MA2002 Cálculo Avanzado y Aplicaciones. Secciones 1 y 3
Profesores: Carlos Conca - Raúl Gormaz
Auxiliares: M. Ignacia Devoto - G. Sperone - H. Carrillo - N. Godoy
07 de Noviembre de 2013

Control 2

Parte 1

(a) **(1,5 puntos)** Determine el mayor conjunto donde $f(z) = z\,\mathrm{Re}(z)^2$ es derivable en el sentido complejo.

(b) **(1,5 puntos)** Encuentre campos escalares u y v tales que $z^\alpha \equiv \exp(\alpha\,\log(z)) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ con $\alpha \in \mathbb{R}^+$.

(c) **(1,5 puntos)** Sea $a \in \mathbb{R}$. Encuentre el radio de convergencia R de la serie de potencias $\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$, donde

$$c_k = \begin{cases} a+1 & \text{si} \quad k \text{ es par} \\ 1 & \text{si} \quad k \text{ es impar} \end{cases}$$

Compruebe que $\forall z \in \mathcal{D}(0,R)$:

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k = \frac{a+1+z}{1-z^2}$$

(d) **(1,5 puntos)** Encuentre una expansión en series de potencias para $f(z) = \dfrac{z}{z^2+2}$ en torno a $z_0 = 0$. Determine el disco de convergencia.

Parte 2

(a) **(3 puntos)** Calcule el valor de

$$I_r = \oint_{C_r} \frac{\mathrm{sen}(\pi z^2) + \cos(\pi z^2)}{(z-1)(z-2)}\,dz$$

donde $C_r = \{z \in \mathbb{C} \,/\, |z| = r\}$. Analice por separado los casos $0 < r < 1$, $1 < r < 2$ y $r > 2$.

(b) Sea $f(z) = \dfrac{e^z}{z(1-e^{-z})}$.

(i) **(1 punto)** Encuentre todas las singularidades de f.

(ii) **(1 punto)** Demuestre que son todas singularidades del tipo polo y calcule el orden de cada una.

(iii) **(1 punto)** Calcule

$$\oint_{|z|=r} f(z)\,dz$$

para $|r| < 2\pi$.

Parte 3

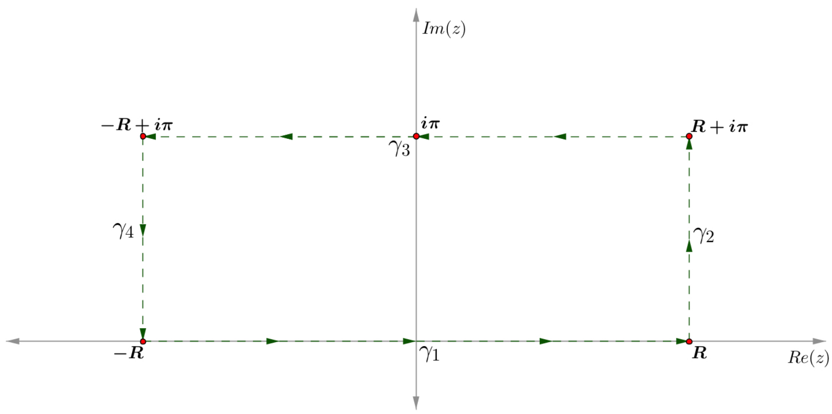
Demuestre que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{e^x + e^{-x}}\, dx \quad = \quad \frac{\pi}{e^{\pi/2} + e^{-\pi/2}}$$

Para ello, se deberá estudiar la integral compleja

$$\oint_{\Gamma} f(z)\, dz$$

con $f(z) = \dfrac{\cos z}{e^z + e^{-z}}$ y donde $\Gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4$ es el camino rectangular ilustrado en la figura siguiente:



(a) **(1 punto)** Calcule $\oint_{\Gamma} f(z)\, dz$. Para esto es conveniente verificar que f tiene polos simples en cada $z = \left(k + \dfrac{1}{2}\right)\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$.

(b) **(4 puntos)** Estudie el comportamiento de las integrales de $f(z)$ en cada trazo recto γ_j, al hacer $R \longrightarrow \infty$.

