Pauta P1 Control 2 MA2002 Otoño 2010

P1. a) Encuentre la forma polar de z = $\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^{1/2}$

b) Usando (a) calcule z = ½ log$\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^{1/2}$

c) Determine y grafique los conjuntos:

(i) D = { z : $\left|\dfrac{z+1}{1-z}\right| = 9$ } ; (ii) D = { z : $\left|z+\overline{z}\right| \leq 1$ }.

Solución.

a) $\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^{1/2} = \left(\dfrac{1+i}{1-i}\cdot\dfrac{1+i}{1+i}\right)^{1/2} = \left(\dfrac{1}{2}(1+i)^2\right)^{1/2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(1+i) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{i\pi/4}\right) = \dfrac{1}{2}e^{i\pi/4}$

(puntaje: 2.0)

b) log(w) = ln(lwl) + iarg(w), para w = $\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^{1/2}$, (a) implica lwl = ½ y arg(w) = $\pi/4$,

y para z = ½ log$\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^{1/2}$, resulta log(z) = ½ (ln (½) + i$\pi/4$) = ½ ln (½) + i$\pi/8$

(puntaje: 1.0)

c) (i) $z \in D\ ssi\ \left|\dfrac{z+1}{1-z}\right| = 9$ ssi $\left|\dfrac{z+1}{1-z}\right|^2 = 81$ ssi $\left(\dfrac{z+1}{1-z}\right)\overline{\left(\dfrac{z+1}{1-z}\right)} = 81$ ssi $\left(\dfrac{z+1}{1-z}\right)\left(\dfrac{\overline{z+1}}{\overline{1-z}}\right) = 81$ ssi

$\left(\dfrac{z+1}{1-z}\right)\left(\dfrac{\overline{z}+1}{1-\overline{z}}\right) = 81$ ssi $\dfrac{z\overline{z}+z+\overline{z}+1}{1-(z+\overline{z})+z\overline{z}} = 81$ ssi $z\overline{z}+(z+\overline{z})+1 = 81(z\overline{z}-(z+\overline{z})+1)$

ssi $80z\overline{z}-82(z+\overline{z})+80 = 0$ ssi $z\overline{z}+b(z+\overline{z})+1 = 0$, donde b = - 41/40.

Además, si z = x + iy, $z\overline{z} = x^2+y^2$ y $z+\overline{z} = 2\,\mathrm{Re}(z)$, implicando

$z \in D$ ssi $x^2+y^2+2bx+1 = 0$ ssi $x^2+y^2+2bx+1 = 0$ ssi $(x+b)^2+y^2 = b^2-1$

Por lo tanto, D es el circulo centrado en (-b,0) = (41/40,0) y radio r = $\sqrt{b^2-1} = 9/40$.

(puntaje: 1.5)

(ii) Si z = x + iy, $z+\overline{z} = 2\,\mathrm{Re}(z)$ = 2x, y por lo tanto, $z \in D\ ssi\ \left|z+\overline{z}\right| \leq 1$ ssi 2lxl ≤ 1.

implicando que $z \in D\ ssi\ |x| \leq 1/2$, i.e., D es la región del plano complejo limitada por las rectas x = -1/2 y x = 1/2.

(puntaje: 0.5)

Pauta P2 Control 2 MA2002 Otoño-2010

P2. a) Sea f: C→C función holomorfa tal que f = u + iv. Si $u^2 + v^2 - 2uv$ = cte., Demuestre que f es constante.

b) Sea f: C→C función tal que f = u + iv. Dada la función u determine si existe v tal que f sea analítica (holomorfa). En tal caso, encuentre v.

Solución.

a) La condición para u y v es equivalente a: $(u - v)^2$ = cte.

Derivando c/r a x: (1) $2(u-v)\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial x}\right)=0$; Derivando c/r a y: (2) $2(u-v)\left(\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial y}\right)=0$;

(1) implica u = v o $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial x}$.

(puntaje: 0.8)

Caso u = v. Derivando c/r a x e y implica (3) $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial x}$ y (4) $\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial y}$.

Como f es holomorfa, u y v cumplen C.C-R: (5) $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$ y (6) $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$.

(3) y (6) implican (7) $\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}$. Las igualdades (7) y (4) implican (8) $\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{\partial v}{\partial y}$.

(8) + (5) implican $2\frac{\partial u}{\partial x}=0$, i.e., $\frac{\partial u}{\partial x}=0$ y esta igualdad en (3) implica $\frac{\partial v}{\partial x}=0$.

