

Control 2 MA26B Matemáticas Aplicadas

Semestre 2004-2

7 de octubre de 2004

Profesores: I. Guerra, P. Guiraud, J. Dávila

Problema 1. a) (3 pts) Estudie en qué puntos del plano complejo son derivables las siguientes funciones:

$$i) f(z) = e^x(\cos y - i \operatorname{sen} y), \quad ii) f(z) = (z - i)\bar{z}, \quad z = x + iy$$

y calcule sus derivadas donde éstas existan.

b) (3 pts) Sea $a \in \mathbb{R}$. Encuentre el radio de convergencia R de la serie de potencias $\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ donde $c_k = a + 1$ si k es par y $c_k = 1$ si k es impar. Compruebe que

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k = \frac{a+1+z}{1-z^2} \quad \forall |z| < R.$$

Indicación. Recuerde la serie geométrica $\sum_{k=0}^{\infty} \rho^k = \frac{1}{1-\rho}$ si $|\rho| < 1$, $\rho \in \mathbb{C}$.

Problema 2. (2 pts c/u) Calcule

$$a) \oint_{|z|=2} \frac{e^{\pi z}}{z^3 + z} dz, \quad b) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)(x^2 + a^2)} \quad a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad c) \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(5 + 3 \cos \theta)^2}.$$

Problema 3. a) Sea f una función meromorfa en \mathbb{C} con un número finito de polos tal que

$$|f(z)| \leq \frac{K}{|z|^p} \quad \forall |z| \geq M$$

donde $p > 1$ y $M, K > 0$ son constantes. Denotemos por z_1, \dots, z_m los polos de f . Supongamos además que $z_j \notin \{k/2 \mid k \in \mathbb{Z}\}$ para todo $j = 1, \dots, m$ y que $f(k) \neq 0 \forall k \in \mathbb{Z}$. El objetivo es probar que bajo estas hipótesis se cumple

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k) = - \sum_{j=1}^m \operatorname{Res}(\pi f(z) \cotg(\pi z), z_j). \quad (1)$$

i) (1.5 pts) Muestre que z_j es un polo de $\pi f(z) \cotg(\pi z)$ y que todo entero $k \in \mathbb{Z}$ es un polo simple de $\pi f(z) \cotg(\pi z)$.

ii) (1.5 pts) Para $N \in \mathbb{N}$ sea γ_N es el camino correspondiente al borde del cuadrado de vértices:

$$(N + \frac{1}{2})(-1 - i), (N + \frac{1}{2})(1 - i), (N + \frac{1}{2})(1 + i), (N + \frac{1}{2})(-1 + i).$$

Demuestre que si N es suficientemente grande entonces

$$\left| \oint_{\gamma_N} \pi f(z) \cotg(\pi z) dz \right| \leq \frac{\pi AK(8N + 4)}{N^p}$$

donde A es una constante independiente de N tal que $|\cotg(\pi z)| \leq A, \forall z \in \gamma_N$. (Puede usar esta última afirmación sin necesidad de probarla.)

iii) (1.5 pts) Deduzca la fórmula (1).

b) (1.5 pts) Pruebe que para $a > 0$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{k^2 + a^2} = \frac{\pi}{a} \coth(\pi a).$$

TIEMPO: 3 HORAS.

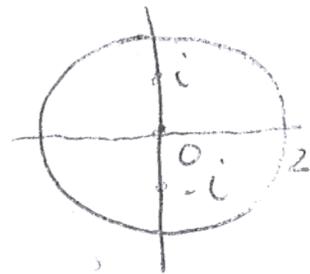
P2 - Control 2 Matemáticas

$$\int_{|z|=2} \frac{e^{\pi z}}{z(z^2+1)} dz$$

i) Raíces de $z(z^2+1) = z(z+i)(z-i)$

0.5 $P_1 = 0 \quad P_2 = i \quad P_3 = -i$

3 Polos simples



Los Residuos

1.0 $\text{Res}(f, 0) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^{\pi z}}{(z^2+1)} = 1$

$$\text{Res}(f, i) = \lim_{z \rightarrow i} \frac{e^{\pi z}}{z(z+i)} = \frac{(-1)}{i \cdot 2i} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Res}(f, -i) = \lim_{z \rightarrow -i} \frac{e^{-\pi i}}{z(z-i)} = \frac{(-1)}{-i(-2i)} = \frac{1}{2}$$

