

**Control 2**

22 de octubre de 2007

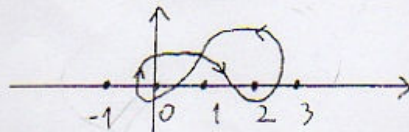
**Pregunta 1.** a) (2 pts.) Determine para cuáles puntos de  $\mathbb{C}$  la función

$$f(z) = e^{x-y} (\cos(x-y) + i \sin(x-y)), \quad (z = x + iy, \quad x, y \in \mathbb{R})$$

es diferenciable y calcule  $f'$  en estos puntos.

b) (4 pts.) Calcular

$$\int_{\Gamma} \frac{z^3}{(e^{2\pi iz} - 1)^2} dz$$

donde  $\Gamma$  es la curva de la figura**Pregunta 2.** a) (3 pts.) Calcular

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2(t)}{5 - 4 \cos(t)} dt.$$

b)

i) (1 pts.) Sea  $n \geq 1$  y  $w_1, \dots, w_n$  las  $n$  raíces del polinomio  $z^n + 1$ . Probar que

$$\prod_{j=1, j \neq i}^n (w_i - w_j) = n w_i^{n-1} \quad \forall 1 \leq i \leq n.$$

Ind.: escribir  $z^n + 1$  como producto de factores  $z - w_j$  y calcular  $\lim_{z \rightarrow w_i} \frac{z^n + 1}{z - w_i}$ .

ii) (2 pts.) Calcular

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1 + x^6} dx$$

**Pregunta 3.** a) (3 pts.) Encontrar la representación en serie de potencias de

$$f(z) = \frac{3z - 1}{(1 - z)^2(1 + z)}$$

en torno de 0 e indique cuál es su radio de convergencia.

b) (1 pts.) Encontrar el radio de convergencia de la serie de potencias  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} z^n$ .c) (2 pts.) Sea  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  una función analítica no constante. Suponga que existe  $\lambda \in \mathbb{C}$  tal que

$$f(z) = f(\lambda z) \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Pruebe que existe  $k \geq 1$  (entero) tal que  $\lambda^k = 1$ . Muestre además que existe  $g: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  analítica tal que

$$f(z) = g(z^m) \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

donde  $m \geq 1$  es el entero más pequeño tal que  $\lambda^m = 1$ .**Tiempo: 3 horas**

**Pauta Control**  
**Semestre 2007-2**

1.

- (a) Denotemos  $u(x, y) = e^{x-y} \cos(x-y)$ ,  $v(x, y) = e^{x-y} \sin(x-y)$  de modo que  $f(x+iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ . Calculemos las derivadas parciales:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= e^{x-y} \cos(x-y) - e^{x-y} \sin(x-y) & \frac{\partial u}{\partial y} &= -e^{x-y} \cos(x-y) + e^{x-y} \sin(x-y) \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= e^{x-y} \sin(x-y) + e^{x-y} \cos(x-y) & \frac{\partial v}{\partial y} &= -e^{x-y} \sin(x-y) - e^{x-y} \cos(x-y)\end{aligned}$$

Como la función es Frechet-derivable, bastará probar las condiciones de Cauchy Riemann. En este caso ambas condiciones corresponden a:

$$\cos(x-y) = \sin(x-y) = 0$$

Lo cual no es posible. De modo que la función no satisface Cauchy Riemann en ningún punto.

- (b) Sabemos que por el Teorema de los Residuos se tendrá que el valor de la integral será  $2\pi i$  por los residuos de la función encerrados por la curva.

Denotemos  $f(z) = \frac{z^3}{(e^{2\pi iz} - 1)^2}$  y calculemos los polos de  $f$  al interior de  $\Gamma$ .

Notemos que hay dos singularidades encerradas por la curva:  $z = 0$  y  $z = 2$ . Veremos que 0 es una singularidad reparable y que 2 es un polo de orden 2.

Notemos que para  $k \in \mathbb{Z}$  se tiene que:

$$\lim_{z \rightarrow k} \frac{z - k}{e^{2\pi iz} - 1} = \lim_{z \rightarrow k} \frac{1}{2\pi i e^{2\pi iz}} = \frac{-i}{2\pi}$$

De este modo

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{z^3}{(e^{2\pi iz} - 1)^2} = 0 \cdot \left( \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z}{e^{2\pi iz} - 1} \right)^2 = 0 \cdot \frac{-1}{4\pi^2} = 0$$

con lo cual 0 es una singularidad reparable.

