MA2002 Cáculo Avanzado y Aplicaciones Semestre 2015/02. **Secciones 1, 4, 5 y 6**
Profesores: Raúl Gormaz, Rodrigo Lecaros, Héctor Ramírez, Mauricio Soto.

Control 2

P1. **(a)** (2 pts.) Sea f una función holomorfa en un dominio D conexo tal que $\bar{f}$ es también holomorfa en D. Muestre que f es constante en D.

(b) (2 pts.) Sea $u(x,y) = g(x+y)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, donde g es una función real suficientemente derivable. ¿Para cuáles g la función u corresponde a la parte real de una función homomorfa f? Identifique f para estos casos.

(c) (2 pts.) Calcule la integral $\int_\Gamma \bar{z}^2 z dz$, donde Γ corresponde a la curva cerrada definida como la frontera de $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1,\ \mathrm{Re}(z) \geq 0\}$ y orientada en sentido anti-horario.

P2. **(a)** (2 pts.) Muestre que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{z}{1+z} \right)^n$$

converge si y sólo si $\mathrm{Re}(z) > -1/2$. Calcule el valor de la serie para esa región.

Indicación: Recuerde que $\sum_{n=0}^{\infty} \rho^n = 1/(1-\rho)$ cuando $|\rho| < 1$ y que esta serie geométrica diverge $|\rho| \geq 1$.

(b) (4 pts.) Dada la función $f(z)$, holomorfa en $|z-a| < R$, considere $0 < r < R$,

i) Pruebe

$$\int_0^{2\pi} f(a + re^{i\theta}) e^{i\theta} d\theta = 0.$$

ii) Utilizando la formula integral para la derivada

$$f'(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(a,r)} \frac{f(z)}{(z-a)^2} dz,$$

concluya las siguientes identidades

$$f'(a) = \frac{1}{\pi r} \int_0^{2\pi} \mathrm{Re}\left(f(a+re^{i\theta})\right) e^{-i\theta} d\theta, \quad \text{y} \quad f'(a) = \frac{i}{\pi r} \int_0^{2\pi} \mathrm{Im}\left(f(a+re^{i\theta})\right) e^{-i\theta} d\theta.$$

Indicación: Muestre que si $g : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, entonces $\overline{\int_0^{2\pi} g(\theta) d\theta} = \int_0^{2\pi} \overline{g(\theta)} d\theta$.

P3. Calcule las siguientes integrales:

(a) (2 pts.) $\displaystyle\int_{\partial D(0,1)} \frac{\mathrm{sen}(\pi z^2) + \cos(\pi z^2)}{(z^{-1} - 2)(z-2)} dz$; **(b)** (4 pts.) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\cos(x)}{(1+x^2)^2} dx,$

Para calcular la integral impropia de la parte (b) debe integrar la función $f(z) = e^{iz}/(1+z^2)^2$ sobre la curva cerrada Γ_R dada por la frontera del semicírculo $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq R,\ \mathrm{Im}(z) \geq 0\}$ y orientada en sentido anti-horario. Luego hacer $R \to +\infty$.

Tiempo: 3 horas

P1. a) Sea $f = u + iv$ holomorfa t.q. $\bar{f} = u - iv$ también es holomorfa

Condiciones de Cauchy-Riemann:

f holomorfa $\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \wedge \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$

$\bar{f}$ holomorfa $\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial y} \wedge \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}$

Obteniendo $\frac{\partial u}{\partial x} = 0 = \frac{\partial u}{\partial y} \Rightarrow u \equiv cte.$

$\Rightarrow \frac{\partial v}{\partial x} = 0 = \frac{\partial v}{\partial y} \Rightarrow v \equiv cte$

$\Rightarrow f \equiv cte$ ■

P1.b) Sea $u(x,y) = g(x+y)$ con $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Si u corresponde a la parte real de una función holomorfa, digamos

$$f = u + iv,$$

entonces, por Cauchy-Riemann, tenemos:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{si } g \text{ es } C^2}}{=} \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial u}{\partial y}\right) = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

es decir, $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ (u es armónica) //

