Control 2
MA2002: Cálculo Avanzado y Aplicaciones 2014-1

Profesores: Álvaro Hernández, Rodrigo Lecaros, Erwin Topp
Departamento de Ingeniería Matemática
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas, Universidad de Chile

P1). Consideraremos que para todo $z \in \mathbb{C}$, $z = x+iy$, es decir, denotaremos por x la parte real de z y y la parte imaginaria.

(1,5) a) Dado $u(x,y) = x^3 - 3xy^2$, encuentre $v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que la función $f = u + iv$ satisface las condiciones de Cauchy-Riemann.

(1,5) b) Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un conjunto abierto conexo y $f : \Omega \to \mathbb{C}$ una función holomorfa en Ω. Si $\overline{f}$ es también una función holomorfa en Ω, demuestre que f es constante.

(3,0) c) Sea $p(z) = \sum_{k=0}^{N} c_k(z-z_0)^k$ un polinomio de grado $N \geq 1$, para $z_0 \in \mathbb{C}$, y sea $a > 0$. Demuestre que se cumple

$$\int\limits_{|z-z_0|=a} p(z)d\overline{z} = -2\pi i p'(z_0)a^2,$$

donde la curva esta recorrida en sentido anti horario. **Nota:** $\int_\Gamma f(z)dz = \int_{t_0}^{t_1} f(z(t))\overline{z'(t)}dt$, donde $z : [t_0, t_1] \to \mathbb{C}$ es una parametrización Γ.

P2).

a) Sea $f : \mathbb{C} \setminus \{1\} \to \mathbb{C}$ una función que admite el desarrollo en series de potencias

$$f(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} nz^n, \quad \forall\, z \in D(0,1) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}.$$

(1,0) i) Considere la función $g(z) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} nz^{n-1}$, $z \in D(0,1)$. Encuentre h una función holomorfa en $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ tal que

$$h'(z) = g(z) \quad \forall z \in D(0,1).$$

(1,0) ii) Usando la parte anterior, encuentre una formula explícita para f en $D(0,1)$.

(1,0) iii) Concluya que la fórmula anterior de f se extiende a todo $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ y con ella calcule la integral

$$\int_{|z+1|=1} f(z)dz, \quad \text{donde la curva se recorre en el sentido horario.}$$

(3,0) b) Considere la sucesión de Fibonacci $a_0 = 1;\ a_1 = 1;\ a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$, $\forall n \geq 0$.
Determine (R) el radio de convergencia de la serie: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, y para $\{z \in \mathbb{C} : \quad |z| < R\}$ demuestre que

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \frac{1}{1-z-z^2}.$$

Indicación: Asuma que el $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}}$ existe y recuerde que si esto pasa $R = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$, luego calculé su valor utilizando la recurrencia de la sucesión.

P3). Sea $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ una función continua.

(2,0) a) Demuestre que

$$\int_0^{2\pi} f(\mathrm{sen}(\theta))d\theta = \frac{1}{i}\int_{|z|=1} \frac{1}{z} f\left(\frac{z^2-1}{2iz}\right)dz,$$

donde la integral esta recorrida en sentido anti-horario.

(2,0) b) Dadas las constantes $b, c \in \mathbb{C}$, tales que $b^2 \neq c$. Pruebe que existen $z_0, z_1 \in \mathbb{C}$, tal que,

$$\int_{|z|=1} \frac{1}{z^2+2bz+c}dz = \frac{1}{z_1 - z_0}\left\{\int_{|z|=1} \frac{1}{z-z_1}dz - \int_{|z|=1} \frac{1}{z-z_0}dz\right\}.$$

(2,0) c) Usando las partes anteriores, demuestre

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{a+\mathrm{sen}(\theta)}d\theta = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}},$$

con $a > 1$ una constante dada.

P1) a) $u = x^3 - 3xy^2$

$$\left.\begin{aligned} u_x &= v_y \\ u_y &= -v_x \end{aligned}\right\} \text{Cauchy Riemann}$$

$$u_x = v_y \Rightarrow u_x = 3x^2 - 3y^2 = v_y$$

$$\Rightarrow v = 3x^2y - y^3 + c(x) \quad (0{,}5)$$

Remplazando en $u_y = -v_x$

$$u_y = -6xy = -6xy - c' = -v_x$$

$$\Rightarrow c' = 0 \Rightarrow c = cte$$

$$\therefore v = 3x^2y - y^3 \quad (0{,}5)$$

$$\Rightarrow f(z) = x^3 - 3xy^2 + 3x^2iy - iy^3 \quad (0{,}5)$$

$$= (x+iy)^3 = z^3 = f(z)$$

b) supondremos que

$$f(z) = u + iv$$

$\therefore \overline{f}(z) = u - iv$

como f es holomorfa
cumple Cauchy-Riemann

$$\therefore \quad u_x = v_y \quad (1)$$

$$u_y = -v_x \quad (2)$$

Pero como $\overline{f} = u - iv$ es
holomorfa, cumple Cauchy-R.