(c) **(1 punto)** Deduzca, de lo anterior, el valor de la integral real solicitada.

TIEMPO: 3 HORAS.

Y por si les es útil:

$$\cos(z) = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}), \quad \sin(z) = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})$$

Si p es un polo de orden k de f, su residuo es:

$$\mathrm{Res}(f; p) = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \to p} \left((z-p)^k f(z)\right)^{(k-1)}$$

Control #2 - 2013 P1 1/4

(a)

$$f(z) = (x+iy)\cdot x^2 = x^3 + i x^2 y$$

$u(x\,y) = x^3$, $v(x\,y) = x^2 y$

son diferenciables en $\mathbb{R}^2$ (son C^1)

Faltaría solo que se cumplan las condiciones de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \longleftrightarrow 3x^2 = x^2$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \longleftrightarrow 0 = 2xy$$

La 1ª condición solo se cumple si $x=0$ y en tal caso, la 2° cond. también se cumple

Es diferenciable en

$$\{ z \in \mathbb{C} \ / \ Re(z) = 0 \}$$

(b) Si llamamos $\theta(x,y) = \arg(z) \in (-\pi, \pi]$

entonces $\log(z) = \ln|z| + i\,\theta(x,y)$

Asi

$$z^{\alpha} = \exp(\alpha(\ln|z| + i\theta))$$

$$= \exp(\alpha \ln|z| + i\alpha\theta)$$

$$= \exp(\alpha \ln|z|) + \exp(i\alpha\theta)$$

$$= |z|^{\alpha} \cdot (\cos(\alpha\theta) + i \operatorname{sen}(\alpha\theta))$$

$$= |z|^{\alpha} \cos(\alpha\theta) + i\,|z|^{\alpha} \operatorname{sen}(\alpha\theta)$$

con lo cual

$$u(x,y) = \left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^{\alpha} \cos(\alpha \cdot \theta(x,y))$$

$$v(x,y) = \left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^{\alpha} \operatorname{sen}(\alpha \cdot \theta(x,y))$$

(c) $$\limsup \sqrt[k]{|c_k|} = \operatorname{Max}\left\{\lim 1, \lim \sqrt[k]{|a+1|}\right\}$$

$$= 1$$

$$R = 1$$

$$\sum a_k z^k = \sum_{k=0}^{\infty} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{impares}}}{1 \cdot z^{2k+1}} + \sum_{k=0}^{\infty} (a+1) z^{2k}$$

$$= z \cdot \sum_{k=0}^{\infty} (z^2)^k + (a+1) \sum_{k=0}^{\infty} (z^2)^k$$

$$= \frac{z}{1-z^2} + \frac{a+1}{1-z^2} = \frac{a+1+z}{1-z^2}$$

sumas de series geometricas

(d) Se debe asimilar a una serie geometrica

$$f(z) = \frac{z}{z^2+2} = z \cdot \frac{1}{2\left(1+\frac{z^2}{2}\right)} = \frac{z}{2} \cdot \frac{1}{\left(1-\left[-\frac{z^2}{2}\right]\right)}$$

$$= \frac{z}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{z^2}{2}\right)^k$$

$$= \sum (-1)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} z^{2k+1}$$

es decir coeficientes pares : $0 = c_{2k}$
coeficientes impares : $c_{2k+1} = (-1)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}$

Punto de acumulación de $\sqrt[k]{|c_k|}$

Coef. pares : 0

Coef. impares : $\sqrt[2k+1]{\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}} = \sqrt[2k+1]{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2k+2}}$

$$= \sqrt[2k+1]{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2k+1}} \cdot \sqrt[2k+1]{\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

$$\longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$R = \frac{1}{1/\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

disco : $D(0, \sqrt{2})$

puntaje

(a) (0.5) separar en $u(x,y)$, $v(x,y)$

(0.5) argumentar que es diferenciable en $\mathbb{R}^2$

(0.5) de C-R deducir $\{Re(z) = 0\}$

(b) 1.5 puntos

(c) calcular limsup : 0.5 ($\to R = 1$)

calcular la suma, usando series geometricas 1.0

(d) Manipular la expresión para dar forma a una serie geométrica (0.8)