Por otro lado:

$$\lim_{z \rightarrow 2} \frac{(z-2)^2 z^3}{(e^{2\pi iz} - 1)^2} = 8 \cdot \left( \lim_{z \rightarrow 2} \frac{z-2}{e^{2\pi iz} - 1} \right)^2 = 8 \cdot \frac{-1}{4\pi^2} = \frac{-2}{\pi^2}$$

de modo que 2 es un polo de orden 2.

Calculemos el residuo:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial (z-2)^2 f}{\partial z} &= \frac{\partial \frac{(z-2)^2 z^3}{(e^{2\pi iz} - 1)^2}}{\partial z} \\
&= \frac{\partial \frac{z^5 - 4z^4 + 4z^3}{(e^{2\pi iz} - 1)^2}}{\partial z} \\
&= \frac{(5z^4 - 16z^3 + 12z^2) (e^{2\pi iz} - 1)^2 - 2 (e^{2\pi iz} - 1) e^{2\pi iz} 2\pi i (z^5 - 4z^4 + 4z^3)}{(e^{2\pi iz} - 1)^4} \\
&= \frac{(5z^4 - 16z^3 + 12z^2) (e^{2\pi iz} - 1) - 2e^{2\pi iz} 2\pi i (z^5 - 4z^4 + 4z^3)}{(e^{2\pi iz} - 1)^3} \\
&= z^2 \frac{(5z^2 - 16z + 12) (e^{2\pi iz} - 1) - 2e^{2\pi iz} 2\pi i (z^3 - 4z^2 + 4z)}{(e^{2\pi iz} - 1)^3} \\
&= z^2 \frac{(5z - 6) (z - 2) (e^{2\pi iz} - 1) - 2e^{2\pi iz} 2\pi i (z - 2)^2 z}{(e^{2\pi iz} - 1)^3} \\
&= (z - 2) z^2 \frac{(5z - 6) (e^{2\pi iz} - 1) - 2e^{2\pi iz} 2\pi i (z - 2) z}{(e^{2\pi iz} - 1)^3} \\
&= \frac{z - 2}{e^{2\pi iz} - 1} z^2 \frac{(5z - 6) (e^{2\pi iz} - 1) - 2e^{2\pi iz} 2\pi i (z - 2) z}{(e^{2\pi iz} - 1)^2}
\end{aligned}$$

Bastaría calcular:

$$\lim_{z \rightarrow 2} \frac{(5z - 6) (e^{2\pi iz} - 1) - 2e^{2\pi iz} 2\pi i (z^2 - 2z)}{(e^{2\pi iz} - 1)^2}$$

Aplicando L'Hopital

$$\begin{aligned}
\lim_{z \rightarrow 2} \frac{(5z - 6) (e^{2\pi iz} - 1) - 2e^{2\pi iz} 2\pi i (z^2 - 2z)}{(e^{2\pi iz} - 1)^2} &= \\
\lim_{z \rightarrow 2} \frac{5 (e^{2\pi iz} - 1) + (5z - 6) 2\pi i e^{2\pi iz} - 2e^{2\pi iz} (2\pi i)^2 (z^2 - 2z) - 2e^{2\pi iz} 2\pi i (2z - 2)}{2\pi i e^{2\pi iz} (e^{2\pi iz} - 1)} &= \\
\lim_{z \rightarrow 2} \frac{5 (e^{2\pi iz} - 1) + (z - 2) 2\pi i e^{2\pi iz} - 2e^{2\pi iz} (2\pi i)^2 (z - 2) z}{2\pi i e^{2\pi iz} (e^{2\pi iz} - 1)} &= \\
\lim_{z \rightarrow 2} \frac{5 (e^{2\pi iz} - 1) + (z - 2) (2\pi i e^{2\pi iz} - 2e^{2\pi iz} (2\pi i)^2 z)}{2\pi i e^{2\pi iz} (e^{2\pi iz} - 1)} &= \\
\lim_{z \rightarrow 2} \frac{5}{2\pi i e^{2\pi iz}} + \lim_{z \rightarrow 2} \frac{(z - 2) (1 - 2(2\pi i) z)}{(e^{2\pi iz} - 1)} &= \\
\frac{5}{2\pi i} + \frac{(1 - 8\pi i)}{2\pi i} = \frac{6 - 8\pi i}{2\pi i} = -\left(4 + i\frac{3}{\pi}\right)
\end{aligned}$$

Luego

$$Res(f, 2) = \frac{1}{2\pi i} (4) \left(-\left(4 + i\frac{3}{\pi}\right)\right)$$

Con lo cual podemos valorar la integral:

$$\int_{\Gamma} \frac{z^3}{(e^{2\pi iz} - 1)^2} dz = -4 \left(4 + i\frac{3}{\pi}\right)$$

2.

