**MA2002 Cálculo Avanzado y Aplicaciones.**
**Profesor:** Carlos Conca - Raúl Gormaz
**Auxiliares:** Victoria Pérez - Hugo Carrillo - Nicolás Godoy - Carlos Fuentes
**23 de octubre de 2014**

# Pauta Control 2

**P1. (a)** Calcule el radio de convergencia de las siguientes series:

**(i) (1.0 puntos)** $\sum_{n\geq 0} (3+(-1)^n)^n \, z^n$

<u>**Solución**</u>**:** De inmediato notamos que es una serie de potencias con $a_n = (3+(-1)^n)^n$ y $z_0 = 0$. Calculamos el radio de convergencia utilizando el criterio de la raíz n-ésima:

$$\begin{aligned}\frac{1}{R} &= \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} \\ &= \limsup_{n\to\infty} |3+(-1)^n|\end{aligned}$$

Claramente cuando $n$ tiende a infinito esta sucesión tiene 2 puntos de acumulación: 2 y 4. Como el lím sup nos dice que tomemos el mayor, se tiene que

$$\frac{1}{R} = 4 \quad \Rightarrow \quad \boxed{R = \frac{1}{4}} \blacksquare$$

**(ii) (1.0 puntos)** $\sum_{n\geq 0} (n+a^n) \, z^n$, con $a \in [1, \infty)$

<u>**Solución**</u>**:** Para mayor simplicidad, dividimos la serie en 2:

$$\sum_{n\geq 0}(n+a^n)z^n = \sum_{n\geq 0} nz^n + \sum_{n\geq 0} a^n z^n$$

Luego, analizamos cada uno de estos radios de convergencia por separado:

- La primera es una serie de potencias con $c_n = n$ y $z_0 = 0$. Usando el criterio del cuociente tenemos que:

$$\begin{aligned}\frac{1}{R} &= \lim_{n\to\infty} \frac{|c_{n+1}|}{|c_n|} \\ &= \lim_{n\to\infty} \left|\frac{n+1}{n}\right| \\ &= \lim_{n\to\infty} \left|1+\frac{1}{n}\right| = 1\end{aligned}$$

  Luego, el radio de convergencia de esta serie es 1.

- La segunda es una serie de potencias con $c_n = a^n$ y $z_0 = 0$. Usando el criterio de la raíz n-ésima tenemos que:

$$\begin{aligned}\frac{1}{R} &= \lim_{n\to\infty} |c_n|^{1/n} \\ &= \lim_{n\to\infty} |a^n|^{1/n} \\ &= \lim_{n\to\infty} |a| = a\end{aligned}$$

Esto último pues $a \geq 1$. Luego, el radio de convergencia de esta serie es $\dfrac{1}{a}$.

Como necesitamos que ambas series convergan para que su suma converga, imponemos que el radio de convergencia de la serie original debe ser igual al más pequeño de los dos encontrados:

$$R \;=\; \text{mín}\left\{1,\ \frac{1}{a}\right\} \quad \Rightarrow \quad \boxed{R \;=\; \frac{1}{a}}$$

**(iii) (1.0 puntos)** $\displaystyle\sum_{n\geq 0}(1+2i)^{-n}\, z^{2n}$

<u>**Solución:**</u> Primero debemos lograr expresar esta serie como una serie de potencias, ya que inicialmente se salta todos los términos impares. Definimos:

$$a_k \;=\; \begin{cases} (1+2i)^{-k/2} & \text{si existe algún } n \text{ para el cual } k=2n \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

Y notamos que, con esto, la serie

$$\sum_{k\geq 0} a_k z^k$$

efectivamente es una serie de potencias centrada en $z_0 = 0$, y el valor de cada uno de sus términos es igual al de la serie original. Calculamos el radio de convergencia utilizando el criterio del cuociente:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{R} \;=\; \limsup_{n\to\infty} \sqrt[2n]{|a_{2n}|} \;=\; \sqrt{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_{2n}|}} \;&=\; \sqrt{\limsup_{n\to\infty} \frac{|a_{2(n+1)}|}{|a_{2n}|}} \\
&=\; \sqrt{\limsup_{n\to\infty} \left|\frac{(1+2i)^{-n-1}}{(1+2i)^{-n}}\right|} \\
&=\; \sqrt{\left|\frac{1}{1+2i}\right|} \;=\; \frac{1}{\sqrt[4]{5}}
\end{aligned}$$