Luego $0 = \Delta u = 2g''(x+y) \Rightarrow g''(x+y) = 0$

Como $x, y \in \mathbb{R}$ son arbitrarios $\Rightarrow g'' \equiv 0$

$\Rightarrow g'(t) \equiv \text{cte } \forall t$

$\Rightarrow g(t) = \alpha t + \beta$ para ciertos reales α, β

$\Rightarrow u(x,y) = \alpha(x+y) + \beta \overset{C\text{-}R}{\Longrightarrow} v = \alpha(y-x) + \gamma$

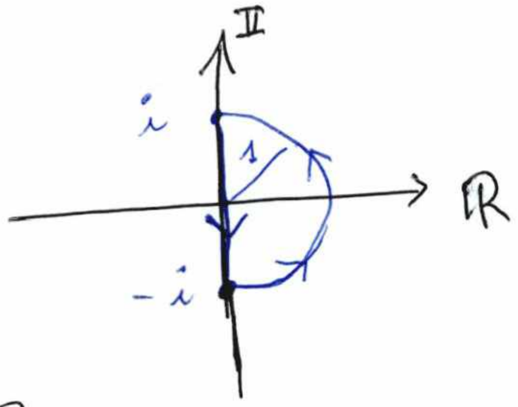
$\Rightarrow f = \alpha(x+y) + \beta + i\alpha(y-x) + \gamma i$

$\Rightarrow f(z) = \alpha(1-i)z + z_0$ donde $\alpha \in \mathbb{R}$, $z_0 \in \mathbb{C}$ ∎

P1.c)

Calculemos $\int_\Gamma \bar{z}^2 z \, dz$

con Γ



Parametrizemos Γ:

Claramente $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ donde

Γ_1 se parametriza por $\gamma_1(\theta) = e^{i\theta}$, $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

y Γ_2 se parametriza por $\gamma_2(t) = (1-t)i + t(-i)$
$= i(1-2t)$,
con $t \in [0,1]$

Así, $\gamma_1'(\theta) = i e^{i\theta}$, $\gamma_2'(t) = -2i$

$$\int_{\Gamma_1} \bar{z}^2 z \, dz = \int_{\Gamma_1} \bar{z} |z|^2 dz = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi/2} \cancel{e^{-i\theta}} \cdot 1^2 \cdot i \cancel{e^{i\theta}} \, d\theta$$
$$= \pi i \,//$$

$$\int_{\Gamma_2} \bar{z}^2 z \, dz = \int_0^1 \cancel{-1} \cdot (1-2t)^2 \cdot \cancel{i} (1-2t)(-2\cancel{i}) \, dt$$
$$= 2 \cdot \int_0^1 (2t-1)^3 dt = 2 \left[\frac{(2t-1)^4}{4 \cdot 2} \right]_0^1 = 0$$

$$\Rightarrow \int_\Gamma \bar{z}^2 z \, dz = \int_{\Gamma_1} + \int_{\Gamma_2} = \pi i + 0 = \pi i$$

P2.a) Para caracterizar la región de convergencia de $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{z}{1+z}\right)^n$

debemos (siguiendo la indicación) ver cuando $\left|\frac{z}{1+z}\right| < 1$.

(La región de convergencia de $\sum_{n=0}^{+\infty}$ %. es la misma que la de $\sum_{n=1}^{+\infty}$ %.)

Si $z = x+iy$ lo anterior equivale a

$$x^2+\cancel{y^2} < (x+1)^2+\cancel{y^2} \iff 0 < 2x+1$$

lo que a su vez equivale a $Re(z) > -\frac{1}{2}$ //

Para esta región obtenemos:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{z}{1+z}\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{z}{1+z}\right)^n - 1 = \frac{1}{1-\left(\frac{z}{1+z}\right)} - 1$$

$$= \frac{1+z}{1+\cancel{z}-\cancel{z}} - 1 = \cancel{1}+z-\cancel{1} = z \quad //$$

Es decir: $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{z}{1+z}\right)^n = z$ ■

