Universidad de Chile.
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas.
Departamento de Ingeniería Matemática.
Santiago, 23 de Octubre de 2008. Tiempo: 3:00 hrs.

CONTROL 2: MA2A2 Cálculo Avanzado y Aplicaciones

Problema 1. A lo largo de esta pregunta f denotará una función holomorfa en todo $\mathbb{C}$.

(a) (2 pts.) Demuestre que $f(z) = \alpha z + z_0$, para $\alpha \in \mathbb{R}$ y $z_0 \in \mathbb{C}$ dados, son las únicas funciones holomorfas de la forma $f(z) = u(x) + iv(y)$, donde $z = x + iy$.

(b) (2 pts.) Demuestre la equivalencia: Existe un natural $k \in \mathbb{N}$ y dos complejos a y b tales que $|f(z)| \leq a + b|z|^k$ para todo $z \in \mathbb{C}$ ssi f es un polinomio de grado k.
Indicación: Utilice las desigualdades de Cauchy.

(c) Suponga que $f(z)/z \to 0$ cuando $|z| \to +\infty$.

(i) (1 pto.) Demuestre que existen $a, b \in \mathbb{C}$ tales que $|f(z)| \leq a + b|z|$, $\forall z \in \mathbb{C}$.
Indicación: Muestre que la función $g(z) = (f(z) - f(0))/z$ puede extenderse de manera holomorfa a todo $\mathbb{C}$.

(ii) (1 pto.) Utilice la parte (b) para concluir que f es necesariamente constante en todo $\mathbb{C}$.

Problema 2.

(a) (2 pts.) Encuentre los discos de convergencia para las siguientes series:

$$(i) \sum_{n\geq 1} n^{1/n}(z-1)^n, \qquad (ii) \sum_{n\geq 1} n!(z-i)^{n!}.$$

(b) (2 pts.) Obtenga las series de potencias o de Laurent, según corresponda, en torno a $z_0 = 0$ para las siguientes funciones:

$$(i)\ f(z) = \log(1 - z^2), \qquad (ii)\ f(z) = \frac{1}{z^3}\log\left(\frac{1+z}{1-z}\right).$$

Indique también la mayor región donde estas expansiones son válidas.
Indicación: Recuerde que si $|w| < 1$ entonces $\sum_{n=1}^{\infty} w^n = 1/(1-w)$.

(c) (2 pts.) Integre las funciones de la parte (b) sobre la curva $\Gamma = \partial D(0, 1/2)$ que corresponde a la frontera del disco $D(0, 1/2)$, orientada en sentido anti-horario.

Problema 3.

(a) (3 pts.) Para $a > 1$ y $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, calcule las integrales

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos(n\theta)}{a - \cos\theta} d\theta \qquad \text{y} \qquad \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\operatorname{sen}(n\theta)}{a - \cos\theta} d\theta.$$

(b) (3 pts.) Calcule las siguientes integrales impropias:

$$(i) \int_0^{\infty} \frac{2x^2 - 1}{x^4 + 5x^2 - 4}\, dx, \qquad (ii) \int_0^{\infty} \frac{\cos(x)}{(x^2 + \pi^2)^2}\, dx.$$

PAUTA Control 2 MA2A2

Problema 1:

(a) Sea $f(z) = u(x) + iv(y)$ holomorfa en $\mathbb{C}$ (con $z = x+iy$). Sabemos que u y v deben satisfacer las condiciones de Cauchy-Riemann:

$$(C\text{-}R) \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

0.5

y que u, v son C^∞ como funciones de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$.

Entonces $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

es decir $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \left(\text{análogamente } \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0\right)$$

0.5

Así, si $u = u(x)$ y $v = v(y)$ obtenemos que:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 &\Rightarrow u(x) = \alpha x + a \\ \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 &\Rightarrow v(y) = \alpha' y + b \end{aligned}\right\} \text{ por (C-R) de nuevo } \Longrightarrow \boxed{\alpha = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = \alpha'}$$

0.5

Por lo tanto $$f = u + iv = \alpha(x+iy) + a + ib$$
$$f(z) = \alpha z + z_0$$
donde $z_0 = a + ib$

0.5

(b) Supongamos primero que $f(z)=\sum_{n=0}^{k} a_n z^n$

es un polinomio de grado k, entonces

$$|f(z)| \leq \max_{n=0,\dots,k} |a_n|\,|z|^k \quad \forall |z|>1$$ 0.5

y como f es holomorfa se tiene también que:

$\exists a>0,\ |f(z)| \leq a \quad \forall |z|<1$

Entonces $|f(z)| \leq a + \max_n |a_n|\,|z|^k \quad \forall z$ 0.5

Veamos ahora la recíproca: Supongamos $\exists a, b$ tal que $|f(z)| \leq a + b|z|^k$