Luego, el radio de convergencia es $\boxed{R = \sqrt[4]{5}}$ ■

**(b) (3.0 puntos)** Encuentre la serie de potencias de la función $f(z) = \dfrac{2}{z^2 - i}$ en torno a $z_0 = 1$.

<u>**Solución:**</u> Para expresar la función como una serie geométrica, primero debemos reducir el grado del denominador utilizando el método de las fracciones parciales. Para esto, es necesario notar que:

$$i \;=\; e^{i\pi/2} \quad \Rightarrow \quad i^{1/2} \;=\; e^{i\pi/4}$$

Luego, usamos fracciones parciales:

$$\begin{aligned}
\frac{2}{z^2 - i} \;&=\; \frac{A}{z - e^{i\pi/4}} + \frac{B}{z + e^{i\pi/4}} \\
&=\; \frac{Az + Ae^{i\pi/4} + Bz - Be^{i\pi/4}}{z^2 - i}
\end{aligned}$$

Igualando ambos polinomios en el numerador planteamos el sistema:

$$\begin{aligned} A + B &= 0 \\ (A-B)e^{i\pi/4} &= 2 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad A \;=\; \frac{1}{e^{i\pi/4}} \quad \wedge \quad B \;=\; -\frac{1}{e^{i\pi/4}}$$

Luego:

$$S := \frac{2}{z^2-i} = \frac{1}{e^{i\pi/4}(z-e^{i\pi/4})} - \frac{1}{e^{i\pi/4}(z+e^{i\pi/4})}$$

Para expresar estas series en torno a $z_0 = 1$ basta adecuar los denominadores:

$$\frac{1}{e^{i\pi/4}(z-e^{i\pi/4})} - \frac{1}{e^{i\pi/4}(z+e^{i\pi/4})} = \frac{1}{e^{i\pi/4}}\left(\underbrace{\frac{1}{z-e^{i\pi/4}}}_{S_1} - \underbrace{\frac{1}{z+e^{i\pi/4}}}_{S_2}\right)$$

Luego, para $S_1$:

$$\begin{aligned} S_1 = \frac{1}{z-e^{i\pi/4}-1+1} &= \frac{1}{1-e^{i\pi/4}-(1-z)} \\ &= \frac{1}{1-e^{i\pi/4}} \cdot \frac{1}{1-\dfrac{1-z}{1-e^{i\pi/4}}} \\ &= \frac{1}{1-e^{i\pi/4}} \sum_{n\geq 0} \left(\frac{1-z}{1-e^{i\pi/4}}\right)^n \\ &= \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{(1-e^{i\pi/4})^{n+1}}(z-1)^n \end{aligned}$$

Análogamente, para $S_2$:

$$\begin{aligned} S_2 = \frac{1}{z+e^{i\pi/4}-1+1} &= \frac{1}{1+e^{i\pi/4}-(1-z)} \\ &= \frac{1}{1+e^{i\pi/4}} \cdot \frac{1}{1-\dfrac{1-z}{1+e^{i\pi/4}}} \\ &= \frac{1}{1+e^{i\pi/4}} \sum_{n\geq 0} \left(\frac{1-z}{1+e^{i\pi/4}}\right)^n \\ &= \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{(1+e^{i\pi/4})^{n+1}}(z-1)^n \end{aligned}$$