<u>P2. b)</u> Sea $f \in H(D(a,R))$. $\left(1/3\right.$

Sea $r \in (0,R)$.

i) Por Cauchy-Goursat sabemos que

$$0 = \oint_{\partial D(0,r)} f(z)\,dz = \int_0^{2\pi} f(a+re^{i\theta})(rie^{i\theta})\,d\theta$$

$\gamma(\theta) = a + re^{i\theta}$ con $\theta \in [0,2\pi]$

$/ \div ri$

$$\Rightarrow \quad 0 = \int_0^{2\pi} f(a+re^{i\theta})e^{i\theta}\,d\theta \quad //$$

ii) Partamos mostrando la indicación:

Sea $g(\theta) = g_1(\theta) + i g_2(\theta)$ con $g_j : [0,2\pi] \to \mathbb{R}$, $j = 1,2$

Así

$$\overline{\int_0^{2\pi} g(\theta)\,d\theta} = \overline{\int_0^{2\pi} g_1(\theta)\,d\theta + i\int_0^{2\pi} g_2(\theta)\,d\theta}$$

linealidad de la integral

$$= \int_0^{2\pi} g_1(\theta)\,d\theta - i\int_0^{2\pi} g_2(\theta)\,d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} (g_1(\theta) - i\, g_2(\theta))\,d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \overline{g(\theta)}\,d\theta \quad //$$

...

Como $\mathrm{Re}(w) = \dfrac{w + \overline{w}}{2}$ $\forall w \in \mathbb{C}$ obtenemos:

$$f(z) = 2\left(\mathrm{Re}(f(z)) - \overline{f(z)}\right)$$

Así, de la fórmula integral de Cauchy para la derivada deducimos que:

$$f'(a) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \left[2 \left(\int_{\partial D(a,r)} \frac{\mathrm{Re}(f(z))}{(z-a)^2}\, dz - \int_{\partial D(a,r)} \frac{\overline{f(z)}\, dz}{(z-a)^2} \right) \right]$$

$$= \frac{1}{\pi i} \cdot \left[I_1 - I_2 \right]$$

con $I_1 = \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{Re}(f(a+re^{i\theta}))}{(re^{i\theta})^{\cancel{2}}} \cancel{r} i \cancel{e^{i\theta}}\, d\theta$

$$= \frac{i}{r} \int_0^{2\pi} \mathrm{Re}(f(a+re^{i\theta})\, e^{-i\theta}\, d\theta$$

e $I_2 = \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\overline{f(a+re^{i\theta})}}{(re^{i\theta})^{\cancel{2}}} \cancel{r} i \cancel{e^{i\theta}}\, d\theta$

$$= \frac{i}{r} \int_0^{2\pi} \overline{f(a+re^{i\theta})}\, e^{-i\theta}\, d\theta = \ldots$$

$\boxed{\text{P2. b) ii)}}$ $\ldots = \dfrac{i}{r}\displaystyle\int_0^{2\pi} \overline{f(a+re^{i\theta})e^{i\theta}}\, d\theta$

indicación con $g(\theta)=f(a+re^{i\theta})e^{i\theta}$ $= \dfrac{i}{r}\,\overline{\displaystyle\int_0^{2\pi} f(a+re^{i\theta})\,e^{i\theta}\,d\theta}$

parte a) $= \dfrac{i}{r}\cdot\overline{\emptyset} = \emptyset$ //

Así $f'(a) = \dfrac{1}{\pi \cancel{i}}\left[\dfrac{\cancel{i}}{r}\displaystyle\int_0^{2\pi} Re(f(a+re^{i\theta}))\,e^{-i\theta}\,d\theta\right]$

$= \dfrac{1}{\pi r}\displaystyle\int_0^{2\pi} Re(f(a+re^{i\theta}))\,e^{-i\theta}\,d\theta$ //

Analogamente, $Im(w) = \dfrac{w-\overline{w}}{2i}$ $\forall w \in \mathbb{C}$.