Identificar el coeficiente c_k y calcular el lim sup ⊕ R (0.7)

Control #2 - 2013 P2 1/4

(a)

$$f(z) = \frac{\operatorname{sen}(\pi z^2) + \cos(\pi z^2)}{(z-1)(z-2)}$$

es holomorfa salvo en $z=1$ y $z=2$, ambos puntos son polos simples:

$$\operatorname{Res}(f;1) = \lim_{z\to 1}(z-1) f(z) = \frac{\operatorname{sen}(\pi) + \cos(\pi)}{(1-2)} = 1$$

$$\operatorname{Res}(f;2) = \lim_{z\to 2}(z-2) f(z) = \frac{\operatorname{sen}(4\pi) + \cos(4\pi)}{(2-1)} = 1$$

$0 < r < 1$, ningun polo

Por Cauchy Goursat $I_r = 0$

$1 < r < 2$, solo el polo $z=1$ está encerrado por la curva

$I_r = 2\pi i$

Puede argumentar por residuo o bien por formula integral de Cauchy, pues

$$\int_{C_r} f(z)\,dz = \int_{C_r} \frac{[\operatorname{sen}(\pi z^2) + \cos(\pi z^2)]/(z-2)}{z-1}\,dz$$

$$= 2\pi i \left.\frac{[\operatorname{sen}(\pi z^2) + \cos(\pi z^2)]}{z-2}\right|_{z=1}$$

$2 < r$ ambos polos encerrados por la curva

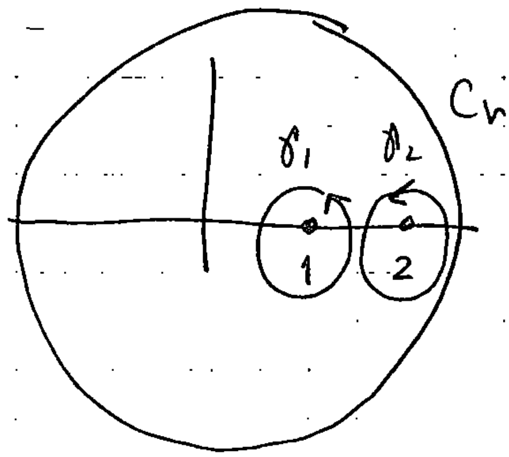
$$I_r = 4\pi i$$ 2/4

Puede argumentar por residuo

$$\int_{C_r} f(z)dz = 2\pi i \left[\operatorname{Res}(f,1) + \operatorname{Res}(f,2) \right]$$

$$= 2\pi i \left[1 + 1 \right] = 4\pi i$$

O bien Teorema de la curva



$$\int_{C_r} f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_2} f(z)dz$$

y usar la formula integral de Cauchy en γ_1 y γ_2 (similar al caso anterior)

<u>puntaje.</u>

1 punto caso $0 < r < 1$

1 punto caso $1 < r < 2$,

1 punto caso $2 < r$

importante: ∘ Determinar singularidades y cuales quedan o no encerradas por C_r

∘ Invocar los teoremas apropiados

(b) i) En $z=0$ se anula un factor del denom.

Si $1-e^{-z}=0$ se anula el otro factor

y esto ocurre si $e^{-z}=1 \Leftrightarrow z=2k\pi i$ $k\in\mathbb{Z}$

como este caso incluye $z=0$ (con $k=0$)

singularidades $z_k=2k\pi i$ $k\in\mathbb{Z}$

ii) $z=0$ polo de orden 2 (ojo que se anulan ambos factores del denom.)

$$\lim_{z\to 0}\frac{e^z z^2}{z(1-e^{-z})} = e^0 \lim \frac{z^2}{z(1-e^{-z})} = \lim_{z\to 0}\frac{z}{(1-e^{-z})}$$

$$\overset{L'H}{=} \lim_{z\to 0}\frac{1}{e^{-z}} = 1$$

$z=2k\pi i$ $k\neq 0$ polo de orden 1.