$$\therefore \quad \partial_x u = \partial_y(-v) = -\partial_y v \quad (3)$$

$$\partial_y u = -\partial_x(-v) = \partial_x v \quad (4)$$

(0,5)

Con lo cual, sumando

$$(1) \wedge (3) \Rightarrow u_x = v_y = -v_y$$

$$\therefore\ u_x = \frac{u_x + u_x}{2} = \frac{\overset{(1)}{v_y} - \overset{(3)}{v_y}}{2} = 0$$

$\Rightarrow u_x = 0$

analogo con (2) $\wedge$ (4) (0,5)

$$\Rightarrow u_y = \frac{u_y + u_y}{2} = \frac{-\overset{(2)}{v_x} + \overset{(4)}{v_x}}{2} = 0$$

$\therefore\ u_y = 0$

$\Rightarrow \nabla u \equiv 0 \Rightarrow u = cte$ en cada conexo, usando (1) $\wedge$ (2) $\Rightarrow \nabla v = 0$

$\therefore\ v = cte$

$\therefore\ f \equiv cte$ en cada componente conexa. (0,5)

c) $\displaystyle\int_{|z-z_0|=a} P(z)\, d\bar{z} = I$

$z = z_0 + a e^{i\theta}, \ \theta \in [0, 2\pi)$

$dz = a i e^{i\theta} d\theta$

$d\bar{z} = a(-i) e^{-i\theta} d\theta$

$$I = \int_0^{2\pi} P(z_0 + a e^{i\theta})\, a(-i) e^{-i\theta} d\theta$$

$$= \sum_{k=0}^{N} c_k\, a(-i) \int_0^{2\pi} a^k e^{ik\theta} \cdot e^{-i\theta} d\theta \quad (1,0)$$

$$I_k = \int_0^{2\pi} e^{i(k-1)\theta} d\theta,$$

si $k \neq 1$, $I_k = \left.\dfrac{e^{i(k-1)\theta}}{i(k-1)}\right|_{\theta=0}^{\theta=2\pi} = 0$

si $k = 1$, $I_1 = 2\pi$ $\quad (1,0)$

Como $N \geq 1$

$$\Rightarrow I = -i \sum_{k=0}^{N} c_k a^{k+1} I_k$$

$$= -2\pi i c_1 a^2$$

Por otro lado

$$P'(z) = \sum_{k=1}^{N} c_k k (z - z_0)^{k-1}$$

$$\therefore P'(z_0) = c_1$$

con lo cual $I = -2\pi i a^2 P'(z_0)$

(1,0)

P2) a) i) Sea $z \in D(0,1)$, Entonces

$$h'(z) = g(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} n z^{n-1}$$

$$\Rightarrow h(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} z^n + cte, \ \forall z \in D(0,1) \ (1,0)$$

ii)
$$f(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} n z^n = z\, g(z) = z\, h'(z)$$

$$h(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} z^n = \frac{z}{1-z} \quad (0,5)$$

$$\Rightarrow h'(z) = \frac{1-z+z}{(1-z)^2} = \frac{1}{(1-z)^2}$$

$$\therefore f(z) = \frac{z}{(1-z)^2}, \ \forall z \in D(0,1) \ (0,5)$$

iii) Claramente $f(z) = \frac{z}{(1-z)^2}$

Puede ser extendido $\mathbb{C} \setminus \{1\}$

$\therefore$ f es holomorfa en $\mathbb{C}\setminus\{1\}$

es decir es holomorfa en

$|z+1| \leq 1 \Rightarrow \displaystyle\int_{|z+1|=1} f(z)\,dz = 0.$ (1,0)

b) Sea $b_n = \dfrac{a_n}{a_{n+1}}$

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \quad / \frac{1}{a_{n+1}}$$

$$\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} = 1 + b_n$$

$$b_{n+1} = \frac{a_{n+1}}{a_{n+2}}$$

$$\therefore \quad \frac{1}{b_{n+1}} = 1 + b_n$$ (0,5)

como el límite existe

$$\lim_{n\to+\infty} b_n = R$$

$$\frac{1}{R} = 1 + R$$

$$\therefore \quad R^2 + R - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \quad R = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} > 0 \quad (0,5)$$

