MA2002 Cálculo Avanzado y Aplicaciones Semestre Prim. 2016. **Sección 2**

Profesores: Raúl Gormaz (Cátedra), Hugo Carrillo (Auxiliar) y Pablo Cabargas (Auxiliar)

Control 2

P1. Consideremos un medio continuo en $\mathbb{R}^3$ caracterizado por un campo de velocidades $\vec{u} = \vec{u}(x,t)$. Sea $\theta = \theta(x,t)$ una cantidad física $\theta : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que satisface la ecuación

c/r a x = 0

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \theta = f(t)\vec{u}$$

donde $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ es una función que se conoce.

a) Si $x(t)$ corresponde la trayectoria de una partícula material del medio continuo, demuestre que $\theta(x(t_2), t_2) = \theta(x(t_1), t_1) + \int_{t_1}^{t_2} f(t)\, \vec{u}(x(t), t)\, dt$

b) Suponiendo $\vec{u} = \hat{e}_3$, vector constante, $\theta(x, 0) = e^{-\|x\|^2}$ y $f(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 - \cos(t) \end{pmatrix}$, encuentre $\theta(x, 2\pi)$.

$$f(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1-\cos(t) \end{pmatrix}$$

P2. a) En $L^2[-1,1]$ muestre que

$$\{1\} \cup \{\cos(n\pi x), n = 1,2,3,\ldots\} \cup \{\sin(n\pi x), n = 1,2,3,\ldots\}$$

es una familia ortogonal. Calcule la norma de cada una de estas funciones.

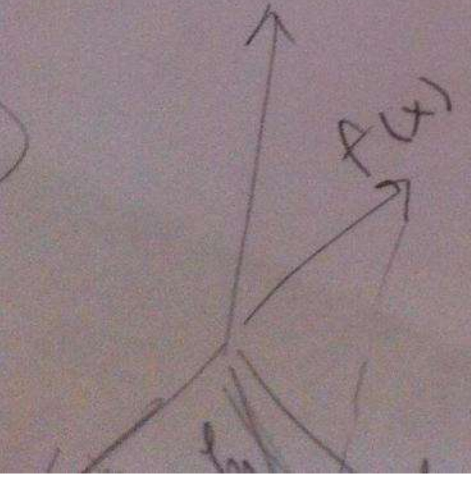
b) Deduzca, usando las relaciones de ortogonalidad (es decir $f - f_N \perp V_N$, donde F_N es la suma parcial de Fourier y V_N es es subespacio generado por estas primeras funciones de la familia ortogonal), las expresiones para los coeficientes de Fourier de $f \in L^2[-1,1]$ escrito como combinacion lineal (serie) de funciones de esta familia ortogonal.

c) Muestre que para $f(x) = 1 + |x|$, $x \in [-1,1]$, su serie de Fourier esta dada por

$$f(x) = \frac{3}{2} - \frac{4}{\pi^2}\left\{\frac{\cos(\pi x)}{1^2} + \frac{\cos(3\pi x)}{3^2} + \frac{\cos(5\pi x)}{5^2} + \cdots\right\}$$

d) Pruebe que $\frac{\pi^4}{96} = 1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \cdots$, aplicando la Identidad de Parseval.

$$\|f\|^2_{L_2} = \sum_n |c_n|^2$$



$$\frac{\langle f(x), \varphi_n \rangle}{\langle \varphi_n, \varphi_n \rangle}$$

| deriv. 2 veces.

P3. Considere la siguiente ecuación del calor para $u = u(x,t)$:

$$(\mathcal{P}) \begin{cases} u_t = u_{xx} + \sin(x) & 0 < x < \pi,\ t > 0 \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 & t > 0 \\ u(x,0) = 0 & 0 < x < \pi \end{cases}$$

a) Demuestre que si existe una solución, entonces ésta es única.

El objetivo de las siguientes partes es encontrar u la solución del problema. Para ello, proceda como sigue:

b) Encuentre $w(x)$, de modo que u se pueda escribir como $u(x,t) = v(x,t) + w(x)$, donde $v(x,t)$ satisface

$$(\mathcal{P}') \begin{cases} v_t = v_{xx} & 0 < x < \pi,\ t > 0 \\ v(0,t) = v(\pi,t) = 0 & t > 0 \\ v(x,0) = f(x) & 0 < x < \pi \end{cases}$$

para alguna función $f(x)$ adecuada. Notese que para obtener $w(x)$ debe descubrir cual es la ecuación y las condiciones de borde que satisface.

c) Resuelva $(\mathcal{P}')$ mediante el método de separación de variables. Concluya cual es la solución del problema original $\mathcal{P}$.