Similarmente, $\frac{\partial u}{\partial x}=0$ en (5) implica $\frac{\partial v}{\partial y}=0$; $\frac{\partial v}{\partial x}=0$ y (6) implican $\frac{\partial u}{\partial y}=0$.

Resumiendo, $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=0$, implican u = v = cte, i.e., f = cte.

(puntaje de este caso: 2.0)

Caso u ≠ v. Este caso implica (3) y (4) y el argumento del caso anterior implica f=cte,
Caso (2) es análogo al caso (1)

(puntaje de estas dos ultimas observaciones: 0.2)

IMPORTANTE: Pauta alternativa para las respuestas a esta parte del P2 que consideraron la condición $\mathbf{u^2 + v^2 = cte}$ (que fue sugerida por un P. Auxiliar).

Solución.

Caso cte≠0. Derivando $u^2 + v^2$ = cte c/r a x e y implica

(1) $2u\frac{\partial u}{\partial x}+2v\frac{\partial v}{\partial x}=0$; (2) $2u\frac{\partial u}{\partial y}+2v\frac{\partial v}{\partial y}=0$

Como f es holomorfa, u y v cumplen C.C-R: (3) $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$ y (4) $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$.

(3) en (1) implica (5) $2u\frac{\partial v}{\partial y}+2v\frac{\partial v}{\partial x}=0$; (5)˙v – (2)˙u implica (6) $2v^2\frac{\partial v}{\partial x}-2u^2\frac{\partial u}{\partial y}=0$;

(4) en (6) implica $2(u^2+v^2)\frac{\partial v}{\partial x}=0$; como $u^2+v^2\neq 0$ resulta $\frac{\partial v}{\partial x}=0$, y esta igualdad aplicada a (1), (4) y (2) implican $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=0$, i.e., u = v = cte, y f = cte.

(puntaje: 2.7)

Caso cte = 0. $u^2 + v^2 = 0$ implica u = v = 0, i.e., f = 0 es constante. **(puntaje: 0.3)**

b) (i) **$u(x,y) = e^x[(x+3)\cos y - y\operatorname{sen} y]$.** Claramente, por algebra de funciones, u es de clase $C^1(IR^2)$. Para determinar v de modo que $f = u+iv$ sea holomorfa, se deben cumplir las C.C-R.

$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ y $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$, i.e., v debe cumplir

$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = e^x[(x+3)\cos y - y\operatorname{sen} y] + e^x\cos y = e^x[(x+4)\cos y - y\operatorname{sen} y]$. Integrando c/r a y:

$v(x,y) = e^x(x+4)\operatorname{sen} y - e^x\int y\,sen(y)dy + g(x) = e^x(x+4)\operatorname{sen} y - e^x(\operatorname{sen} y - y\cos y) + g(x)$

i.e., $v(x,y) = e^x[(x+3)\operatorname{sen} y + y\cos y] + g(x)$. **(puntaje: 1.0)**

Esta función v debe cumplir la otra condición, i.e., $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$

$\frac{\partial u}{\partial y} = e^x[-(x+3)\operatorname{sen} y - \operatorname{sen} y - y\cos y] = -e^x[(x+4)\operatorname{sen} y + y\cos y]$

$\frac{\partial v}{\partial x} = e^x[(x+3)\operatorname{sen} y + y\cos y] + e^x\operatorname{sen} y + g'(x) = e^x[(x+4)\operatorname{sen} y + y\cos y] + g'(x)$

y la condición implica $g'(x) = 0$, i.e., $g = cte$.

Por lo tanto, la funcion $v(x,y) = e^x[(x+3)\operatorname{sen} y + y\cos y] + cte$, es tal que $f = u+iv$ es holomorfa. **(puntaje: 1.0)**

(ii) **$u(x,y) = x^3 - y^3 + 2xy$**. La función u es de clase $C^1(IR^2)$ (es un polinomio). La función v debe ser tal que u y v cumplan las C.C-R.

$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 + 2y$. Integrando c/r a y resulta $v(x,y) = 3x^2y + y^2 + g(x)$.