Como f es holomorfa en todo $\mathbb{C}$, para cualquier $r>0$ existe una serie de potencias de f en $D(0,r)$, esto es:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n \qquad \forall z \in D(0,r)$$

donde $c_n = f^{(n)}(0)/n!$

De las desigualdades de Cauchy sabemos que:

$$|f^{(n)}(0)| \leq \frac{n!\, M_r}{r^n} \qquad \forall n=0,1,\dots$$

donde $M_r = \sup_{z\in\partial D(0,r)} |f(z)|$

⟶ Continua

que en este caso satisface:

$$M_r \leq \sup_{z \in \partial D(0,r)} a + b|z|^k = a + b r^k$$ 0.5

3/5

Así, se tiene que:

$$|c_n| \leq \frac{a + b r^k}{r^n} = \frac{a}{r^n} + \frac{b}{r^{n-k}} \quad \forall n \quad (+)$$

Luego, si $n \geq k+1$, como $r > 0$ es arbitrario, se concluye que $c_n = 0 \quad \forall n \geq k+1$

$$\Longrightarrow \quad f(z) = \sum_{n=0}^{k} c_n z^n$$ 0.5

Obs: La fórmula $(+)$ también puede ser obtenida de la fórmula de Cauchy para $f^{(n)}(0)$.

(c) (i) Como $\frac{|f(z)|}{|z|} \longrightarrow 0$ cuando $|z| \to +\infty$

entonces existe $M>0$ tq. $\frac{|f(z)|}{|z|} \leq 1 \quad \forall |z|>M$

es decir $|f(z)| \leq |z| \quad \forall |z|>M$

Pero como f es holomorfa, sabemos que existe $a>0$ tal que $|f(z)| \leq a \quad \forall |z| \leq M$

Así $|f(z)| \leq a + |z| \quad \forall z \in \mathbb{C}$ 1.0

OTRA FORMA DE HACERLO:

Como f es holomorfa, sabemos que el límite $\lim_{z\to 0} g(z) = \lim_{z\to 0} \frac{f(z)-f(0)}{z} = f'(0)$ existe

Luego $\hat{g}(z) = \begin{cases} g(z), & z \neq 0 \\ f'(0), & z = 0 \end{cases}$ es holomorfa en todo $\mathbb{C}$

(pues es holomorfa en $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ y continua en 0)

Ahora como $\hat{g}(z) \longrightarrow 0$ si $|z| \to +\infty$

tenemos que $\hat{g}$ es acotada

$\xRightarrow{\text{Liouville}} \hat{g} \equiv cte \iff \frac{f(z)-f(0)}{z} = f'(0)$

$\iff f(z) = f(0) + f'(0)\, z \quad \forall z$ (*)

(ii) Aplicando la parte (b) deducimos que

$$f(z) = a_0 + a_1 z \quad \text{para ciertos } a_0, a_1 \in \mathbb{C}$$
$$(a_0 = f(0)\,,\ a_1 = f'(0))$$

Como $\frac{f(z)}{z} \to 0$ si $|z| \to +\infty$ concluimos

que $\frac{a_0}{z} + a_1 \to 0$ si $|z| \to +\infty$

es decir $a_1 = 0 \Rightarrow f(z) = a_0$ es constante ∎

1.0

Obs: Al hacerlo de la segunda forma no es necesario aplicar (b), pues se concluye directamente de la fórmula ⊛

Problema 2:

(a) (i) $\sum_{n\geq 1} n^{1/n}(z-1)^n$

Usamos el criterio de la raíz $R = 1/\limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|c_n|}$

$$\limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = \limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n^{1/n}} = \limsup_{n\to+\infty} n^{1/n^2} = \lim_{n\to+\infty} \left((n^2)^{1/n^2}\right)^{1/2}$$

$$= 1^{1/2} = 1 \ //$$

$\Longrightarrow R = 1$

y por lo tanto el disco de convergencia es

$D = D(1,1) = \{z\in\mathbb{C} : |z-1|<1\}$ 1.0

(ii) $\sum_{n\geq 1} n!\,(z-i)^{n!} = \sum_{k\geq 1} c_k (z-i)^k$

con $c_k = \begin{cases} k, & \text{si } k=n! \text{ para cierto } n\in\mathbb{N} \\ 0, & \text{si no} \end{cases}$

Luego $\limsup_{k\to+\infty} \sqrt[k]{|c_k|} = \lim_{k\to+\infty} \sqrt[k]{k} = 1$

