Control 2 - MA2002 Cálculo Avanzado y Aplicaciones

Escuela de Ingeniería, FCFM, U. de Chile. Semestre 2014-2

P1) (a) (i) Sean $w \in \mathbb{C}$ and $r \in [0, \infty)$ tales que $|w| < 1$, $r < 1$ y $\bar{w}r \neq 1$. Demuestre

$$(w - r)(\bar{w} - r) < (1 - \bar{w}r)(1 - wr)$$

y concluye

$$\left| \frac{w - r}{1 - \bar{w}r} \right| < 1.$$

(ii) Sean $w, z \in \mathbb{C}$ tales que $|z| < 1$, $|w| < 1$ y $\bar{w}z \neq 1$. Usando la parte interior demuestre

$$\left| \frac{w - z}{1 - \bar{w}z} \right| < 1.$$

(iii) Suponiendo $\bar{w}z \neq 1$ demuestre

$$\left| \frac{w - z}{1 - \bar{w}z} \right| = 1,$$

si $|w| = 1$ o bien $|z| = 1$.

(2 pts.)

(b) Usando

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n} = 1,$$

determina el radio de convergencia de la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n,$$

donde

$$a_n = \frac{(n!)^3}{(3n)!}.$$

(2 pts.)

(c) Encuentre la serie de Laurent de la función

$$f(z) = \frac{\sin z}{(z - \pi)^k},$$

donde $k \in \mathbb{N}$.

(2 pts.)

P2) (a) Considere la función

$$f(z) = \frac{\sin z}{z^3(z^2 + 2z + 2)}.$$

Encuentre los polos y residuos de la función f.

(2 pts.)

(b) Calcule la integral donde f es la función definida en (b).

$$\int_\gamma f(z)dz$$

donde γ es la cicunferencia $|z - i| = 2$

(c) Considere la curva γ, dada por el arco de circunferencia unitaria de 1 a i recorrida en sentido antihorario. Calcule la integral

$$\int_\gamma \left(|z|^2 + \overline{z}\right) dz$$

(2 pts.)

P3) (a) Demuestre que la función

$$f(z) = \begin{cases} \frac{1}{2i}\frac{e^{iz}-1}{z}, & z \neq 0, \\ \frac{1}{2}, & z = 0, \end{cases}$$

es holomorpha en todo el plano complejo.

(2 pts.)

(b) Sea γ_R una curva en plano superior que consiste del segmento $[-R, R]$ y la semicircunferencia de radio R y centro en el origen, orientada positivamente. Usando la parte anterior demuestre que para todo $R > 0$, se tiene que

$$\frac{1}{2i}\int_{\gamma_R} \frac{e^{iz}-1}{z}\, dz = 0.$$

(2 pts.)

(c) Tomando el limite $R \to \infty$ concluye

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx = \pi.$$

(2 pts.)

Control 2 - MA2002 Cálculo Avanzado y Aplicaciones
Escuela de Ingeniería, FCFM, U. de Chile. Semestre 2014-2

P1) (a) (i) Sean $w \in \mathbb{C}$ and $r \in [0, \infty)$ tales que $|w| < 1$, $r < 1$ y $\bar{w}r \neq 1$. Demuestre

$$(w - r)(\bar{w} - r) < (1 - \bar{w}r)(1 - wr)$$

y concluye

$$\left| \frac{w - r}{1 - \bar{w}r} \right| < 1.$$

(ii) Sean $w, z \in \mathbb{C}$ tales que $|z| < 1$, $|w| < 1$ y $\bar{w}z \neq 1$. Usando la parte interior demuestre

$$\left| \frac{w - z}{1 - \bar{w}z} \right| < 1.$$

(iii) Suponiendo $\bar{w}z \neq 1$ demuestre

$$\left| \frac{w - z}{1 - \bar{w}z} \right| = 1,$$

si $|w| = 1$ o bien $|z| = 1$.

(2 pts.)