0.5 $\int_{|z|=2} \frac{e^{\pi z}}{z(z^2+1)} dz = 2\pi i \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right)$
 $= 2\pi i \frac{5}{2} = 5\pi i$

$$ii) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+1)} \cdot \frac{1}{(x^2+a^2)} dx \quad a^2 \neq 1$$

raíces
polos de $P(z) = (z^2+1)(z^2+a^2)$
 $= (z+i)(z-i)(z-ai)(z+ai)$

4 polos simples

0.5
Res $P_1 = i \quad P_2 = -i \quad P_3 = ai \quad P_4 = -ai$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+1)(x^2+a^2)} dx = 2\pi i \left[\text{Res}\left(\frac{1}{P}, i\right) + \text{Res}\left(\frac{1}{P}, ai\right) \right]$$

1.0 $\text{Res}\left(\frac{1}{P}, i\right) = \lim_{z \rightarrow i} \frac{1}{(z+i)(z^2+a^2)} = \frac{1}{2i(-1+a^2)}$

$\text{Res}\left(\frac{1}{P}, ai\right) = \lim_{z \rightarrow ai} \frac{1}{(z^2+1)(z+ai)} = \frac{1}{2ai(1-a^2)}$

0.5 $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+1)(x^2+a^2)} dx = 2\pi i \left(\frac{1}{2i(-1+a^2)} + \frac{1}{2ia(1-a^2)} \right)$

$$= \pi \left(\frac{1}{(a^2-1)} + \frac{1}{a(a^2-1)} \right)$$

$$= \frac{\pi(a-1)}{a(a^2-1)} = \frac{\pi}{1+a} \quad a > 1$$

Decir
Chequear que

$$\left| \frac{1}{P(z)} \right| \leq \frac{M}{|z|^p} \quad p > 1$$

para algún M y $|z| > K$ ~~en~~ $\text{Im}(z) \geq 0$

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(5+3\cos\theta)^2} d\theta$$

1) Cambio de variables $z = e^{i\theta}$

$$\cos\theta = \frac{z+z^{-1}}{2}$$

$$dz = \frac{e^{i\theta}}{z} i d\theta$$

0.5

$$|z|=1 \quad \frac{1}{\left(5+3\frac{(z+z^{-1})}{2}\right)^2} \frac{dz}{zi}$$

$$= \int_{|z|=1} \frac{-4iz}{(10z+3z^2+3)^2} dz =$$

$|z|=1$

Roots de $p(z) = 3z^2 + 10z + 3$

$$z = \frac{-10 \pm \sqrt{100 - 4 \cdot 3 \cdot 3}}{2 \cdot 3}$$

$$z_1 = -\frac{1}{3}$$

$$z_2 = -3$$

0.5

$$= 4i \int_{|z|=1} \frac{z}{3^2 \left(z + \frac{1}{3}\right)^2 (z+3)^2} dz$$

$$= -\frac{4i}{3^2} \int_{|z|=1} \frac{z}{\left(z + \frac{1}{3}\right)^2 (z+3)^2} dz$$

