta$$

Usando el cambio de variables $z = e^{i\theta}$ y recordando que $\cos(\theta) = \dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$ tenemos que:

$$I = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^\pi f(\theta)d\theta = \frac{1}{2}\int_{|z|=1} \frac{1}{k+\left(\frac{z+z^{-1}}{2}\right)}\frac{1}{iz}dz = -\frac{i}{2}\int_{|z|=1}\frac{1}{z^2+2kz+1}dz$$

Definamos ahora, para $z \in \mathbb{C}$, $g(z)$ por:

$$g(z) := \frac{1}{z^2 + 2kz + 1}$$

Es fácil ver que g tiene polos simples en $z_1 := -k + \sqrt{k^2 - 1}$ y en $z_2 := -k - \sqrt{k^2 - 1}$. Además, como $k > 1$, sólo z_1 queda dentro de la circunferencia unitaria en el plano complejo. Luego, del Teorema de los Residuos:

$$-\frac{2}{i}\ I = \int_{|z|=1} \frac{1}{z^2 + 2kz + 1} dz = \int_{|z|=1} g(z) dz = 2\pi i \ \mathrm{Res}(g, z_1)$$

Donde:

$$\mathrm{Res}(g, z_1) = \lim_{z \to z_1} (z - z_1) g(z) = \lim_{z \to z_1} \frac{1}{(z - z_2)} = \frac{1}{(z_1 - z_2)} = \frac{1}{2\sqrt{k^2 - 1}}$$

Y se concluye que:

$$I = -\frac{i}{2} \cdot 2\pi i \cdot \frac{1}{2\sqrt{k^2 - 1}} = \frac{\pi}{2\sqrt{k^2 - 1}}$$