(b) Usando

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n} = 1,$$

determina el radio de convergencia de la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n,$$

donde

$$a_n = \frac{(n!)^3}{(3n)!}.$$

(2 pts.)

(c) Encuentre la serie de Laurent de la función

$$f(z) = \frac{\operatorname{sen} z}{(z - \pi)^k},$$

donde $k \in \mathbb{N}$.

(2 pts.)

Solución:

a) (i) Veamos los términos que aparecen en la desigualdad, luego se tiene que

$$(w - r)(\overline{w} - r) = w\overline{w} - r(w + \overline{w}) + r^2 = |w|^2 - r(w + \overline{w}) + r^2,$$

además

$$(1 - \overline{w}r)(1 - wr) = 1 - r(w + \overline{w}) + r^2|w|^2,$$

así restándolas se tiene

$$\begin{aligned}(1 - \overline{w}r)(1 - wr) - (w - r)(\bar{w} - r) &= \\ &= 1 - r(w + \overline{w}) + r^2|w|^2 - |w|^2 + r(w + \overline{w}) - r^2 \\ &= 1 + r^2|w|^2 - |w|^2 + -r^2 \\ &= (1 - r^2)(1 - |w|^2) < 0, \quad (1)\end{aligned}$$

lo que prueba la desigualdad.

(0.5 pts.)

Además como $r \in \mathbb{R}$ se tiene que $\overline{r} = r$ y luego

$$(w - r)(\overline{w} - r) = (w - r)(\overline{w - r}) = |w - r|^2,$$

y de la misma forma

$$(1 - \overline{w}r)(1 - wr) = (\overline{1 - wr})(1 - wr) = |1 - \overline{w}r|^2,$$

es decir

$$\left|\frac{w - r}{1 - \bar{w}r}\right|^2 < 1 \Longrightarrow \left|\frac{w - r}{1 - \bar{w}r}\right| < 1,$$

lo que completa el problema.

(0.5 pts.)

(ii) En forma análoga al problema anterior, se tiene que

$$(w - z)\overline{(w - z)} = |w|^2 + |z|^2 - (w\overline{z} + \overline{w}z),$$

y además

$$(1 - \overline{w}z)(1 - w\overline{z}) = 1 + |wz|^2 - (w\overline{z} + \overline{w}z),$$

por lo tanto se tiene que restándolos

$$\begin{aligned} |w - z|^2 - |1 - \overline{w}z|^2 &= \\ (1 - \overline{w}z)(1 - w\overline{z}) - (w - z)\overline{(w - z)} &= \\ = 1 + |wz|^2 - (w\overline{z} + \overline{w}z) - |w|^2 - |z|^2 + (w\overline{z} + \overline{w}z) & \\ = 1 + |wz|^2 - |w|^2 - |z|^2 & \\ = (1 - |z|^2)(1 - |w|^2) < 0, & \quad (2) \end{aligned}$$

es decir

$$\left|\frac{w - z}{1 - \bar{w}z}\right|^2 < 1 \Longrightarrow \left|\frac{w - z}{1 - \bar{w}z}\right| < 1,$$

lo que completa el problema.

(0.5 pts.)

(iii) De lo anterior notemos que

$$|w - z|^2 - |1 - \overline{w}z|^2 = (1 - |z|^2)(1 - |w|^2),$$

de donde se tiene que si $|z| = 1$ o bien $|w| = 1$, se tiene que

$$|w - z|^2 - |1 - \overline{w}z|^2 = 0,$$

o equivalentemente

$$\left|\frac{w - z}{1 - \bar{w}z}\right|^2 = 1 \Longrightarrow \left|\frac{w - z}{1 - \bar{w}z}\right| = 1.$$

(0.5 pts.)

b) Veamos el radio de convergencia, para ello podemos utilizar el criterio de la razón o el de la raíz. En particular si consideramos el criterior de la razón, se tiene que

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \lim_{n\to\infty} \left|\frac{((n+1)!)^3}{(3n+3)!} \cdot \frac{(3n)!}{(n!)^3}\right| \\ &= \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(n+1)^3}{(3n+3)(3n+2)(3n+1)}\right| = \frac{1}{27} \end{aligned}$$

Por lo tanto concluimos que la serie es convergente para $z \in \mathbb{C}$ tal que $|z| < 27$.