Luego $w = 2i(Im(w)+\overline{w})$

De manera similar se llega a:

$$f'(a) = \frac{i}{\pi r}\left[\int_0^{2\pi} Im(f(a+re^{i\theta}))\,e^{-i\theta}\,d\theta + \overline{\int_0^{2\pi} f(a+re^{i\theta})\,e^{-i\theta}\,d\theta}\right]$$

$\to \emptyset$ por parte a)

Concluyendo lo pedido ∎

P3. a) Llamemos $g(\cdot)$ al integrando. 1/3

Notemos que:
$$g(z) = \frac{-z}{2} \cdot \frac{\operatorname{sen}(\pi z^2) + \cos(\pi z^2)}{(z - 1/2)(z-2)}$$

de donde notamos que $z = 1/2$ y $z = 2$ son puntos singulares no evitables

(pues $L_0(1/2) := \lim_{z \to 1/2} g(z) = \alpha/0$, con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$
$L_0(2) := \lim_{z \to 2} g(z) = \beta/0$).

El punto $z=0$ es una singularidad evitable ya que $L_0(0) = 0$, por lo que no intervendrá más en el análisis.

Por comodidad, llamemos
$$f(z) = -\frac{z}{2} \frac{\operatorname{sen}(\pi z^2) + \cos(\pi z^2)}{z-2}$$

Así, $g(z) = \dfrac{f(z)}{z - 1/2}$

...

//

La curva $\partial D(0,1)$ sólo encierra a $z = 1/2$, por lo que sólo esta singularidad será relevante para el cálculo de la integral. Procederemos de dos maneras distintas:

1) Vía Fmla de Cauchy:

Primero, por corolario de Cauchy-Goursat tenemos:

$$\oint_{\partial D(0,1)} g(z)\,dz = \oint_{\partial D(1/2,1/3)} g(z)\,dz = \oint_{\partial D(\frac{1}{2},\frac{1}{3})} \frac{f(z)}{z-1/2}\,dz$$

← puede ser cualquier radio $< \frac{1}{2}$

Por Fmla. de Cauchy

$$= 2\pi i\, f(1/2) = 2\pi i \frac{\sqrt{2}}{6} = \frac{\sqrt{2}}{3}\pi i \;//$$

pues

$$f(1/2) = \frac{-(1/2)}{2} \cdot \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\frac{1}{2} - 2}$$

$$= +\frac{1}{6} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{6} \;//$$

$\oplus$

P3.a) | 2) Vía Teorema de los residuos:

$$\oint_{\partial D(0,1)} g(z)\,dz = 2\pi i \ \operatorname{Res}(g, \tfrac{1}{2})$$

pero

$$\operatorname{Res}(g, \tfrac{1}{2}) = \lim_{z \to 1/2} \overbrace{(z-\tfrac{1}{2})\,g(z)}^{f(z)} = f(\tfrac{1}{2}) \overset{(4)}{=} \frac{\sqrt{2}}{6}$$

pues $z = 1/2$ es un polo simple de g (esto se deduce del hecho que $f(1/2) \neq 0$)

Concluyendo también que

$$\oint_{\partial D(0,1)} g(z)\,dz = \frac{\sqrt{2}}{3}\pi i \qquad \blacksquare$$

P3. b) Primero notemos que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos(x)}{(1+x^2)^2}\,dx = \frac{1}{2}\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{(1+x^2)^2}\,dx}_{I}$$

pues $\frac{\cos(x)}{(1+x^2)^2}$ es una función par.

Calculemos ahora I siguiendo las indicaciones:

$$\int_{\Gamma_R} f(z)\,dz = \int_{C_R} f(z)\,dz + \int_{[-R,R]} f(z)\,dz$$

donde $C_R = \{ |z| = R \text{ t.q. } Im(z) \geq 0 \}$

Notando que

$$\int_{[-R,R]} f(z)\,dz = \int_{-R}^{R} \frac{\cos(x)}{(1+x^2)^2}\,dx + i\int_{-R}^{R} \frac{\operatorname{sen}(x)}{(1+x^2)^2}\,dx$$

deducimos que

$$\int_{[-R,R]} f(z)\,dz \xrightarrow[R\to+\infty]{} I \quad \left(\text{pues } \int_{-R}^{R} \frac{\operatorname{sen}(x)}{(1+x^2)^2}\,dx \to 0 \text{ por imparidad del } \operatorname{sen}(\cdot) \right)$$