Tiempo: 3 horas

P1 (a)

Definición de derivada material

$$\frac{D\theta}{Dt} = \frac{d}{dt}\left(\theta(x(t),t)\right)$$

1 pto Reconocer derivada material

$$= \frac{\partial \theta}{\partial t} + \underbrace{\dot{x}(t)}_{\vec{u}} \cdot \nabla \theta$$

Luego, la ecuación dada corresponde a

$$\frac{d}{dt}\left(\theta(x(t),t)\right) = \vec{f}(t) \cdot \vec{u}(x(t),t)$$

1 pto Reescribir la ec.

integrando entre t_1 y t_2

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}(\theta)\, dt = \int_{t_1}^{t_2} \vec{f}(t) \cdot \vec{u}(x(t),t)\, dt$$

$$\theta(x(t),t)\Big|_{t_1}^{t_2} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{f}(t) \cdot \vec{u}\, dt$$

1 pto Integrar la derivada material

que es lo solicitado

P1 (b)

de (a)

$$\theta(x(t),t) = \theta(x(0),0) + \int_0^t f(t)\,\vec{u}(x(t),t)\,dt$$

$$\theta(x(t),t) = \theta(x(0),0) + \int_0^t (1-\cos(t))\cdot 1\,dt$$

$$= e^{-\|x(0)\|^2} + \frac{t^2}{2} - \operatorname{sen}(t)$$

1pto usar (a) y escribir en términos de x(t)

Solo falta obtener $x(0)$ a partir de $x(t) = x$

Como $u = \hat{e}_3$ cte, las trayectorias cumplen

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad x(0) = \begin{pmatrix} \cancel{x_0}(0) \\ \cancel{y_0}(0) \\ \cancel{z_0}(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1(0) \\ X_2(0) \\ X_3(0) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow x(t) = \begin{pmatrix} \cancel{x_0}(0) \\ \cancel{y_0}(0) \\ \cancel{z_0}(0)+t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1(0) \\ X_2(0) \\ X_3(0)+t \end{pmatrix}$$

1pto trayectoria

con $\cancel{x_0 = x}$, $\cancel{y_0 =}$

$$X_1(0) = X_1$$
$$X_2(0) = X_2$$
$$X_3(0) + t = X_3$$

$$\boxed{\theta(x,t) = e^{-x_1^2 - x_2^2 - (x_3-t)^2} + \frac{t^2}{2} - \operatorname{sen}(t)}$$

1pto resultado final

$(x = (x_1, x_2, x_3)$

P2 (a) ortogonalidad

0.3 ptos por cada ortogonalidad, hasta completar 0.9 ptos

$$(\cos n\pi x, \cos m\pi x) = \int_{-1}^{1} \cos(n\pi x)\cos(m\pi x)\,dx$$

$$(*) \quad = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\left[\cos((n-m)\pi x) + \cos((n+m)\pi x)\right]dx$$

$$= \frac{1}{2}\left\{ \frac{\operatorname{sen}(n-m)\pi x}{(n-m)\pi}\Big|_{-1}^{1} + \frac{\operatorname{sen}(n+m)\pi x}{(n+m)\pi}\Big|_{-1}^{1} \right\}$$

$$= 0$$

$$(\operatorname{sen}(n\pi x), \operatorname{sen}(m\pi x)) = \int_{-1}^{1} \operatorname{sen}(n\pi x)\operatorname{sen}(m\pi x)\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(\cos(n+m)\pi x - \cos(n-m)\pi x)\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\cos(n+m)\pi x\,dx - \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\operatorname{sen}(n-m)\pi x\,dx$$

$$= 0 - 0 \text{ por } (*)$$

$$(\operatorname{sen}(n\pi x), \cos(m\pi x)) = \int_{-1}^{1} \underbrace{\operatorname{sen}(n\pi x)\cos(m\pi x)}_{\text{impar}}\,dx = 0$$