$$\lim_{z\to 2k\pi i}\frac{(z-2k\pi i)\,e^z}{z\,(1-e^{-z})} = \frac{e^{2k\pi i}}{2k\pi i}\cdot\lim\frac{z-2k\pi i}{(1-e^{-z})}$$

$$\overset{L'H}{=} \lim \frac{1}{e^{-z}} = 1$$

iii) El círculo $|z| = r$ con $r < 2\pi$
solo encierra el polo doble $z = 0$

Calculemos $\text{Res}(f, 0)$

$$= \lim_{z \to 0} \frac{1}{1!} \left(\frac{z^2 e^z}{z(1-e^{-z})} \right)'$$

$$= \lim_{z \to 0} \frac{e^z + z e^z - 2z - 1}{(1 - e^{-z})^2}$$

$$\overset{L'H}{=} \lim \frac{2e^z + z e^z - 2}{2e^{-z} - 2e^{-2z}}$$

$$\overset{L'H}{=} \lim \frac{3e^z + z e^z}{-2e^{-z} + 4e^{-2z}} = \frac{3}{2}$$

Luego

$$\int_{|z|=r} f(z)\, dz = 2\pi i \cdot \frac{3}{2} = 3\pi i$$

puntaje i) 1 punto por todas las sing.
Si solo determina $z=0$ 0.5 pto
ii) 0.5 pto orden 2 para $z=0$
0.5 pto orden 1 para $z = 2k\pi i$ $k \neq 0$

iii) 1 punto. (error en el calculo del residuo 0.5 punto)

PAUTA P3 C2 CAA 2013/2

Profs: R. Gormaz
C. Conca.

(a) Calcular $\oint_\Gamma f(z)dz$.

Se puede calcular mediante el teorema de los residuos. Para ello, encontremos los polos de f:

$$e^{z} + e^{-z} = 0 \qquad / e^{z}\cdot(\ )$$
$$\Longleftrightarrow \quad e^{2z} + 1 = 0$$
$$\Longleftrightarrow \quad e^{2z} = e^{i\pi}$$
$$\Longleftrightarrow \quad 2z = i\pi + 2k\pi i \quad , k \in \mathbb{Z}.$$
$$\Longleftrightarrow \quad z = \left(k+\tfrac{1}{2}\right)\pi i \quad , k \in \mathbb{Z}$$

Se tiene que
$$\lim_{z\to(k+\frac{1}{2})\pi i} \left(z-\left(k+\tfrac{1}{2}\right)\pi i\right)\frac{\cos(z)}{e^{z}+e^{-z}}$$
$$= \lim_{z\to(k+\frac{1}{2})\pi i} \cos(z) \cdot \lim_{z\to(k+\frac{1}{2})\pi i} \frac{\left(z-\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi i\right)}{e^{z}+e^{-z}}$$
$$= \cos\left(\left(k+\tfrac{1}{2}\right)\pi i\right)\cdot \lim_{z\to(k+\frac{1}{2})\pi i}\frac{1}{e^{z}-e^{-z}} \quad \longleftarrow \text{por L'Hôpital}$$
$$= \frac{e^{(k+\frac{1}{2})\pi}+e^{-(k+\frac{1}{2})\pi}}{2}\cdot\frac{1}{e^{i\cdot(k+\frac{1}{2})\pi}-e^{-i(k+\frac{1}{2})\pi}}$$
$$= \frac{\cosh\left(\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi\right)}{2i\,\mathrm{sen}\left(\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi\right)} \neq 0$$

Luego $\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi i$ con $k\in\mathbb{Z}$ es polo simple de f.

Ahora, notemos que $\frac{\pi i}{2}$ es el único polo encerrado por la curva Γ.

Así,
$$\oint_\Gamma f(z)dz = 2\pi i \operatorname{Res}\left(f,\frac{\pi i}{2}\right)$$
$$= \cancel{2}\pi\cancel{i}\cdot\frac{\cosh(\pi/2)}{\cancel{2}\cancel{i}\,\mathrm{sen}(\pi/2)} \qquad (\mathrm{sen}(\pi/2)=1)$$
$$= \pi\cosh(\pi/2).$$

(b)

- $$\int_{\gamma_1} f(z)\,dz \underset{\boxed{\substack{r(x)=x \\ \text{con } x \text{ desde } -R \text{ a } R}}}{=} \int_{-R}^{R} \frac{\cos(x)}{e^{x}+e^{-x}}\,dx \xrightarrow[R\to\infty]{} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{e^{x}+e^{-x}}\,dx$$ } es la integral que se pide.