$z_1 =$ polo al interior de $|z|=1$ (de orden 2)

$$\int_{|z|=1} \frac{z}{\left(z + \frac{1}{3}\right)^2 (z+3)^2} dz = 2\pi i \operatorname{Res} \left(\frac{z}{\left(z + \frac{1}{3}\right)^2 (z+3)^2}, z_1 \right)$$

$$\begin{aligned}
 & \text{Res} \left(\frac{z}{(z+3)^2 (z+\frac{1}{3})^2}, -\frac{1}{3} \right) \\
 &= \lim_{z \rightarrow -\frac{1}{3}} \frac{d}{dz} \left(\frac{z}{(z+3)^2} \right) = \lim_{z \rightarrow -\frac{1}{3}} \frac{(z+3)^2 - 2(z+3)z}{(z+3)^4} \\
 &= \lim_{z \rightarrow -\frac{1}{3}} \frac{z+3-2z}{(z+3)^3} = \frac{-(-\frac{1}{3})+3}{(-\frac{1}{3}+3)^3} = \frac{\frac{10}{3}}{\frac{8^3}{3^3}} = \frac{10}{8^3} 3^2
 \end{aligned}$$

$$\int_{|z|=1} \frac{z}{(z+1)^2} dz$$

$$\begin{aligned}
 & \int_0^{2\pi} \frac{1}{(5+3\cos\theta)^2} d\theta = -\frac{4i}{3^2} \int_{|z|=1} \frac{z}{(z+\frac{1}{3})^2 (z+3)^2} dz \\
 &= -\frac{4i}{3^2} \cdot 2\pi i \cdot \frac{10}{8^3} 3^2 = \frac{\pi \cdot 10}{8^2} = \frac{5\pi}{32}
 \end{aligned}$$

P3. Control 2.

i) Supongamos que z_j es un polo de orden m de f

$$\lim_{z \rightarrow z_j} (z - z_j)^m \pi f(z) \operatorname{ctg}(\pi z) = \lim_{z \rightarrow z_j} \pi \operatorname{ctg}(\pi z) \lim_{z \rightarrow z_j} (z - z_j)^m f(z)$$

Como z_j es un polo de orden m de f , por definición

$$\lim_{z \rightarrow z_j} (z - z_j)^m f(z) \text{ existe y no es nula.}$$

Ademas como $z_j \notin \{ \frac{k}{2} / k \in \mathbb{Z} \}$, $\lim_{z \rightarrow z_j} \pi \operatorname{ctg}(\pi z)$ existe

y no es nula.

Estos dos resultados prueban z_j es un polo de $\pi f(z) \operatorname{ctg}(\pi z)$

$$\lim_{z \rightarrow k} (z - k) \pi f(z) \operatorname{ctg}(\pi z) = \lim_{z \rightarrow k} f(z) \lim_{z \rightarrow k} (z - k) \pi \operatorname{ctg}(\pi z).$$

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow k} (z - k) \pi \operatorname{ctg} \pi z &= \lim_{z \rightarrow k} (z - k) \frac{\pi \cos \pi z}{\sin \pi z} \\ &= \pi \cos \pi k \lim_{z \rightarrow k} \frac{1}{\pi \cos \pi z} \quad (\text{h\u00f3pital}) \\ &= 1 \end{aligned}$$

$\lim_{z \rightarrow k} f(z) = f(k)$; pues k no es un polo de f y f es meromorfa

Asi Teniendo $\lim_{z \rightarrow k} (z - k) \pi f(z) \operatorname{ctg}(\pi z) = f(k)$ con $f(k) \neq 0$ por hip\u00f3tesis

0,75

0,75

ii/ Tomamos que

$$\left| \oint_{\gamma_N} \pi f(z) \cot(\pi z) dz \right| \leq \sup_{z \in \gamma_N} |\pi f(z) \cot(\pi z)| L(\gamma_N) \quad) 0.5$$
$$\leq \pi \sup_{z \in \gamma_N} |f(z)| \sup_{z \in \gamma_N} |\cot(\pi z)| L(\gamma_N)$$

donde $L(\gamma_N)$ es la longitud de γ_N , ie $L(\gamma_N) = \mathcal{P}(N + \frac{1}{2}) = 8N + 4$) 0.5