P2 (a) (sigue)

$$(\cos n\pi x,\ 1) = \int_{-1}^{1} \cos(n\pi x)\,dx = \left.\frac{\cancel{\sin n\pi x}^{\,0}}{n\pi}\right|_{-1}^{1} = 0$$

$$(\sin(n\pi x),\ 1) = \int_{-1}^{1} \underbrace{\sin(n\pi x)}_{\text{impar}}\,dx = 0$$

Y las normas

$$\|1\|^2 = \int_{-1}^{1} 1^2\,dx = 2 \quad \left(\text{puede ser útil } \left\|\tfrac{1}{2}\right\|^2 = \tfrac{1}{2}\right)$$

0.2 pts

$$\|\cos(n\pi x)\|^2 = \int_{-1}^{1} \cos^2(n\pi x)\,dx$$

0.2 pts

$$= \int_{-1}^{1} \frac{1+\cos(2n\pi x)}{2}\,dx = 1 + \left.\frac{\cancel{\sin(2n\pi x)}^{\,0}}{2\cdot 2n\pi}\right|_{-1}^{1}$$

$$= 1$$

$$\|\sin(n\pi x)\|^2 = \int_{-1}^{1} \sin^2(n\pi x)\,dx$$

0.2 pts

$$= \int_{-1}^{1} \frac{1-\cos(2n\pi x)}{2}\,dx = 1 - 0$$

$$= 1$$

P2 (b)

$$f_N = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} a_n \cos(n\pi x) + b_n \operatorname{sen}(n\pi x)$$

así que

$$0 = (f - f_N, 1) = (f, 1) - (f_N, 1)$$
$$= (f, 1) - \left(\frac{a_0}{2}, 1\right) - \sum (a_n \cos n\pi x, 1) - \sum (b_n \operatorname{sen} n\pi x, 1)$$

0 pues 1 ortogonal a $\cos n\pi x$, $\operatorname{sen} n\pi x$

$$a_0 \left(\frac{1}{2}, 1\right) = (f, 1)$$

$$a_0 \cdot 1 = (f, 1)$$

$$a_0 = \int_{-1}^{1} f(x)\, dx$$

1 pto por reconocer que se debe usar $f - f_N \perp \varphi_n$ para $\varphi_n = 1, \cos(n\pi x)$ o $\operatorname{sen}(n\pi x)$

además

$$0 = (f - f_N, \cos(m\pi x)) = (f, \cos(m\pi x)) - (f_N, \cos(m\pi x))$$

$$0 = (f, \cos(m\pi x)) - (a_m \cos(m\pi x), \cos(m\pi x))$$

(todos los otros productos son cero

P2 (b) sigue,

$$\Rightarrow a_m = \frac{(f, \cos(m\pi x))}{\|\cos(m\pi x)\|^2}$$

$$= \int_{-1}^{1} f(x)\cos(m\pi x)\,dx$$

Para b_n es análogo

$$b_m = \frac{(f, \operatorname{sen}(m\pi x))}{\|\operatorname{sen}(m\pi x)\|^2}$$

$$= \int_{-1}^{1} f(x)\operatorname{sen}(m\pi x)\,dx$$

0.5 pto por obtener las fórmulas de los a_m, b_m

P2. (c) notando la serie de Fourier

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_1 a_n \cos(n\pi x) + b_n \operatorname{sen}(n\pi x)$$

resulta $$a_n = \frac{1}{\ell}\int_{-1}^{1} f(x)\cos(n\pi x)\,dx$$

$$b_n = \frac{1}{\ell}\int_{-1}^{1} f(x)\operatorname{sen}(n\pi x)\,dx$$

como f es par $\underline{b_n = 0}$ 0.5 ptos

y $\boxed{n \geq 1}$

$$a_n = 2\int_0^1 (1+x)\cos(n\pi x)\,dx \qquad \begin{matrix}(f \text{ es par.})\\(\ell = 1)\end{matrix}$$

$$= 2\int_0^1 \cos(n\pi x)\,dx + 2\int_0^1 x\cos(n\pi x)\,dx$$

$$= 2\,\cancel{\frac{\operatorname{sen}(n\pi x)}{n\pi}}^{\,0}\Big|_0^1 + 2\left\{ \cancel{\frac{x\operatorname{sen}(n\pi x)}{n\pi}}^{\,0}\Big|_0^1 - \frac{1}{n\pi}\int_0^1 \operatorname{sen}(n\pi x)\,dx \right\}$$

$$= \frac{2}{(n\pi)^2}\cos(n\pi x)\Big|_0^1 = \frac{2}{n^2\pi^2}(\cos(n\pi)-1)$$

$$= \frac{2}{n^2\pi^2}\left((-1)^n - 1\right) = \begin{cases} 0 & n \text{ par} \\ -\dfrac{4}{n^2\pi^2} & n \text{ impar} \end{cases}$$