P3.b)

Demostremos ahora que $\int_{C_R} f \to 0$ si $R \to +\infty$

$$\int_{C_R} f(z)\,dz = \int_0^{\pi} \frac{e^{iRe^{i\theta}} R i e^{i\theta}}{(1+R^2e^{i2\theta})^2}\,d\theta$$

$$\Rightarrow \left|\int_{C_R} f(z)\,dz\right| \leq \int_0^{\pi} \left| \text{———} \right| d\theta$$

$$= \int_0^{\pi} \frac{R\,|e^{iRe^{i\theta}}|}{|1+R^2e^{i2\theta}|^2}\,d\theta$$

pero $$|e^{iRe^{i\theta}}| = \underbrace{|e^{iR\cos\theta}|}_{=1} \cdot e^{-R\operatorname{sen}\theta}$$

$\frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} \geq \frac{2}{\pi}$ en $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$

$$\leq e^{-R\left(\frac{2}{\pi}\theta\right)}, \quad \forall \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

y $$|1+R^2e^{i2\theta}|^2 = (1+R^2\cos(2\theta))^2 + (R^2\operatorname{sen}(2\theta))^2$$
$$= 1 + 2R^2\cos(2\theta) + R^4$$
$$\geq 1 - 2R^2 + R^4 = (1-R^2)^2$$

Obtenemos:

$$\left| \int_{C_R} f(z)\,dz \right| \leq \int_0^{\pi} \frac{R e^{-R \operatorname{sen}\theta}}{(1-R^2)^2}\,d\theta$$

$$= \frac{R}{(1-R^2)^2} \int_0^{\pi} e^{-R\operatorname{sen}\theta}\,d\theta$$

$\theta = \frac{\pi}{2}$ es eje de simetría para sen θ

$$= \frac{2R}{(1-R^2)^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R\operatorname{sen}\theta}\,d\theta$$

$$\leq \frac{2R}{(1-R^2)^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{2R}{\pi}\theta}\,d\theta$$

$$= \frac{2\cancel{R}}{(1-R^2)^2} \left(-\frac{\pi}{2\cancel{R}}\right) \cdot \underbrace{e^{-\frac{2R}{\pi}\theta} \Big|_0^{\pi/2}}_{=(e^{-R}-1)}$$

$$= \frac{\pi}{(1-R^2)^2}\left(1-e^{-R}\right) \xrightarrow[R \to +\infty]{} 0$$

//

P3.b) Finalmente, calculemos

$\oint_{\Gamma_R} f(z)\,dz$ de dos maneras distintas:

1) <u>Vía Fórmula de Cauchy para derivada:</u>

$$\oint_{\Gamma_R} f \underset{\text{Cauchy-Goursat}}{=} \oint_{\partial D(i,r)} \frac{e^{iz}}{(z+i)^2(z-i)^2}\,dz = 2\pi i\, g'(i)$$

con $r>0$ suficientemente pequeño (ejemplo: $r=1/2$ si $R>\frac{3}{2}$) y $g(z)=\dfrac{e^{iz}}{(z+i)^2}$

Así, $$g'(z) = \frac{i e^{iz}(z+i)^{\cancel{2}} - e^{iz}\,2\cancel{(z+i)}}{(z+i)^{\cancel{4}\,3}}$$

$$= \frac{e^{iz}}{(z+i)^3}\left(i(z+i)-2\right)$$

$$\Rightarrow g'(i) = \frac{e^{-1}}{8i^3}\cdot(-4) = \frac{e^{-1}}{2i} \quad +$$

$$\Rightarrow \oint_{\Gamma_R} f = \cancel{2}\pi \cancel{i}\,\frac{e^{-1}}{\cancel{2i}} = \pi/e \quad //$$