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \;, \quad \forall n \geq 0$$

$$\therefore \quad z^{n+2} a_{n+2} = z^{n+2} a_{n+1} + z^{n+2} a_n$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+2} z^{n+2} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^{n+2} a_{n+1} + \sum_{n=0}^{+\infty} z^{n+2} a_n \quad (0,5)$$

$$\Rightarrow \sum_{n=2}^{+\infty} a_n z^n = z \sum_{n=1}^{+\infty} z^n a_n + z^2 f(z)$$

$$f(z) - a_1 z - a_0 = \sum_{n=2}^{+\infty} z^n a_n \quad (0,5)$$

$$f(z) - a_0 = \sum_{n=1}^{+\infty} z^n a_n \quad (0,5)$$

$$\therefore \; f(z) - z - 1 = z\left(f(z) - 1\right) + z^2 f(z)$$

$$f(z)\left(1 - z - z^2\right) = 1 \quad (0,5)$$

$$\Rightarrow \; f(z) = \frac{1}{1 - z - z^2} \;//$$

P3 a)

$$I = \int_{|z|=1} \frac{1}{z} f\left(\frac{z^2-1}{2iz}\right) dz \quad , \quad z = e^{i\theta}$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{1}{\cancel{e^{i\theta}}} f\left(\frac{e^{2i\theta}-1}{2ie^{i\theta}}\right) i\cancel{e^{i\theta}}\, d\theta$$

$$= i\int_0^{2\pi} f\left(\frac{e^{2i\theta}-1}{2ie^{i\theta}}\right) d\theta \quad (1,0)$$

Por otro lado

$$\frac{e^{2i\theta}-1}{2ie^{i\theta}} = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i} = \operatorname{sen}(\theta)$$

$$\therefore\ I = i\int_0^{2\pi} f\,\operatorname{sen}(\theta)\, d\theta \ // \quad (1,0)$$

b) Lo que hay que Probar es

$$\frac{1}{z^2+2bz+c} = \frac{1}{(z_1-z_0)}\left\{\frac{1}{z-z_1} - \frac{1}{z-z_2}\right\}$$

esto es equivalente a

$$\frac{1}{z^2+2bz+c} = \frac{1}{(z-z_1)(z-z_0)}$$

$\Leftrightarrow z^2+2bz+c = (z-z_1)(z-z_0)$ (1,0)

$\therefore$ la existencia de z_0 y z_1 son las Raíces del Polinomio $z^2+2bz+c$ lo que Hay que Verificar es que $z_1 - z_0 \neq 0$

$$z^2+2bz+c = (z+b)^2 + c - b^2$$

$\therefore$ como $c-b^2 \neq 0$

$\Rightarrow z_0 \neq z_1$ // (1,0)

c)

por i) con $f(x) = \dfrac{1}{a+x}$

$$\Rightarrow \int_0^{2\pi} \frac{1}{a+\operatorname{sen}(\theta)}\,d\theta = \frac{1}{i}\int_{|z|=1} \frac{1}{z}\,\frac{1}{a+\frac{z^2-1}{2iz}}\,dz$$

$$= 2\int_{|z|=1} \frac{1}{z^2+2iaz-1}\,dz$$

$b = ia$, $c = -1$

$b^2 = -a^2$, $c = 1$, $\therefore b^2 \neq c$

usando b)

$$\Rightarrow \int_0^{2\pi} \frac{1}{a+\operatorname{sen}\theta}\,d\theta = \frac{2}{z_1-z_0}\left\{\int_{|z|=1}\frac{1}{z-z_1} - \int_{|z|=1}\frac{1}{z-z_0}\right\}$$

(1,0)

con z_0, z_1, Raíces de

$z^2+2iaz-1$

$= (z+ia)^2 - 1 + a^2$

$= \left(z+ia+i\sqrt{a^2-1}\right)\left(z+ia-i\sqrt{a^2-1}\right)$

$\therefore\ z_1 = i\left(\sqrt{a^2-1}-a\right)$

$z_0 = -i\left(a+\sqrt{a^2-1}\right)$

claramente

$$a+\sqrt{a^2+1} > 1$$

$$\therefore z_0 \notin D(0,1)$$

Por otro lado

$$-1 < \sqrt{a^2-1} - a < 1$$

$$\Leftrightarrow a-1 < \sqrt{a^2-1} < 1+a$$

$$\Leftrightarrow a^2+1-2a < a^2-1 < 1+a^2+2a$$

$$\Leftrightarrow 1-2a < -1 < 1+2a$$

$$\Leftrightarrow -2a < -2 < 2a$$

$$\Leftrightarrow -a < -1 < a$$

$\therefore$ como $a > 1$

$$z_1 \in D(0,1)$$

con lo cual

$$\int_{|z|=1} \frac{1}{z-z_0} = 0 \wedge \int_{|z|=1} \frac{1}{z-z_1} = 2\pi i$$

$(1,0)$

Finalmente

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{a+\operatorname{sen}\theta}\, d\theta = \frac{2}{z_1-z_0} \cdot 2\pi i$$

$$z_1 - z_0 = 2i\sqrt{a^2-1}$$

$$\Rightarrow \int_0^{2\pi} \frac{1}{a+\sin(\theta)}\, d\theta = \frac{4\pi i}{2i\sqrt{a^2-1}}$$

$$= \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}} \quad //$$