- $$\left|\int_{\gamma_2} f(z)\,dz\right| \underset{\boxed{\substack{r(y)=R+iy \\ \text{con } y \text{ desde } 0 \text{ hasta } \pi}}}{=} \left|\int_0^{\pi} \frac{\cos(R+iy)}{e^{R+iy}+e^{-R-iy}}\,i\,dy\right| \leq \int_0^{\pi} \left|\frac{\cos(R+iy)}{e^{R+iy}+e^{-R-iy}}\right| dy$$

$|a|-|b| \leq |a+b|$.

$$\leq \int_0^{\pi} \frac{|\cos(R)\cos(iy) - \operatorname{sen}(R)\operatorname{sen}(iy)|}{|e^{R+iy}|-|e^{-R-iy}|}\,dy$$

$|a+b| \leq |a|+|b|$ y además $|e^{i\sigma}|=1$ $\forall \sigma\in\mathbb{R}$.

$$\leq \int_0^{\pi} \frac{|\cos(R)||\cos(iy)| + |\operatorname{sen}(R)||\operatorname{sen}(iy)|}{e^{R}-e^{-R}}\,dy$$

$|\cos(R)|\leq 1$
$|\operatorname{sen}(R)|\leq 1$

$$\leq \frac{1}{e^{R}-e^{-R}} \underbrace{\int_0^{\pi} \left(|\cos(iy)|+|\operatorname{sen}(iy)|\right) dy}_{\text{es un número (finito) que no depende de } R}$$

$$\xrightarrow[R\to\infty]{} 0.$$

- $$\int_{\gamma_3} f(z)\,dz \underset{\boxed{\substack{r(x)=x+i\pi \\ \text{donde } x \text{ va desde } R \text{ hasta } -R}}}{=} \int_{R}^{-R} \frac{\cos(x+i\pi)}{e^{x+i\pi}+e^{-x-i\pi}}\,dx = \int_{R}^{-R} \frac{\cos(x)\cos(i\pi)-\operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(i\pi)}{e^{x}\underbrace{e^{i\pi}}_{=-1}+e^{-x}\underbrace{e^{-i\pi}}_{=-1}}\,dx$$

$$= \cos(i\pi)\int_{-R}^{R} \frac{\cos(x)}{e^{x}+e^{-x}}\,dx - \operatorname{sen}(i\pi)\underbrace{\int_{-R}^{R} \frac{\operatorname{sen}(x)}{e^{x}+e^{-x}}\,dx}_{=0 \text{ pues } \frac{\operatorname{sen}(x)}{e^{x}+e^{-x}} \text{ es impar}}$$

$$= \frac{e^{\pi}+e^{-\pi}}{2}\int_{-R}^{R} \frac{\cos(x)}{e^{x}+e^{-x}}\,dx$$

$$\longrightarrow \frac{e^{\pi}+e^{-\pi}}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{e^{x}+e^{-x}}\,dx$$

- $$\left|\int_{\gamma_4} f(z)\,dz\right| \underset{\substack{\uparrow\\ \boxed{\substack{r(y)=-R+iy\\ \text{con } y \text{ desde } \pi \text{ hasta } 0}}}}{=} \left|\int_{\pi}^{0} \frac{\cos(-R+iy)}{e^{-R+iy}+e^{R-iy}}\, i\, y\right| \leq \int_0^{\pi} \left|\frac{\cos(-R+iy)}{e^{-R+iy}+e^{R-iy}}\right| dy$$

$|a|-|b| \leq |a+b|$

$$\leq \int_0^{\pi} \frac{|\cos(-R+iy)|}{|e^{R-iy}|-|e^{-R+iy}|}\, dy$$

$$= \int_0^{\pi} \frac{|\cos(-R)\cos(iy) - \operatorname{sen}(-R)\operatorname{sen}(iy)|}{e^{R}\underbrace{|e^{-iy}|}_{=1} - e^{-R}\underbrace{|e^{iy}|}_{=1}}\, dy$$

desig. triang.