(2.0 pts.)

c) Veamos el desarrollo en serie de Taylor de la función seno en un entorno de $z = \pi$. En efecto, se tiene que si $g(z) = \operatorname{sen} z$, entonces si $n \geq 0$ tenemos que

$$\begin{aligned}
&g^{(4n)}(z) = \operatorname{sen} z \Rightarrow f^{(4n)}(\pi) = \operatorname{sen} \pi = 0,\\
&g^{(4n+1)}(z) = \cos z \Rightarrow f^{(4n)}(\pi) = \cos \pi = -1,\\
&g^{(4n+2)}(z) = -\operatorname{sen} z \Rightarrow f^{(4n+2)}(\pi) = -\operatorname{sen} \pi = 0,\\
&g^{(4n+3)}(z) = -\cos z \Rightarrow f^{(4n)}(\pi) = -\cos \pi = 1.
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$g(z) = \operatorname{sen} z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)!} (z - \pi)^{2n+1},$$

(1.0 pts.)

luego

$$f(z) = \frac{\operatorname{sen} z}{(z - \pi)^k} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)!} (z - \pi)^{2n+1-k}.$$

(1.0 pts.)

P2) (a) Considere la función
$$f(z) = \frac{\operatorname{sen} z}{z^3(z^2+2z+2)}.$$
Encuentre los polos y residuos de la función f.

(2 pts.)

(b) Calcule la integral donde f es la función definida en (b).
$$\int_\gamma f(z)dz$$
donde γ es la cicunferencia $|z-i| = 2$

(c) Considere la curva γ, dada por el arco de circunferencia unitaria de 1 a i recorrida en sentido antihorario. Calcule la integral
$$\int_\gamma \left(|z|^2 + \overline{z}\right) dz$$

(2 pts.)

Solución

(a) Veamos los polos de la función f. Los polos son $z = 0$ y las raíces del polinomio $z^2 + 2z + 2$, es decir,
$$z^2 + 2z + 2 = 0 \Leftrightarrow z = \frac{-2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = -1 \pm i.$$

(0.5 pts.)

Podemos ver que $z = 0$ es un polo de orden 2, en efecto
$$\lim_{z\to 0} z^2 f(z) = \lim_{z\to 0} \frac{\operatorname{sen} z}{z(z^2+2z+2)} = \frac{1}{2}.$$
Luego su residuo es
$$\begin{aligned}\operatorname{Res}(f,0) \lim_{z\to 0} \frac{d}{dz}\left(z^2 f(z)\right) &= \lim_{z\to 0} \frac{d}{dz}\left(\frac{\operatorname{sen} z}{z(z^2+2z+2)}\right) = \\ \lim_{z\to 0}&\left(\frac{\cos z \cdot z(z^2+2z+2) - \operatorname{sen} z \cdot (3z^2+4z+2)}{z^2(z^2+2z+2)^2}\right) = \\ \lim_{z\to 0}&\left(\frac{\cos z \cdot (z^3+2z^2+2z) - \operatorname{sen} z \cdot (3z^2+4z+2)}{(z^3+2z^2+2z)^2}\right) = -\frac{1}{2}.\end{aligned} \tag{3}$$

(0.5 pts.)