1.0

Así, la región de convergencia es $D(i,1)$ //

(b) Notemos que para $g(w) = \log(1-w)$ y $|w|<1$ se tiene que

$$g'(w) = -\frac{1}{1-w} = -\sum_{n=0}^{+\infty} w^n \Rightarrow g(w) = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{w^{n+1}}{n+1}$$
$$= -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{w^n}{n}$$

0.5

Luego:

(i) $$f(z) = \log(1-z^2) = \log(1+z) + \log(1-z)$$
$$= g(-z) + g(z)$$
$$= -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} z^n - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n} = -\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1+(-1)^n}{n}\right) z^n$$

0.5

y (ii) $$f(z) = \frac{1}{z^3} \log\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$$
$$= \frac{1}{z^3}\left(g(-z) - g(z)\right)$$
$$= \frac{1}{z^3} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1-(-1)^n}{n}\right) z^n = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n z^n$$

con $C_n = \begin{cases} 0 & ; n \leq -3 \\ 0 & ; n \geq -2 \quad n \text{ ~~imp~~par} \\ 2/_{n+3} & n \geq -2 \quad n \text{ par} \end{cases}$

0.5

La serie de potencias en (i) es válida en $D(0,1)$, mientras que la serie de Laurent en (ii) en $D(0,1)\setminus\{0\}$

0.5

(c) Notemos que $\Gamma = \partial D(0, 1/2) \subseteq D(0,1) \setminus \{0\}$, 3/3
luego ambas integrales (f en (i) y (ii)) están bien definidos.

(i) Además $f(z) = \log(1-z^2)$ es holomorfa en la región D que encierra Γ, pues admite una serie de potencias en $D(0,1) \supseteq D$, entonces por teo. Cauchy-Goursat se obtiene $\oint_\Gamma f = 0$ 1.0

(ii) Por otro lado $f(z) = \frac{1}{z^3} \log\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$ tiene un polo doble en $z_0 = 0 \in D$, pues tiene una serie de Laurent donde $c_n = 0 \ \forall n \leq -3$.

Entonces

$$\oint_\Gamma f = 2\pi i \operatorname{Res}(f, 0)$$ 0.5

Podemos obtener $\operatorname{Res}(f,0) = c_{-1}$ directamente de la serie de Laurent de f de la parte (b) (ii)., deduciendo que $\operatorname{Res}(f,0) = 0$. y luego $\oint_\Gamma f = 0$. 0.5

<u>Obs</u>: También se puede calcular el residuo usando la fórmula: $\operatorname{Res}(f,p) = \lim_{z \to p} \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^m}{dz^m}\left((z-p)^m f(z)\right)$

Problema 3: $\qquad$ 1/3

(a) Sea $z = e^{i\theta}$ $\left(\Rightarrow dz = ie^{i\theta}d\theta\right)$. 0.5
$\phantom{(a) Sea z = e^{i\theta}}$ $\left(\Leftrightarrow d\theta = dz/iz\right)$

Entonces:

$$I = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos(n\theta)+i\,\mathrm{sen}(n\theta)}{a-\cos\theta}\,d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{2e^{in\theta}\,d\theta}{2a-e^{i\theta}-e^{-i\theta}}$$

$$= 2\oint_\Gamma \frac{z^n}{2a-z-1/z}\cdot\frac{dz}{iz} = -\frac{2}{i}\oint_\Gamma \frac{z^n}{z^2-2az+1}\,dz$$

donde $\Gamma = \{z\in\mathbb{C} : |z|=1\}$ es orientada en sentido anti-horario. 0.5

Sea $f(z) = \dfrac{z^n}{z^2-2az+1}$. Esta función tiene 2 polos simples en $a+\sqrt{a^2-1}$ y $a-\sqrt{a^2-1}$ (ambos reales pues $a>1$).

Sólo $a-\sqrt{a^2+1}$ es encerrado por la curva Γ, por lo que la integral se calcula como

1.0

$$\boxed{\oint_\Gamma f = 2\pi i\,\mathrm{Res}\left(f, a-\sqrt{a^2-1}\right)} = 2\pi i \lim_{z\to a-\sqrt{a^2-1}} \frac{z^n}{z-(a+\sqrt{a^2-1})}$$

$$= 2\pi i\,\frac{\left(a-\sqrt{a^2-1}\right)^n}{-2\sqrt{a^2-1}} = -\pi i\,\frac{\left(a-\sqrt{a^2-1}\right)^n}{\sqrt{a^2-1}}$$ 0.5