Finalmente:

$$\begin{aligned} S = \frac{1}{e^{i\pi/4}}(S_1 - S_2) &= \frac{1}{e^{i\pi/4}}\left(\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{(1-e^{i\pi/4})^{n+1}}(z-1)^n - \sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{(1+e^{i\pi/4})^{n+1}}(z-1)^n\right) \\ &= \frac{1}{e^{i\pi/4}}\left(\sum_{n\geq 0}\left[\frac{(-1)^n}{(1-e^{i\pi/4})^{n+1}} - \frac{(-1)^n}{(1+e^{i\pi/4})^{n+1}}\right](z-1)^n\right) \\ &= \frac{1}{e^{i\pi/4}}\left(\sum_{n\geq 0}(-1)^n\left[\frac{(1+e^{i\pi/4})^{n+1}-(1-e^{i\pi/4})^{n+1}}{(1-i)^{n+1}}\right](z-1)^n\right) \\ &= \sum_{n\geq 0}\underbrace{(-1)^n\left[\frac{(1+e^{i\pi/4})^{n+1}-(1-e^{i\pi/4})^{n+1}}{e^{i\pi/4}(1-i)^{n+1}}\right]}_{a_n}(z-1)^n \end{aligned}$$

Se concluye que la función expresada en serie de potencias en torno a $z_0 = 1$ es:

$$\frac{1}{z^2 - i} = \sum_{n\geq 0}(-1)^n \left[\frac{(1+e^{i\pi/4})^{n+1} - (1-e^{i\pi/4})^{n+1}}{e^{i\pi/4}(1-i)^{n+1}}\right](z-1)^n \blacksquare$$

**P2.** Sea $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ la función definida por

$$f(z) = |z-a|^2$$

con $a$ un número real.

**(a)** **(1.5 puntos)** Estudie dónde $f$ es derivable en el sentido complejo y explicite el mayor subconjunto de $\mathbb{C}$ donde la función es holomorfa.

**Solución:** Primero, si expresamos $z = x + iy$ podemos expresar $f$ en función de sus campos escalares:

$$\begin{aligned} f(x+iy) = |x+iy-a|^2 &= (x-a)^2 + y^2 \\ &= u(x,y) + iv(x,y) \end{aligned}$$

con $u(x, y) = (x-a)^2 + y^2$ y $v(x, y) = 0$. Imponemos las condiciones de Cauchy-Riemann para analizar la derivabilidad:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned} \Leftrightarrow \begin{aligned} 2(x-a) &= 0 \\ 2y &= 0 \end{aligned} \Leftrightarrow \begin{aligned} x &= a \\ y &= 0 \end{aligned}$$

Luego, $f$ sólo es derivable en $z = a$. Como éste es un único punto, $f$ no es holomorfa en ningún subconjunto de $\mathbb{C}$ $\blacksquare$

**(b)** **(1.5 puntos)** Demuestre usando fracciones parciales que para $|z| = r$,

$$\frac{1}{|z-a|^2} = \frac{A}{z-a} + \frac{B}{r^2 - az}$$

Explicite los valores de las constantes $A$ y $B$.

**Solución:** Utilizamos que:

$$\begin{aligned} \frac{1}{|z-a|^2} = \frac{1}{(z-a)(\bar{z}-\bar{a})} &= \frac{1}{(z-a)(\bar{z}-a)} \\ &= \frac{1}{z\bar{z} - az - a\bar{z} - a^2} \cdot \frac{z}{z} \\ &= \frac{z}{z\bar{z}z - a\bar{z}z - a\bar{z}z - a^2 z} \end{aligned}$$

Luego, como $z\bar{z} = |z|^2$ y en este caso $|z| = r$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{|z-a|^2} &= \frac{z}{r^2 z - az^2 - ar^2 - a^2 z} \\ &= \frac{z}{r^2(z-a) - az(z-a)} \\ &= \frac{z}{(z-a)(r^2 - az)} \\ &= \frac{A}{z-a} + \frac{B}{r^2 - az} \\ &= \frac{Ar^2 - Aaz + Bz - Ba}{(z-a)(r^2 - az)} \end{aligned}$$

Igualando ambos polinomios en el numerador planteamos el sistema:

$$\begin{array}{rcl} B - Aa &=& 1 \\ Ar^2 - Ba &=& 0 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{rcl} Ba - Aa^2 &=& a \\ Ar^2 - Ba &=& 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow \quad Ar^2 - Aa^2 = a$$

$$\Rightarrow \quad A = \frac{a}{r^2 - a^2} \quad \wedge \quad B = \frac{r^2}{r^2 - a^2}$$