0.5 ptos

$\boxed{n=0}$ $a_0 = 2\int_0^1 (1+x)dx = 3$ 0.2 pts

La serie es

$$f(x) = \frac{3}{2} - \frac{4}{\pi^2}\sum \frac{\cos((2n-1)\pi x)}{(2n-1)^2}$$

o también

$$= \frac{3}{2} - \frac{4}{\pi^2}\sum_{n \text{ impar}} \frac{\cos(n\pi x)}{n^2}$$ 0.3 pts

P2 (d) Para usar Parseval, calculo

$$\|f\|_{L^2}^2 = 2\int_0^1 (1+x)^2 dx = \frac{2(1+x)^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{14}{3}$$ 0.5 pts

$$= a_0^2 \left\|\tfrac{1}{2}\right\|^2 + \sum a_n^2 \|\cos n\pi x\|^2 + \cancel{b_n^2}^{\,0} \|\operatorname{sen}(n\pi x)\|^2$$

de parte (b) $\left\|\frac{1}{2}\right\|^2 = \frac{1}{2}$ $\|\cos(n\pi x)\|^2 = 1$ 0.5 pts

$$\frac{14}{3} = \frac{3^2}{2} + \sum_{n \text{ impar}} \left(\frac{4}{\pi^2}\cdot\frac{1}{n^2}\right)^2$$

despejar 0.5 pts

$$\Rightarrow \frac{1}{6} = \frac{1}{\pi^2}\cdot 16 \cdot \sum_{n \text{ impar}} \frac{1}{n^2} \Rightarrow \boxed{\frac{\pi^2}{96} = \sum_{n \text{ impar}} \frac{1}{n^2}}$$

P3 (a) Considera 2 soluciones

u_1 y u_2. Para probar $u_1 = u_2$

se probará que $v = u_1 - u_2$ es nula.

1) Que ecuación cumple v (restando lo que cumple u_1 y u_2)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} & EQ \\ v(0\,t) = 0 & CB_0 \\ v(\pi\,t) = 0 & CB_\pi \\ v(x,0) = 0 & CI \end{cases}$$

ec. para $v = u_1 - u_2$ 0.3 ptn

2 Estrategia, multiplicar EQ por v e integrar en $[0\ \pi]$ ← 0.2 ptn

$$\underbrace{\int_0^\pi v \frac{\partial v}{\partial t}\, dx}_{I} = \underbrace{\int_0^\pi v \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\, dx}_{II}$$

$$I = \frac{1}{2}\int_0^\pi \frac{\partial}{\partial t} v^2\, dx = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^\pi v^2(x,t)\, dx$$

0,5 ptn cálculo I

Sea $E(t) = \int_0^\pi v^2(x,t)\, dx$, así $I = \frac{1}{2}E'(t)$

P3(a) sigue

$$\text{II} = \int_0^\pi \left\{ \frac{\partial}{\partial x}\left(v \frac{\partial v}{\partial x} \right) - \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} \right\} dx$$

0.5 ptos cálculo II

$$= \cancel{\int_0^\pi} \; v(x,t)\frac{\partial v}{\partial x}(x,t)\Big|_0^\pi - \int_0^\pi \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 dx$$

$\to 0$ por CB

Se llega a

$$\frac{1}{2} E'(t) = - \int_0^\pi \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 dx \qquad (*)$$

3 Qué cumple $E(t)$

3.1 $\quad E(t) = \int_0^\pi v^2\, dx \geq 0$

3.2 $\quad E'(t) \leq 0$, debido (por $(*)$)