$$\leq \int_0^{\pi} \frac{|\cos(R)|\,|\cos(iy)| + |\operatorname{sen}(R)|\,|\operatorname{sen}(iy)|}{e^{R}-e^{-R}}\, dy$$

$|\cos(R)| \leq 1$
$|\operatorname{sen}(R)| \leq 1$

$$\leq \frac{1}{e^{R}-e^{-R}} \underbrace{\int_0^{\pi} \left(|\cos(iy)| + |\operatorname{sen}(iy)|\right) dy}_{\text{es un número (finito) que no depende de } R}$$

$$\xrightarrow[R\to\infty]{} 0$$

ⓒ De lo anterior se tiene que

$$\lim_{R\to\infty} \oint_{\Gamma} f(z)\,dz \underset{\substack{\uparrow\\ \text{parte (a), integral por teo. residuos}}}{=} \pi\cdot\cosh(\pi/2) \underset{\substack{\uparrow\\ \text{integral por definición}}}{=} \lim_{R\to\infty}\sum_{j=1}^{4}\int_{\gamma_j} f(z)\,dz \underset{\substack{\uparrow\\ \text{parte (b)}}}{=} \left(1+\frac{e^{\pi}+e^{-\pi}}{2}\right)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos(x)}{e^{x}+e^{-x}}\,dx$$

$$\Longrightarrow \quad \pi\cdot\left(\frac{e^{\pi/2}+e^{-\pi/2}}{\cancel{2}}\right) = \left(\frac{2+e^{\pi}+e^{-\pi}}{\cancel{2}}\right)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos(x)}{e^{x}+e^{-x}}\,dx$$

(pues $2+e^{\pi}+e^{-\pi} = (e^{\pi/2}+e^{-\pi/2})^2$)

$$\Longrightarrow \quad \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos(x)}{e^{x}+e^{-x}}\,dx = \frac{\pi}{e^{\pi/2}+e^{-\pi/2}}$$

//

La parte (b) o la parte (c) pueden acotarse sin recurrir al coseno de la suma

$$\frac{\cos(z)}{e^z+e^{-z}} = \frac{1}{2}\frac{(e^{iz}+e^{-iz})}{e^z+e^{-z}} \qquad \begin{cases} z = R+iy \\ y\in[0,\pi] \end{cases}$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{e^{iR-y}+e^{-iR+y}}{e^R e^{iy}+e^{-R}e^{-iy}}$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{e^{iR}e^{-y}+e^{-iR}e^{y}}{e^R e^{iy}+e^{-R}e^{-iy}}$$

así
$$\left|\int_{\gamma_2} f(z)\,dz\right| \leq \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\frac{|e^{iR}e^{-y}+e^{-iR}e^{y}|}{|e^R e^{iy}+e^{-R}e^{-iy}|}\,dy$$

$$\leq \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\frac{e^{-y}+e^{y}}{e^R-e^{-R}}\,dy$$

$$\leq \frac{1}{2(e^R-e^{-R})}\cdot\underbrace{\int_0^{\pi}(e^{-y}+e^{y})\,dy}_{\text{cte. no dep de } R}$$

$$\leq C\cdot\frac{1}{e^R-e^{-R}} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$$

(la parte (c) es similar)

puntajes Parte 3

(a) - Determinar que hay 1 solo polo al interior de la curva 0.5

- Calculo integral (Res) 0.5

(b) γ_1 - parametrizar 0.3

reconocer la integral que se pide 0.7

γ_2 - parametrizar 0.2

acotar 0.5

lim = 0 0.3

γ_3 - reconocer que es la integral que se pide con un factor 1.0

γ_4 - parametrizar 0.2

acotar 0.5

Calcular lim = 0 0.3

(c) Escribir $\int_\Gamma = \int_{\gamma_1} + \int_{\gamma_2} + \int_{\gamma_3} + \int_{\gamma_4}$ 0.3

despejar la integral pedida 0.7