Además se tiene que los otros dos polos son simples, luego se tiene que
$$\begin{aligned}\operatorname{Res}(f,-1+i) &\lim_{z\to(-1+i)} (z+1-i)\, f(z) \\ &= \lim_{z\to(-1+i)} \left(\frac{\operatorname{sen} z}{z(z+1+i)}\right) = \left(\frac{\operatorname{sen}(-1+i)}{(-1+i)2i}\right)\end{aligned} \tag{4}$$

(0.5 pts.)

y ademś
$$\begin{aligned}\operatorname{Res}(f,-1-i) &\lim_{z\to(-1-i)} (z+1+i)\, f(z) \\ &= \lim_{z\to(-1-i)} \left(\frac{\operatorname{sen} z}{z(z+1-i)}\right) = \left(\frac{\operatorname{sen}(-1-i)}{(-1-i)(-2i)}\right) = \left(\frac{\operatorname{sen}(-1-i)}{2i(1+i)}\right)\end{aligned} \tag{5}$$

(0.5 pts.)

(b) Notemos que $z = 0$ está al interior de la curva, además

$$|-1+i-i| = 1 \leq 2 \quad \text{y} \quad |-1-i-i| = |-1-2i| = \sqrt{5} \geq 2,$$

por tanto sólo el polo $z = -1+i$ esta al interior, por lo tanto

(0.5 pts.)

$$\begin{aligned}\int_\gamma f(z)dz &= 2\pi i \left(\text{Res}(f,0) + Res(f,-1+i)\right) \\ &= 2\pi i \left(-\frac{1}{2} + \frac{\text{sen}(-1+i)}{(-1+i)2i}\right) = \pi i \left(-1 + \frac{\text{sen}(-1+i)}{(-1+i)i}\right)\end{aligned}$$

(1.5 pts.)

(c) La curva γ la podemos parametrizar como $z = e^{i\theta}$, desde $\theta = 0$ a $\theta = \frac{\pi}{2}$.

(0.5 pts.)

Luego

$$\begin{aligned}\int_\gamma \left(|z|^2 + \overline{z}\right) dz &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(|e^{i\theta}|^2 + \overline{e^{i\theta}}\right) ie^{i\theta} d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 + e^{-i\theta}\right) ie^{i\theta} d\theta \\ &= i \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(e^{i\theta} + 1\right) d\theta = i \left(\frac{e^{i\theta}}{i} + \theta\right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = e^{i\frac{\pi}{2}} - 1 + i\frac{\pi}{2} = i - 1 + i\frac{\pi}{2}. \qquad (6)\end{aligned}$$

(1.5 pts.)

P3) (a) Demuestre que la función

$$f(z) = \begin{cases} \frac{1}{2i}\frac{e^{iz}-1}{z}, & z \neq 0, \\ \frac{1}{2}, & z = 0, \end{cases}$$

es holomorpha en todo el plano complejo.

(2 pts.)

(b) Sea γ_R una curva en plano superior que consiste del segmento $[-R, R]$ y la semicircunferencia de radio R y centro en el origen, orientada positivamente. Usando la parte anterior demuestre que para todo $R > 0$, se tiene que

$$\frac{1}{2i}\int_{\gamma_R} \frac{e^{iz}-1}{z}\, dz = 0.$$

(2 pts.)

(c) Tomando el limite $R \to \infty$ concluye

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx = \pi.$$

(2 pts.)

Solución:

(a) Primero notemos que si $z \neq 0$, la función es homomorfa por ser cuociente de funciones homomorfas.

(1.0 pts.)

Si $z = 0$, debemos probar si es derivable por definición, es decir, debemos si el límite

$$\lim_{z\to 0} \frac{f(z) - f(0)}{z}$$

existe. En efecto, usando L'Hopital se tiene que

$$\begin{aligned}\lim_{z\to 0} \frac{f(z) - f(0)}{z} &= \lim_{z\to 0} \frac{1}{z}\left(\frac{1}{2i}\frac{e^{iz}-1}{z} - \frac{1}{2}\right) = \lim_{z\to 0}\left(\frac{e^{iz}-1-iz}{2iz^2}\right) \\ &= \lim_{z\to 0}\left(\frac{ie^{iz}-i}{4iz}\right) = \lim_{z\to 0}\left(\frac{-e^{iz}}{4i}\right) = \frac{-1}{4i} = \frac{i}{4},\end{aligned}$$

lo que muestra que el límite existe y la fucnión es derivable en todo $\mathbb{C}$.