Por lo tanto:

$$\frac{1}{|z-a|^2} = \frac{a}{r^2 - a^2}\frac{1}{z-a} + \frac{r^2}{r^2-a^2}\frac{1}{r^2 - az} \blacksquare$$

En las partes siguientes encuentre el valor de

$$\oint_{|z|=r} \frac{dz}{|z-a|^2}$$

**(c)** **(1.5 puntos)** Para el caso $|a| < r$.

<u>**Solución**</u>**:** Primero notamos que las singularidades de la función se encuentran en los puntos donde ésta se indetermina, en este caso $z = a$ y $z = \dfrac{r^2}{a}$.

Luego, analizamos cuáles de estas singularidades están contenidas en la región que limita curva $|z| = r$ para $|a| < r$:

$$\begin{array}{rcl} z = a < r & \Rightarrow & z = a \text{ está en el interior de la región} \\ z = \dfrac{r^2}{a} = \dfrac{r}{a}\cdot r > r & \Rightarrow & z = \dfrac{r^2}{a} \text{ está fuera de la región ya que } \dfrac{r}{a} > 1 \end{array}$$

Calculemos el valor de la integral usando **(b)** :

$$\oint_{|z|=r} \frac{dz}{|z-a|^2} = \underbrace{\oint_{|z|=r} \frac{A\,dz}{z-a}}_{I_1} + \underbrace{\oint_{|z|=r} \frac{B\,dz}{r^2 - az}}_{I_2}$$

Calculamos por separado:

$$I_1 = \oint_{|z|=r} \frac{A}{z-a}dz = 2\pi i A = \frac{2\pi a}{r^2 - a^2} i$$

$$I_2 = \oint_{|z|=r} \frac{B}{r^2 - az}dz = 0$$

Donde en la primera igualdad se utilizó la fórmula de Cauchy con $f(z) = A$ y en la segunda que la función es holomorfa en la región delimitada por la curva (no contiene a su singularidad).

Se concluye que:

$$\oint_{|z|=r} \frac{dz}{|z-a|^2} = \frac{2\pi a}{r^2 - a^2} i \blacksquare$$

**(d)** **(1.5 puntos)** Para el caso $|a| > r$.

**<u>Solución</u>:** Análogo a lo anterior, analizamos cuáles de las singularidades de la función están contenidas en la región que limita curva $|z| = r$ para $|a| < r$:

$$\begin{aligned} z \;=\; a \;>\; r \quad &\Rightarrow \quad z = a \text{ está fuera de la región} \\ z \;=\; \frac{r^2}{a} \;=\; \frac{r}{a}\cdot r \;<\; r \quad &\Rightarrow \quad z = \frac{r^2}{a} \text{ está dentro de la región ya que } \frac{r}{a} < 1 \end{aligned}$$

Calculemos el valor de la integral usando **(b)** :

$$\oint_{|z|=r} \frac{dz}{|z-a|^2} \quad = \quad \underbrace{\oint_{|z|=r} \frac{A\,dz}{z-a}}_{I_1} + \underbrace{\oint_{|z|=r} \frac{B\,dz}{r^2 - az}}_{I_2}$$

Calculamos por separado, esta vez notando que $I_1$ es la integral de una función holomorfa sobre un camino cerrado (ya que $z = a$ está fuera de la región encerrada por la curva) y usando la fórmula de Cauchy con $f(z) = B$ en $I_2$:

$$\begin{aligned} I_1 \;&=\; A\oint_{|z|=r} \frac{A}{z-a}dz \quad = \quad 0 \\ I_2 \;&=\; \oint_{|z|=r} \frac{B}{r^2-az}dz \quad = \quad 2\pi i B \quad = \quad \frac{2\pi r^2}{r^2-a^2}i \end{aligned}$$

Se concluye que:

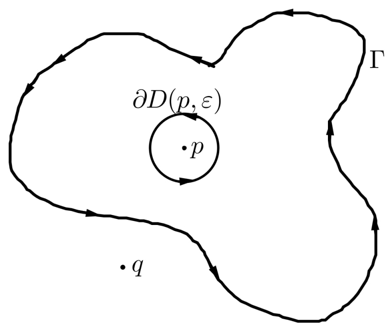
$$\oint_{|z|=r} \frac{dz}{|z-a|^2} \quad = \quad \frac{2\pi r^2}{r^2-a^2}i \;\blacksquare$$

**P3.** **(a)** **(1.0 puntos)** Sea $g : \mathbb{C} \setminus \{p, q\} \longrightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa y $\Gamma \subseteq \mathbb{C}$ una curva cerrada simple y regular por trozos de modo que $p$ está en la región encerrada por $\Gamma$ y $q$ está fuera. Justifique, indicando los resultados que utilice, la siguiente identidad:

$$\int_\Gamma \frac{g(z)}{z-p} dz = \int_{\partial D(p,\varepsilon)} \frac{g(z)}{z-p} dz$$

donde $\varepsilon > 0$ es suficientemente pequeño para que $D(p, \varepsilon)$ esté en la región encerrada por $\Gamma$ y $\partial D(p, \varepsilon) \cap \Gamma = \emptyset$. Considere ambas curvas recorridas en sentido antihorario.

**Hint:** Puede serle útil considerar la siguiente figura de referencia:

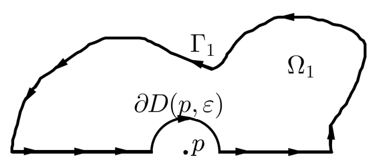



**Solución:** Definimos

$$f(z) \quad = \quad \frac{g(z)}{z-p}$$

Veremos dos formas de resolución utilizando esta función auxiliar:

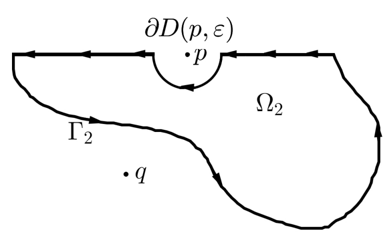
- **Forma 1:** Sea $\Omega_1$ la región encerrada por la curva $\Gamma_1$ de la figura:




Como $\Omega_1$ es un abierto simplemente conexo, $\Gamma_1$ es una curva cerrada simple regular por trozos y $f$ es una función holomorfa en $\Omega_1$, en virtud del teorema de Cauchy-Goursat se tiene que

$$\oint_{\Gamma_1} f(z)\, dz \;=\; 0$$

Análogamente, si consideramos $\Omega_2$ la región encerrada por la curva $\Gamma_2$ de la figura:




Como $\Omega_2$ es un abierto simplemente conexo, $\Gamma_2$ es una curva cerrada simple regular por trozos y $f$ es una función holomorfa en $\Omega_2$, en virtud del teorema de Cauchy-Goursat se tiene que

$$\oint_{\Gamma_2} f(z)\, dz \;=\; 0$$

Luego, como las integrales sobre los segmentos rectos se anulan entre sí, tenemos que:

$$0 \;=\; \oint_{\Gamma_1} f(z)\,dz + \oint_{\Gamma_2} f(z)\,dz \;=\; \oint_{\Gamma} f(z)\,dz + \oint_{-\partial D(p,\varepsilon)} f(z)\,dz$$

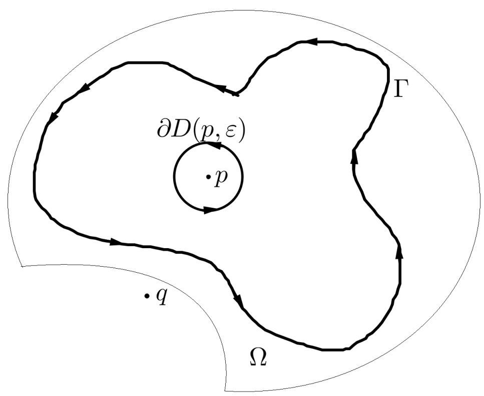
Lo cual implica que:

$$\oint_{\Gamma} f(z)\,dz \;=\; -\oint_{-\partial D(p,\varepsilon)} f(z)\,dz \;=\; \oint_{\partial D(p,\varepsilon)} f(z)\,dz$$