Así

$$I = \frac{2\pi\left(a-\sqrt{a^2-1}\right)^n}{\sqrt{a^2-1}}$$

$$\Rightarrow \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos(n\theta)}{a-\cos\theta}\,d\theta = \frac{2\pi\left(a-\sqrt{a^2-1}\right)^n}{\sqrt{a^2-1}}\ ; \quad \int_{-\pi}^{\pi}\frac{\mathrm{sen}(n\theta)}{a-\cos\theta}\,d\theta = 0$$ 0.5

(b) (i) $I = \int_0^{\infty} \frac{2x^2-1}{x^4+5x^2-4}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2x^2-1}{x^4+5x^2-4}\,dx$ 0.2 2/3

Sea $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)} = \frac{2z^2-1}{z^4+5x^2-4}$

Como $q(z) = (z^2 - z_+)(z^2 - z_-) = (z-\sqrt{z_+})(z+\sqrt{z_+})(z - i\sqrt{-z_-})(z+i\sqrt{-z_-})$,

donde $z_\pm = \frac{-5 \pm \sqrt{25+16}}{2} = \frac{-5\pm\sqrt{41}}{2}$ $\begin{pmatrix} z_+ > 0 \\ z_- < 0 \end{pmatrix}$,

se tiene que $\pm\sqrt{z_+}$ son polos simples reales de f

y $\pm i\sqrt{-z_-}$ son polos simples ~~de~~ f que son complejos

puros. Notemos que sólo $i\sqrt{-z_-} \in H = \{z : \operatorname{Im}(z) \geq 0\}$ 0.5

Así, dado que $\operatorname{gr} q = 4 \geq 2+2 = \operatorname{gr}(p)+2$, aplicamos el teorema visto en clases para obtener: 0.3

$$I = \frac{1}{2}\left(2\pi i \operatorname{Res}(f, i\sqrt{-z_-}) + \pi i\left(\operatorname{Res}(f,\sqrt{z_+}) + \operatorname{Res}(f,\sqrt{z_-})\right)\right)$$

$$\operatorname{Res}(f,\sqrt{z_+}) = \frac{2z_+-1}{2\sqrt{z_+}\cdot(z_+-z_-)}$$

$$\operatorname{Res}(f,-\sqrt{z_+}) = \frac{2z_+-1}{-2\sqrt{z_+}(z_+-z_-)} = -\operatorname{Res}(f,\sqrt{z_+})$$

$$\operatorname{Res}(f, i\sqrt{-z_-}) = \frac{2z_--1}{2i\sqrt{-z_-}(z_--z_+)} = + \frac{6+\sqrt{41}}{2i\sqrt{41}\sqrt{\frac{5+\sqrt{41}}{2}}}$$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{2}\left(\cancel{2}\pi \cancel{i} \frac{\sqrt{2}(6+\sqrt{41})}{\cancel{2i}\sqrt{41}\sqrt{5+\sqrt{41}}} + \pi i\, 0\right) = \frac{\sqrt{2}\pi}{2\sqrt{41}}\,\frac{6+\sqrt{41}}{\sqrt{5+\sqrt{41}}}$$ 0.5

(b) (ii) $I = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(x)}{(x^2+\pi^2)^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{(x^2+\pi^2)^2}\,dx$ 3/3

Sea $f(z) = \frac{e^{iz}}{(z^2+\pi^2)^2}$. Los polos de f son

$z = i\pi$ y $z = -i\pi$, ambos dobles.

Sólo $z = i\pi \in H$. 0.5

Ahora, como el grado del polinomio denominador es 2, mayor igual que $0+1$, siendo 0 el grado del polinomio en el numerador que acompaña a e^{iz} (esto es polinomio constante igual a 1), se tiene que:

$$I = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(2\pi i \,\mathrm{Res}(f, i\pi)\right),$$ 0.5

pero $$\mathrm{Res}(f, i\pi) = \lim_{z\to i\pi} \frac{d}{dz}\left(\frac{e^{iz}}{(z+i\pi)^2}\right) =$$

$$= \lim_{z\to i\pi} \frac{ie^{iz}(z+i\pi)^{\cancel{2}} - 2e^{iz}\cancel{(z+i\pi)}}{(z+i\pi)^{\cancel{4}\,3}}$$

$$= \frac{i e^{-\pi}(2\pi i) - 2e^{-\pi}}{(2\pi i)^3} = +\frac{e^{-\pi}}{8\pi^3 i}\cdot(2\pi+2)$$

$$= \frac{e^{-\pi}}{4\pi^3 i}(\pi+1)$$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{2}\left(\cancel{2}\pi \cancel{i}\,\frac{e^{-\pi}(\pi+1)}{4\pi^{\cancel{3}\,2}\cancel{i}}\right) = \frac{e^{-\pi}(\pi+1)}{4\pi^2}$$ 0.5