(a) Definamos  $f(z) = \frac{-\frac{1}{4} \left(z - \frac{1}{z}\right)^2}{zi \left(5 - 2 \left(z + \frac{1}{z}\right)\right)}$  de modo que:

$$\int_{D(0,1)} f(z) dz = \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2(t)}{5 - 4 \cos(t)} dt$$

y el valor de la integral se podrá calcular por el método de los residuos.

Notemos que:

$$f(z) = \frac{i(z^2 - 1)^2}{4z^2(5z - 2(z^2 + 1))} = \frac{i(z^2 - 1)^2}{4z^2(2z^2 - 5z + 2)} = \frac{(z^2 - 1)^2}{4z^2(2z - 1)(z - 2)}$$

De modo que los polos de  $f$  en el interior del disco son sólo dos:  $z = 0$  y  $z = \frac{1}{2}$  de orden 2 y 1 respectivamente. Calculemos los residuos:

Para  $z = \frac{1}{2}$

$$\text{Res}\left(f, \frac{1}{2}\right) = \frac{i\left(\frac{1}{4} - 1\right)^2}{4\frac{1}{2}^2\left(\frac{1}{2} - 2\right)} = -\frac{3}{8}i$$

Para  $z = 0$ :

$$\frac{\partial z^2 f(z)}{\partial z} = \frac{\partial z^2 \frac{i(z^2 - 1)^2}{4z^2(2z^2 - 5z + 2)}}{\partial z} = \frac{\partial \frac{i(z^2 - 1)^2}{4(2z^2 - 5z + 2)}}{\partial z} = \frac{i}{4} \frac{2z(z^2 - 1)(2z^2 - 5z + 2) - (4z - 5)(z^2 - 1)}{(2z^2 - 5z + 2)^2}$$

Así:

$$\text{Res}(f, 0) = \frac{i}{4} \frac{-5}{4} = -\frac{5}{16}i$$

Finalmente se tiene que:

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2(t)}{5 - 4 \cos(t)} dt = 2\pi i \left(-\frac{3}{8}i - \frac{5}{16}i\right) = \pi \left(\frac{3}{4} + \frac{5}{8}\right)$$

b (i) Si denotamos por  $w_1, \dots, w_n$  las  $n$  raíces del polinomio  $z^n + 1$  entonces podemos escribir  $z^n + 1 = \prod_{j=1}^n (z - w_j)$  de modo que para  $k = 1, \dots, n$  y para  $z \neq w_k$  se tendrá que:

$$\frac{z^n + 1}{z - w_k} = \prod_{j=1, j \neq k}^n (z - w_j)$$

Y tomando  $z \rightarrow w_k$  y aplicando L'Hopital al lado izquierdo de la igualdad anterior se obtiene que:

$$nw_k^{n-1} = \prod_{j=1, j \neq k}^n (w_k - w_j)$$

como se deseaba probar.

- (ii) Para calcular tal integral consideremos la función  $f(z) = \frac{z^2}{1+z^6}$  y la curva  $\Gamma$  que parte en  $z = 0$ , que luego pasa por el punto  $z = R$ , luego por  $z = Re^{i\frac{\pi}{3}}$  y finalmente vuelve al origen.

De esto modo:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \frac{z^2}{1+z^6} dz &= \int_0^R \frac{x^2}{1+x^6} dx + \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{(Re^{i\theta})^2}{1+(Re^{i\theta})^6} iRe^{i\theta} d\theta + \int_R^0 \frac{(xe^{i\frac{\pi}{3}})^2}{1+(xe^{i\frac{\pi}{3}})^6} e^{i\frac{\pi}{3}} dx \\ &= (1 - e^{i\pi}) \int_0^R \frac{x^2}{1+x^6} dx + \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{(Re^{i\theta})^2}{1+(Re^{i\theta})^6} iRe^{i\theta} d\theta \end{aligned}$$