(puntaje: 0.5)

Además, para la otra condición $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ resulta

$\frac{\partial u}{\partial y} = -3y^2 + 2x$; $\frac{\partial v}{\partial x} = 6xy + g'(x)$ implicando $g'(x) = 3y^2 - 2x - 6xy$, lo cual es imposible,

concluyendo que no existe v tal que $f = u+iv$ sea holomorfa. **(puntaje: 0.5)**

Pauta P3 Control2 MA2002 Otoño-2010

P3. (a) Calcule, usando residuos $I = \int_\gamma \frac{sen(z)}{z^2(z-5)^2(z+2i)^2}dz$, donde γ : IzI = 4.

(b) Sea f : C $\to$ C función holomorfa. Suponga que f es acotada, i.e., existe M>0, tal que If(z)I$\leq$ M, para todo z en C. Demuestre que f es constante.
Indicación: Calcule $f'(z_0)$ usando formula de Cauchy y muestre que If'z_0)I$\leq$ K/R, Para un cierto K, y tome limite R$\to\infty$.

Solución

(a) Por el T. de residuos: I = $2\pi i\Sigma$ Res(z_k), para todos los polos z_k de f encerrados por γ.
Claramente**,** f tiene singularidades en $z_1 = 0$, $z_2 = -2i$, y $z_3 = 5$. Como γ : IzI = 4, no encierra a z_3, se consideran solamente, z_1 y z_2 para el calculo de la integral. **(0.5)**

Caso z_1=0. Se determina si es un polo y su orden. (limites se toman para $z\to 0$)

$$\lim f(z) = (L'H)\ \lim \frac{\cos(z)}{2z(z-5)^2(z+2i)^2) + z^2[(z-5)^2(z+2i)^2]'} = \frac{1}{0},$$ z_1=0, no es reparable. **(0.5)**

$$\lim z\, f(z) = (L'H)\ \lim \frac{sen(z)}{z(z-5)^2(z+2i)^2} = \frac{1}{25(2i)^2} = -\frac{1}{100},$$ z_1=0 es polo de orden 1. **(0.5)**

Caso z_2= -2i. Como sen(2i) $\neq 0$ (ya que 2i$\neq k\pi$, k entero), f(z) = $\frac{g(z)}{(z+2i)^2}$, donde

$g(z) = \frac{sen(z)}{z^2(z-5)^2}$ es holomorfa en z_2= -2i y, por lo tanto, z_2= -2i es un polo de f de orden 2. **(0.5)**

Por propiedad, el caso z_1=0 implica que Res(z_1) = -1/100, **(0.2)**
El caso z_2 = -2i implica

Res(z_2) = $\lim \frac{d}{dz}[(z+2i)^2 f(z)] = \lim \frac{d}{dz}\left(\frac{sen(z)}{z^2(z-5)^2}\right) =$

$$\lim_{-2i} \frac{\cos(z)[(z(z-5)]^2 - sen(z)[2z(z-5)(2z-5)]}{[z(z-5)]^4} =$$

$$\lim_{-2i} \frac{\cos(z)[(z(z-5)] - 2sen(z)(2z-5)}{[z(z-5)]^3} = \frac{\cos(-2i)(-4+10i) - sen(-2i)(-5-4i)}{(-4+10i)^3}$$ = a + ib **(1.3)**

Los resultados anteriores implican que I = $2\pi i$[(-1/100)+a+ib] = 2π b + $i2\pi$ [(-1/100)+a].

(b) La hipótesis de f y la formula de la integral de Cauchy (para derivadas) implican

$$f'(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}dz,$$ para z_0 en C y γ : Iz-z_0I = R. **(0.2)**

Tomando modulo a la igualdad y aplicando la propiedad: $\left|\int g\right| \leq \int |g|$, resulta

$$|f'(z_0)| \leq \frac{1}{2\pi}\int_\gamma \left|\frac{f(z)}{(z-z_0)^2}\right||dz| = \frac{1}{2\pi}\int_\gamma \frac{|f(z)|}{|(z-z_0)|^2}|dz| \leq \frac{1}{2\pi}\int_\gamma \frac{A}{R^2}|dz| = \frac{1}{2\pi}\frac{A}{R^2}\int_\gamma |dz| \quad \textbf{(1.4)}$$

donde A = sup { I f(z) I : z en γ } (este supremo se alcanza en γ porque IfI es continua y γ es compacto) **(0.2).** Además, la ultima integral corresponde al largo de γ (2π R), resulta $|f'(z_0)| \leq \frac{A}{R}$,

para todo z_0 en C y todo R > 0 **(0.5),** y $|f'(z_0)| = 0$ si R$\to\infty$, i.e., $f'(z_0) = 0$, para todo z_0 en C y por lo tanto, f es constante **(0.2).**