3.3 $\quad E(0) = \int_0^\pi [v(x,0)]^2 dx$

$\qquad = 0$ por CI

0.5 ptos conclusión

Conclusión

$$E(t) \equiv 0$$

y luego $v(x,t) \equiv 0$

P3 (b) Ver que cumple $w(x)$

Como $w(x) = u(x,t) - v(x,t)$

restando las condiciones

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = \operatorname{sen} x \\ v_t - v_{xx} = 0 \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{aligned} w''(x) &= \operatorname{sen}(x) \\ w(0) &= w(\pi) = 0 \end{aligned}}$$

1pto ec. para w

y la C.I. queda dependiendo de f

pero $w''(x) = \cancel{0}\,\operatorname{sen}(x)$

$$\Rightarrow w(x) = -\operatorname{sen}(x) + ax + b$$

Pero $w(0) = 0 \Rightarrow b = 0$ 0.5pt $a=b=0$

$w(\pi) = 0 \Rightarrow a\cdot\pi = 0 \Rightarrow a = 0$

$w(x) = -\operatorname{sen}(x)$

0.5 conclusión

P3 (c)

falta solo CI para v.

$$v(x,0) = u(x,0) - w(x)$$
$$= -w(x) = \operatorname{sen}(x)$$

Separación de variables para v

Se buscan soluciones $v(x,t) = X(x)T(t)$ de EC + CB, no nulas

$$XT' = X''T \Rightarrow \frac{T'}{T} = \frac{X''}{X} = \lambda$$ 0.5

λ = cte (para que una función de t sea igual a una función de x)

$$T' = \lambda T \Rightarrow T(t) = C \cdot e^{\lambda t}$$ 0.3

como al final se considera una combinación lineal de las funciones encontradas, esta constante C no es necesaria

basta con decir $T(t) = e^{\lambda t}$.

P3(c) sigue

$X'' = \lambda X$

dará soluciones exponenciales ($\lambda > 0$)

afines ($ax+b$) ($\lambda = 0$)

trigonométricas ($\lambda < 0$)

Las exponenciales ($\lambda>0$) o las afines ($\lambda=0$) solo admiten una solución nula que cumple C.B.

$\underline{\lambda>0)}$ $X(x) = Ae^{\sqrt{\lambda}x} + Be^{-\sqrt{\lambda}x}$

0.3 $X(0) = 0 \Rightarrow A + B = 0;\ B = -A$

$X(\pi) = 0 \Rightarrow A e^{\sqrt{\lambda}\pi} - A e^{-\sqrt{\lambda}\pi} = 0$

$\Rightarrow \operatorname{senh}(\sqrt{\lambda}\,\pi) = 0 \Rightarrow \lambda = 0$

(o despejando $e^{\sqrt{\lambda}\pi} = e^{-\sqrt{\lambda}\pi}$

$\Rightarrow e^{2\sqrt{\lambda}\pi} = 0 \Rightarrow \underline{\underline{\lambda=0}}$

$\underline{\lambda = 0)}$

0.3 $X(0) = a\cdot 0 + b \Rightarrow b = 0$

$X(\pi) = a\cdot\pi + 0 \Rightarrow a = 0$

P3(c) (final)

$(\lambda < 0)$ $X(x) = A \cos(\beta x) + B \operatorname{sen} \beta x$

0.3

$\beta = \sqrt{-\lambda}$

$0 = X(0) = A + B \cdot 0 \Rightarrow A = 0$

$0 = X(\pi) = B \operatorname{sen}(\beta\pi) \Rightarrow \beta = 1, 2, 3, \ldots$

$\sqrt{-\lambda_n} = n \in \mathbb{N}$

$-\lambda_n = n^2$.

Soluciones $v_n(x,t) = X_n(x) T_n(t)$
$= \operatorname{sen}(nx) e^{-n^2 t}$

~~Solo falta la c.I.~~

~~$v(x,0)$~~ así $v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}(nx) e^{-n^2 t}$

y para la CI, tomar $t=0$

$v(x,0) = \operatorname{sen}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}(nx) \cdot 1$

basta tomar $b_1 = 1$ y $b_k = 0$, $k \geq 2$

así $u(x,t) = \operatorname{sen} x \, e^{-t} + (-\operatorname{sen} x) = \operatorname{sen}(x)(e^{-t} - 1)$ //

encontrar $u(x,t)$ (0.3)