(1.0 pts.)

(b) Dado que la fucnión no tiene polos al interior de la curva y ella es una función holomorfa en todo $\mathbb{C}$, se tiene que

$$\frac{1}{2i}\int_{\gamma_R} \frac{e^{iz}-1}{z}\, dz = 0.$$

(2.0 pts.)

(c) Notemos que la curva γ_R tiene dos partes, una es la recta entre $-R$ y R y la otra es el arco de la semicircunferencia de radio R, que denotaremos por C_R, es decir,

$$0 = \int_{\gamma_R} \frac{e^{iz}-1}{z}\, dz = \int_{-R}^{R} \frac{e^{ix}-1}{x}\, dx + \int_{C_R} \frac{e^{iz}-1}{z}\, dz$$

o equivalentemente

$$\int_{-R}^{R} \frac{e^{ix}-1}{x}\,dx = \int_{-R}^{R} \frac{(\cos x - 1) + i \operatorname{sen} x}{x}\,dx = \int_{C_R} \frac{1-e^{iz}}{z}\,dz$$

(0.5 pts.)

Estudiemos la integral

$$\int_{C_R} \frac{1-e^{iz}}{z}\,dz.$$

En efecto, si consideramos la parametrización $z = Re^{i\theta}$, desde $\theta = 0$ a $\theta = \pi$. Entonces

$$\int_{C_R} \frac{1-e^{iz}}{z}\,dz = \int_0^{\pi} \frac{1-e^{iRe^{i\theta}}}{Re^{i\theta}}\, iRe^{i\theta} d\theta = i\int_0^{\pi} \left(1 - e^{iRe^{i\theta}}\right) d\theta = i\pi - i\int_0^{\pi} e^{iRe^{i\theta}} d\theta.$$

(0.5 pts.)

Estudiemos la última integral que aparece, en efecto veamos que si $R \to \infty$ entonces ella tiende a cero, es decir,

$$\int_0^{\pi} e^{iRe^{i\theta}} d\theta \quad = \quad \int_0^{\pi} e^{iR(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)} d\theta \quad = \quad \int_0^{\pi} e^{-R(\operatorname{sen}\theta + i\cos\theta)} d\theta \quad =$$

luego

$$\left|\int_0^{\pi} e^{iRe^{i\theta}} d\theta\right| \le \int_0^{\pi} \left|e^{-R(\operatorname{sen}\theta + i\cos\theta)}\right| d\theta = \int_0^{\pi} \left|e^{-R\operatorname{sen}\theta} e^{iR\cos\theta}\right| d\theta$$
$$= \int_0^{\pi} e^{-R\operatorname{sen}\theta} d\theta = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R\operatorname{sen}\theta} d\theta$$

Pero como para todo $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $\operatorname{sen}\alpha \ge \frac{2\alpha}{\pi}$, entonces tomando límite $R \to +\infty$ se tiene que

$$0 \le \left|\int_0^{\pi} e^{iRe^{i\theta}} d\theta\right| \le 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R\operatorname{sen}\theta} d\theta \le 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R\frac{2\theta}{\pi}} d\theta$$
$$= 2\frac{e^{-R\frac{2\theta}{\pi}}}{\frac{-2R}{\pi}} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2\frac{e^{-R}}{\frac{-2R}{\pi}} - 2\frac{1}{\frac{-2R}{\pi}} \to 0,$$

Por lo tanto

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} \frac{1-e^{iz}}{z}\,dz = i\pi$$

(0.5 pts.)

y luego

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\cos x - 1) + i\operatorname{sen} x}{x}\,dx = i\pi$$

es decir

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\cos x - 1)}{x}\,dx = 0 \qquad \text{y} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx = \pi$$

(0.5 pts.)