P3.b)] ... 2) <u>Vía teo de los residuos</u>:

$$\oint_{\Gamma_R} f = 2\pi i \operatorname{Res}(f, i)$$

pues $p=i$ es el único polo de f encerrado por Γ_R. Este polo es <u>doble</u> ya que

$$L_2(i) = \lim_{z\to i} (z-i)^2 f(z) = \frac{e^{-1}}{(2i)^2} = -\frac{e^{-1}}{4} = -\frac{1}{4e} \neq 0$$

Así,

$$\operatorname{Res}(f,i) = \lim_{z\to i} \frac{d}{dz}\Big(\overbrace{(z-i)^2 f(z)}^{g(z)}\Big)$$

$$\overset{g'(\cdot)\text{ es continua}}{=} g'(i) \underset{(+)}{=} \frac{e^{-1}}{2i} \quad //$$

$$\Rightarrow \oint_{\Gamma_R} f = \cancel{2}\pi \cancel{i} \frac{e^{-1}}{\cancel{2i}} = \frac{\pi}{e} \quad //$$

P3.b) ...

De los pasos anteriores concluimos:

$$\underset{\substack{\downarrow \\ I}}{\int_{-R}^{R} f(z)\,dz} = \underset{\substack{\downarrow \\ \pi/e}}{\int_{\Gamma_R} f} - \int_{C_R} f \qquad \text{si } R \to +\infty$$

$$\Rightarrow \quad I = \pi/e$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\int_0^{+\infty} \frac{\cos(x)}{(1+x^2)^2}\,dx = \frac{\pi}{2e}}$$

$\blacksquare$

MA2002 Cáculo Avanzado y Aplicaciones Semestre 2015/02. **Secciones 1, 4, 5 y 6**
Profesores: Raúl Gormaz, Rodrigo Lecaros, Héctor Ramírez, Mauricio Soto.

Asignación de Puntaje para Control 2

P1. (a) (2 pts.)

Escribir condiciones de Cauchy-Riemann para f y su conjugada $\bar{f}$: 1 pto.

Sumar las condiciones y obtener que u es constante: 0.5 pts. (acá $f = u + iv$)

Usar nuevamente Cauchy-Riemann para deducir que v es constante y concluir que f también lo es: 0.5 pts.

(b) (2 pts.)

Sean $f = u + iv$ y $u(x, y) = g(x + y)$, donde g es una función real suficientemente derivable.

Usando Cauchy-Riemann demostrar que u es armonica: 0.5 pts.

Deducir que g es una función lineal afín: 0.5 pts.

Deducir que $u = \alpha(x + y) + \beta$ y, vía C-R, que $v = \alpha(y - x) + \gamma$, donde α, β, $\gamma \in \mathbb{R}$: 0.5 pts.

Concluir el ejercicio, identificando f: 0.5 pts.

(c) (2 pts.)

Parametrizar ambas Γ apropiadamente: 0.5 pts

Establecer bien la definición de integral y notar que la integral sobre Γ se calcula sumando dos integrales sobre Γ_1 y Γ_2: 0.5 pts.

Cálculo de las integrales sobre Γ_1 y Γ_2, y conclusión: 1 pto.

P2. (a) (2 pts.)

Utilizando la indicación llegar a que la región de convergencia es $\mathrm{Re}(z) > -1/2$: 1 pto.

Utilizando la indicación concluir que $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{z}{1+z}\right)^n = n$: 1 pto.

(b) (4 pts.)

Parte i):

Utilizar Cauchy Goursat para justificar que $\int\limits_{\partial D(a,r)} f(z)dz = 0$: 0.5 pts.

Parametrizar correctamente $\partial D(a, r)$ y concluir lo requerido: 0.5 pts.

Parte ii):

Probar la indicación: 0.5 pts.

Utilizar que $w = 2(\mathrm{Re}(w) - w)$, para todo $w \in \mathbb{C}$, en la fórmula de Cauchy para la derivada, e identificar las dos integrales a resolver en la primera identidad: 0.5 pts.