• Si N es suficientemente grande entonces $\forall z \in \gamma_N$ tenemos $|z| > N$

y $|f(z)| \leq \frac{K}{|z|^p}$. Pero en γ_N tenemos $|z| > N$ y por lo tanto

$$|f(z)| \leq \frac{K}{N^p} \quad) 0.5$$

• De un otro lado sabemos que $|\cot(\pi z)| \leq A$, $\forall z \in \gamma_N$

Todo eso hace que:

$$\left| \oint_{\gamma_N} \pi f(z) \cot(\pi z) dz \right| \leq \pi \frac{AK}{N^p} (8N + 4).$$

iii/ Supongamos N suficientemente grande de modo tal que todos los \leftarrow
polos de f sean encerrados por γ_N . El teorema de los residuos
nos da que:

0,75

$$\int_{\gamma_N} \pi f(z) \cotg(\pi z) dz = 2\pi i \left(\sum_{k=-N}^N \text{Res}(\pi f(z) \cotg(\pi z), k) + \sum_{j=1}^m \text{Res}(\pi f(z) \cotg(\pi z), z_j) \right)$$

De hecho, respecto con la pregunta a), $k \in \mathbb{Z}$ es un polo de $\pi f(z) \cotg(\pi z)$ y $\{z_j\}_{1 \leq j \leq m}$ tambien. Ademas $\pi f(z) \cotg(\pi z)$ no tiene otro polo.

+0,25 para los explicaciones

De un otro lado, respecto la pregunta ii), cuando N tiende al infinito tenemos

0,75

$$0 = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \text{Res}(\pi f(z) \cotg(\pi z), k) + \sum_{j=1}^m \text{Res}(\pi f(z) \cotg(\pi z), z_j)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(k) + \sum_{j=1}^m \text{Res}(\pi f(z) \cotg(\pi z), z_j)$$

Pues vemos en i) que $\lim_{z \rightarrow k} (z-k) \pi f(z) \cotg(\pi z) = f(k)$

Asi tenemos (1).

b/

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{k^2 + \alpha^2} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(k) \quad \text{con} \quad f(z) = \frac{1}{z^2 + \alpha^2} \quad \text{libre}$$

(0 \leftrightarrow 0,5)

g \neq ca son 'polos' de orden 1 de $-f$ y f satisface las hipótesis de a/. Podemos utilizar el resultado (1)

$$\begin{aligned} \text{Res}(\pi f(z) \cot(\pi z), ai) &= \lim_{z \rightarrow ai} (z - ai) \pi \frac{\cot(\pi z)}{(z - ai)(z + ia)} \\ &= \frac{\pi}{2ia} \cot(\pi a) \end{aligned} \quad \begin{array}{l} \text{libre} \\ (0.5) \leftrightarrow (0,75) \end{array}$$

$$\begin{aligned} \text{Res}(\pi f(z) \cot(\pi z), -ia) &= \lim_{z \rightarrow -ia} (z + ia) \pi \frac{\cot(\pi z)}{(z - ia)(z + ia)} \\ &= -\frac{\pi}{2ia} \cot(\pi a) \\ &= \frac{\pi}{2ia} \cot(\pi a) \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{libre} \\ (0.5) \leftrightarrow (0,75) \end{array}$$

Con la fórmula (1) obtenemos:

$$\begin{aligned} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{k^2 + a^2} &= -\left(\frac{\pi}{ia} \cot(\pi a) \right) \\ &= \frac{i\pi}{a} \cot(\pi a) \end{aligned}$$

Otra formulación:

$$\begin{aligned} \frac{i\pi}{a} \cot(\pi a) &= \frac{i\pi}{a} \frac{e^{-\pi a} + e^{\pi a}}{e^{-\pi a} - e^{\pi a}} \frac{2i}{2} \\ &= -\frac{\pi}{a} \frac{\cosh(\pi a)}{\sinh(\pi a)} \\ &= \frac{\pi}{a} \coth(\pi a) \end{aligned}$$