O, equivalentemente:

$$\oint_{\Gamma} \frac{g(z)}{z-p}dz \;=\; \oint_{\partial D(p,\varepsilon)} \frac{g(z)}{z-p}dz \;\blacksquare$$

- **<u>Forma 2</u>**: Usaremos el teorema de la curva sobre $\Omega$ un abierto simplemente conexo que contiene a $\Gamma$ (y la región que ésta encierra) pero no a $q$, como muestra la figura:




Como $f$ es holomorfa en $\Omega \setminus \{p\}$ se tiene directamente que:

$$\oint_{\Gamma} f(z)\,dz \;=\; \oint_{\partial D(p,\varepsilon)} f(z)\,dz$$

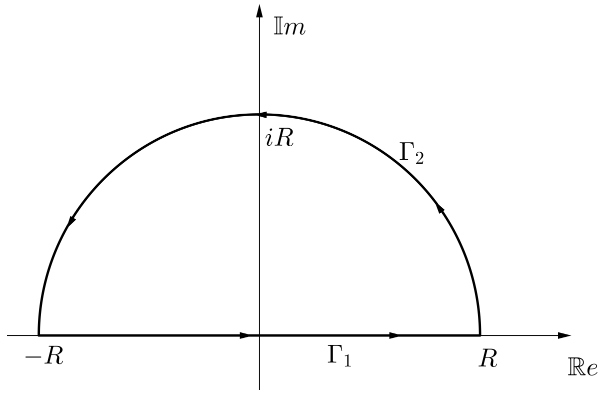
O, equivalentemente:

$$\oint_{\Gamma} \frac{g(z)}{z-p}dz \;=\; \oint_{\partial D(p,\varepsilon)} \frac{g(z)}{z-p}dz \;\blacksquare$$

**(b) (2.0 puntos)** Sea

$$f(z) = \frac{ze^{iz}}{z^2+1}$$

Considere la curva $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, donde $\Gamma_1$ es el segmento recto y $\Gamma_2$ el arco de circunferencia que indica la figura.



Justifcando adecuadamente, demuestre que para $R > 1$

$$\oint_\Gamma f(z)\,dz \;=\; \frac{i\pi}{e}$$

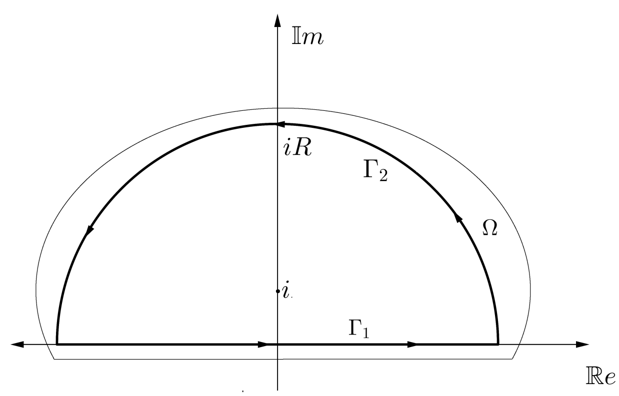
**Solución:**
Notamos que $f$ es holomorfa en $\mathbb{C} \setminus \{i, -i\}$ y, como $R > 1$ la curva encierra a $i$ pero por su construcción deja a $-i$ fuera de la región interior. Podemos entonces basarnos en la parte **(a)** y considerar $p = i$, $q = -i$ y:

$$g(z) \;=\; \frac{ze^{iz}}{z+i}$$

con lo cual:

$$\oint_\Gamma f(z)\,dz \;=\; \oint_\Gamma \frac{g(z)}{z-i}dz \;=\; \oint_{\partial D(i,\,\varepsilon)} \frac{g(z)}{z-i}dz$$

Definamos ahora un abierto conexo $\Omega$ que contenga a $\Gamma$ y su interior pero no a $-i$, como muestra la figura:




En estas condiciones, como además $g$ es una función continua en $i$, podemos utilizar la fórmula de Cauchy para concluir que:

$$\oint_{\partial D(i,\,\varepsilon)} \frac{g(z)}{z-i}dz \;=\; 2\pi i g(i) \;=\; 2\pi i\left(\frac{ie^{i\cdot i}}{i+i}\right) \;=\; \frac{i\pi}{e} \;\blacksquare$$

**(c)** **(1.0 puntos)** Muestre que $\forall R > 1$ y $\forall t \in \mathbb{R}$

$$\frac{1}{|R^2e^{it}+1|} \;\leq\; \frac{1}{R^2-1}$$

**Solución:** Presentamos dos formas de resolución:

- **Forma 1:** Usando la desigualdad triangular se tiene que:

$$R^2 \;=\; |R^2||e^{it}| \;=\; |R^2e^{it}+1-1| \;\leq\; |R^2e^{it}+1| + |-1|$$

Luego:

$$R^2 \;\leq\; |R^2e^{it}+1| + 1 \quad\Rightarrow\quad R^2 - 1 \;\leq\; |R^2e^{it}+1|$$

O, equivalentemente:

$$\frac{1}{|R^2e^{it}+1|} \;\leq\; \frac{1}{R^2-1} \;\blacksquare$$

- **<u>Forma 2</u>:** Usamos la desigualdad

$$||a| - |b|| \quad \leq \quad |a - b|$$

con $a = R^2e^{it}$ y $b = 1$, con lo cual $|a| - |b| \ = \ R^2 - 1$ y $|a - b| \ = \ |R^2e^{it} - 1|$. Como $R > 1$ se tiene además que $||a| - |b|| \ = \ R^2 - 1$. Finalmente:

$$||a| - |b|| \ \leq \ |a - b| \quad \Rightarrow \quad R^2 - 1 \ \leq \ \left|R^2e^{it} - 1\right|$$

Finalmente, como $R > 1$, se tiene que $R^2 - 1 > 0$ y:

$$\frac{1}{|R^2e^{it} - 1|} \quad \leq \quad \frac{1}{R^2 - 1} \ \blacksquare$$

**(d) (2.0 puntos)** Usando las partes anteriores, concluya que

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x\cos(x)}{1 + x^2} = 0 \qquad\qquad \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin(x)}{1 + x^2} = \frac{\pi}{e}$$

**Hint:** Piense en aprovechar todas las simetrías del problema y el hecho que

$$\forall \alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad \sin(\alpha) \geq \frac{2}{\pi}\alpha.$$

**<u>Solución</u>:** La idea es considerar $f(z) \ = \ \dfrac{ze^{iz}}{1 + z^2}$ y estudiar el valor de $\displaystyle\int_\Gamma f(z)\,dz$ cuando $R \longrightarrow \infty$.

Tenemos que:

$$\int_\Gamma f(z)\,dz \quad = \quad \int_{\Gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\Gamma_2} f(z)\,dz$$

Luego, por parte **(b)** :

$$\int_\Gamma f(z)\,dz \ = \ \frac{i\pi}{e} \quad \Rightarrow \quad \frac{i\pi}{e} \ = \ \underbrace{\int_{\Gamma_1} f(z)\,dz}_{I_1} + \underbrace{\int_{\Gamma_2} f(z)\,dz}_{I_2}$$

Estudiaremos por separado el comportamiento de $I_1$ e $I_2$ cuando $R \longrightarrow \infty$:

$$\begin{aligned}
\lim_{R\to\infty} \int_{\Gamma_1} f(z)\,dz \ = \ \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{xe^{ix}}{1 + x^2}\,dx \quad &= \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{xe^{ix}}{1 + x^2}\,dx \\
&= \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\cos(x)}{1 + x^2}\,dx + i\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin(x)}{1 + x^2}\,dx
\end{aligned}$$

Es decir, del análisis de esta integral se desprenden las integrales pedidas en el enunciado. Veamos ahora $I_2$:

Parametrizamos por $\gamma(\theta) = Re^{i\theta}$ con $\theta \in [0, \pi]$:

$$\begin{aligned}
0 \ \leq \ \left|\int_{\Gamma_2} f(z)\,dz\right| \ = \ \left|\int_0^\pi f(\gamma(\theta))\dot{\gamma}(\theta)\,d\theta\right| \quad &= \quad \left|\int_0^\pi \frac{Re^{i\theta}e^{iRe^{i\theta}}}{1 + R^2e^{2i\theta}} Rie^{i\theta}\,d\theta\right| \\
&\leq \quad \int_0^\pi \left|\frac{iR^2e^{2i\theta}e^{iRe^{i\theta}}}{1 + R^2e^{2i\theta}}\right| d\theta \\
&= \quad \int_0^\pi \frac{R^2}{|1 + R^2e^{2i\theta}|} \left|e^{iRe^{i\theta}}\right| d\theta
\end{aligned}$$

Pero por parte **(c)** se tiene que $\forall R > 1$ y $\forall t \in \mathbb{R}$:

$$\frac{1}{|R^2 e^{it} + 1|} \leq \frac{1}{R^2 - 1} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{|R^2 e^{2i\theta} + 1|} \leq \frac{1}{R^2 - 1}$$

Luego:

$$0 \leq \left| \int_{\Gamma_2} f(z)\, dz \right| \leq \int_0^{\pi} \frac{R^2}{R^2 - 1} \left| e^{iR(\cos(\theta) + i\sin(\theta))} \right| d\theta = \frac{R^2}{R^2 - 1} \int_0^{\pi} e^{-R\sin(\theta)}\, d\theta$$

Pero, si usamos el cambio de variables $\phi = \pi - \theta$:

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi} e^{-R\sin(\theta)}\, d\theta &= \int_0^{\pi/2} e^{-R\sin(\theta)}\, d\theta + \int_{\pi/2}^{\pi} e^{-R\sin(\theta)}\, d\theta \\
&= \int_0^{\pi/2} e^{-R\sin(\theta)}\, d\theta - \int_{\pi/2}^{0} e^{-R\sin(\phi)}\, d\phi \\
&= 2\int_0^{\pi/2} e^{-R\sin(\theta)}\, d\theta
\end{aligned}$$

Y además, por el Hint sabemos que $\forall \alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ (en particular para $\alpha = \theta$):

$$\sin(\theta) \geq \frac{2}{\pi}\theta \quad \Rightarrow \quad -R\sin(\theta) \leq -\frac{2R}{\pi}\theta \quad \Rightarrow \quad e^{-R\sin(\theta)} \leq e^{-2R\theta/\pi}$$

Con lo cual se concluye que:

$$\begin{aligned}
0 \leq \left| \int_{\Gamma_2} f(z)\, dz \right| \leq \frac{2R^2}{R^2 - 1} \int_0^{\pi/2} e^{-R\sin(\theta)}\, d\theta &\leq \frac{2R^2}{R^2 - 1} \int_0^{\pi/2} e^{-2R\theta/\pi}\, d\theta \\
&\leq \frac{2R^2}{R^2 - 1} \left. \frac{e^{-2R\theta/\pi}}{-2R/\pi} \right|_{\theta=0}^{\theta=\pi/2} \\
&= \frac{2R^2}{R^2 - 1} \frac{-\pi}{2R} \left(e^{-R} - 1\right) \\
&= \frac{\pi R}{R^2 - 1} (e^{-R} - 1) \underset{R \longrightarrow \infty}{\longrightarrow} 0
\end{aligned}$$

Es decir, cuando $R \longrightarrow \infty$ se tiene que $\displaystyle\int_{\Gamma_2} f(z)\, dz \longrightarrow 0$. Recapitulando, tenemos:

$$\frac{i\pi}{e} = \int_{\Gamma_1} f(z)\, dz + \int_{\Gamma_2} f(z)\, dz$$

Por el desarrollo anterior sabemos que si tomamos $\lim\limits_{R \to \infty}$ a ambos lados obtenemos:

$$\frac{i\pi}{e} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\cos(x)}{1 + x^2}\, dx + i\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin(x)}{1 + x^2}\, dx + 0$$

De la igualdad de números complejos se concluye que:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x\cos(x)}{1 + x^2} = 0 \qquad \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin(x)}{1 + x^2} = \frac{\pi}{e} \ \blacksquare$$