Reescribir correctamente la primera integral y deducir, a partir de la indicación y de la parte i), que la segunda integral es nula: 0.75 pts

Utilizar que $w = 2i(\mathrm{Im}(w) + w)$, para todo $w \in \mathbb{C}$, en la fórmula de Cauchy para la derivada, e identificar las dos integrales a resolver en la segunda identidad: 0.5 pts.

Reescribir correctamente la primera integral y deducir, a partir de la indicación y de la parte i), que la segunda integral es nula: 0.75 pts

P3. **(a)** (2 pts.)

Identificar que $z = 1/2$ es la única singularidad no evitable que encierra la curva. Esto se hace vía definición mostrando que el límite $L_0(1/2)$ no existe: 0.5 pts.

Justificar que $z = 0$ es una singularidad evitable. Esto se hace mostrando que el límite $L_0(1/2)$ existe: 0.5 pts.

Primera manera de proceder, vía Fmla de Cauchy:

Aplicar corolario de Cauchy Goursat y reescribir la integral en la forma que requiere la fórmula de Cauchy: 0.5 pts.

Hacer el cálculo y concluir el resultado correcto: 0.5 pts.

Segunda manera de proceder, vía teorema de residuos:

Escribir el teorema de los residuos y justificar que $z = 1/2$ es un polo simple (vía el cálculo del límite $L_1(1/2)$): 0.5 pts.

Hacer el cálculo del residuo (notando que coincide con $L_1(1/2)$) y concluir el resultado correcto: 0.5 pts.

(b) (4 pts.)

Notar que el integrando es par y por lo tanto $\int_0^\infty \frac{\cos(x)}{(1+x^2)^2} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty \frac{\cos(x)}{(1+x^2)^2} dx$: 0.5 pts.

(Denotemos $I := \int_{-\infty}^\infty \frac{\cos(x)}{(1+x^2)^2} dx$)

Siguiendo la indicación, notar que la curva $\Gamma_R = C_R \cup [-R, R]$, escribir la integral sobre Γ_R como la suma de las dos integrales sobre las curvas C_R y $[-R, R]$, y concluir que $\int_{-R}^R f(z)dz \to I$ cuando $R \to +\infty$: 0.5 pts.

Probar que $\int_{C_R} f(z)dz \to 0$ cuando $R \to +\infty$: 1.5 pts., lo cual a su vez de desglosa como sigue:

Parametrizar correctamente C_R y reescribir $\int_{C_R} f(z)dz$: 0.5 pts

Acotar $|\int_{C_R} f(z)dz|$ apropiadamente, trabajando tanto con el numerador y como con el denominador del integrando f: 0.5 pts.

Llegar a una cota superior para $|\int_{C_R} f(z)dz|$ que permita concluir: 0.5 pts.

Finalmente, calcular $\int_{\Gamma_R} f(z)dz$ se le asigna 1.5 pts., y tenemos dos maneras de proceder:

Primera manera de proceder, vía Fmla de Cauchy:

Notar que $z = i$ es la única singularidad que encierra la curva Γ_R, aplicar corolario de Cauchy Goursat y reescribir la integral en la forma que requiere la fórmula de Cauchy para la derivada de g: 1 pto. (acá $g(z) := e^z/(z+i)^2$)

Hacer el cálculo de $g'(i)$ y concluir el resultado $\int_{\Gamma_R} f(z)dz$: 0.5 pts.

Segunda manera de proceder, vía teorema de residuos:

Notar que $z = i$ es la única singularidad que encierra la curva Γ_R y escribir el teorema de los residuos para el cálculo de $\int_{\Gamma_R} f(z)dz$: 0.5 pts.

Mostrar que $z = i$ es un polo doble de f. Para esto último, hacerlo por la definición (mostrando que $L_2(i) \neq 0$) o notando que es una raíz doble del polinomio del denominador del integrando y que el numerador (e^z) no tiene ceros: 0.5 pts.

Hacer el cálculo del residuo (o equivalentemente de $g'(i)$) y concluir el resultado de $\int_{\Gamma_R} f(z)dz$: 0.5 pts.