Por otro lado:

$$\left| \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{(Re^{i\theta})^2}{1+(Re^{i\theta})^6} iRe^{i\theta} d\theta \right| \leq \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{R^3}{R^6-1} d\theta = \frac{\pi}{3} \frac{R^3}{R^6-1} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0$$

Además los polos de  $\frac{z^2}{1+z^6}$  son los ceros del polinomio  $z^6+1$ , de modo que para el valor de la integral sólo aporta aquel cero que se encuentra al interior de la curva  $\Gamma$ , es decir,  $z = e^{i\frac{\pi}{6}}$ . Denotemos por  $w_1, \dots, w_6$  los ceros del polinomio  $z^6+1$  con  $w_1 = e^{i\frac{\pi}{6}}$

Des esteo modo

$$\text{Res} \left( \frac{z^2}{1+z^6}, w_1 \right) = \frac{w_1^2}{\prod_{j=i,j \neq 1}^6 (w_1 - w_j)} = \frac{w_1^2}{6w_1^5} = \frac{1}{6w_1^3} = \frac{1}{6e^{i\frac{\pi}{2}}} = \frac{1}{6i}$$

Finalmente obtenemos que:

$$(1 - e^{i\pi}) \int_0^{\infty} \frac{x^2}{1+x^6} dx = 2\pi i \frac{1}{6i} = \pi \frac{1}{3}$$

o equivalentemente

$$\int_0^{\infty} \frac{x^2}{1+x^6} dx = \frac{2\pi}{3(1-e^{i\pi})} = \frac{\pi}{3}$$

Con lo cual:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^6} dx = \frac{2\pi}{3}$$

### 3.

- (a) Notemos que

$$\frac{3z-1}{(1-z)^2(1+z)} = \frac{z}{(1-z)^2} - \frac{1}{1+z} = z \frac{\partial \frac{1}{1-z}}{\partial z} - \frac{1}{1+z}$$

Además tenemos que:

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{k=0}^{\infty} z^k; \quad \frac{1}{1+z} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k z^k$$

a partir de lo cual podemos escribir:

$$\frac{3z-1}{(1-z)^2(1+z)} = z \frac{\partial \sum_{k=0}^{\infty} z^k}{\partial z} - \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k z^k = z \sum_{k=0}^{\infty} k z^{k-1} + \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1} z^k = \sum_{k=0}^{\infty} \left( (k+1)(-1)^{k+1} \right) z^k$$

Su radio de convergencia es 1, pues  $\limsup_{n \rightarrow \infty} (n+1)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1)^{\frac{1}{n}} = 1$

(b) El radio es  $e^{-1}$  pues:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^{\frac{1}{n}} = e$$

(c) Como  $f$  es holomorfa en el plano Complejo se tendrá que  $f$  admite desarrollo en serie de potencias en torno a cero cuyo radio de convergencia es  $\infty$ .

De modo que  $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ , y gracias a la propiedad de  $f$ :

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k = f(z) = f(\lambda z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (\lambda z)^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \lambda^k z^k$$

Luego igualando término a término (esto se puede ver, por ejemplo, derivando e igualando a cero sucesivamente) se tendrá que:

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad a_k (\lambda^k - 1) = 0 \quad (1)$$

Si suponemos, por contradicción, que  $\lambda^k \neq 1 \forall k \in \mathbb{N}$ , entonces de la ecuación anterior se concluye que  $\forall k \geq 1 \quad a_k = 0$  es decir, la función es constante que contradeciría la hipótesis inicial.

Sea  $m$  ahora, el menor de los enteros que satisface  $\lambda^m = 1$  de modo que  $\forall k < m \quad \lambda^k \neq 1$ .

Con esto se tendrá, más precisamente que  $\lambda^k = 1 \Leftrightarrow \exists l > 0$  tq  $k = lm$

De modo que de la ecuación (1) se concluye que para todo  $k$  que no es múltiplo de  $m$  (es decir, tal que  $\lambda^k \neq 1$ ) se tiene  $a_k = 0$ . Luego

$$f(z) = a_0 + a_m z^m + a_{2m} z^{2m} + \dots + a_{lm} z^{lm} \dots$$

y definiendo

$$g(z) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j z^j$$

con  $c_k = a_{2k}$  se tendrá que  $g$  es holomorfa en todo  $\mathbb{C}$  pues el radio de convergencia de la serie será también infinito dado que el mayor punto de acumulación de los  $c_k$ 's será el mismo que el de los  $a_k$ 's, de la misma definición. Así  $f(z) = g(z^m)$  como se afirma.