Universidad de Chile.
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas.
Departamento de Ingeniería Matemática.
Santiago, 13 de Diciembre de 2011. Tiempo: 3:00 hrs.

# CONTROL 2: MA2002 Cálculo Avanzado y Aplicaciones

## Parte 1

**(Problema 1)** Sea

$$f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$z \longmapsto f(z) = \frac{1}{1+z+z^2}$$

(a) (1.5 ptos.) Demuestre que los polos de $f$ están sobre la frontera (o borde) de $D(0,1)$.

(b) (1.5 ptos.) Demuestre que

$$f(z) = \frac{1}{i\sqrt{3}}\left(\frac{1}{z-e^{i\pi/3}} - \frac{1}{z-e^{-i\pi/3}}\right).$$

(c) (1.5 ptos.) Demuestre que para $z \in D(0,1)$,

$$f(z) = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) + \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)z + \sin\left(\frac{6\pi}{3}\right)z^2 + \cdots\right).$$

(*Indicación: Es recomendable utilizar series geométricas.*)

**(Problema 2)** (1.5 ptos.) Si $z = 2e^{i\theta}$, $\forall\theta \in \mathbb{R}$ demuestre que $\frac{1}{|z^2-1|} \leq \frac{1}{3}$. Interprete geométricamente este resultado.

(*Indicación: Recuerde que* $|a-b| \geq |a| - |b|$)

## Parte 2

**(Problema 3)** Sea $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa en todo $\mathbb{C}$ tal que:

**(i)** Para todo $z, w \in \mathbb{C}$, $f(z+w) = f(z)f(w)$.

**(ii)** Para todo $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$.

Denotemos, como es usual, $z = x + iy$ y $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$.

(a) (1.5 ptos.) Demuestre que $f(z) = e^x f(iy)$.

(b) (1.5 ptos) Para todo $y \in \mathbb{R}$, denote $u_0(y) = u(0,y)$ y $v_0(y) = v(0,y)$. Pruebe que $u_0$ y $v_0$ satisfacen el sistema de EDO siguiente:

$$\begin{cases} \dfrac{du_0}{dy} = -v_0, \\ \\ \dfrac{dv_0}{dy} = u_0 \end{cases}$$

(c) (1.5 ptos) Verifique que $u_0(0) = 1$ y que $v_0(0) = 0$, y resuelva el sistema de EDO de la pregunta anterior. Deduzca que $f(z) = e^z$, $\forall z \in \mathbb{C}$.

**(Problema 4)** (1.5 ptos) Sea $u(x, y) = \sin(x) \cosh(y)$. Encuentre $v(x, y)$ tal que $f(z) = u(x, y)+ iv(x, y)$ sea holomorfa en $\mathbb{C}$.

## Parte 3

---

**(Problema 5)** Para un real $a \in (0, 1)$ se desea calcular la integral impropia en $\mathbb{R}$ dada por $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{1 + e^x}\, dx$. Para esto, consideremos la integral compleja $\displaystyle\oint_\Gamma f(z)dz$ donde $f(z) = \dfrac{e^{az}}{1 + e^z}$ y $\Gamma$ es la curva formada por los lados orientados $\gamma_1$, $\gamma_2$, $\gamma_3$ y $\gamma_4$ del rectángulo que se ilustra en la figura de mas abajo.

(a) (1 pto.) Pruebe que para todo $R > 0$, $\displaystyle\oint_\Gamma f(z)dz = 2\pi \sin(a\pi) - i2\pi \cos(a\pi)$.

(*Indicación: Justifique que* $\Gamma$ *encierra un solo polo de* $f$. )

(b) (1 pto.) Pruebe que si $R \to \infty$, entonces $\int_{\gamma_1} f(z)dz \to I$.

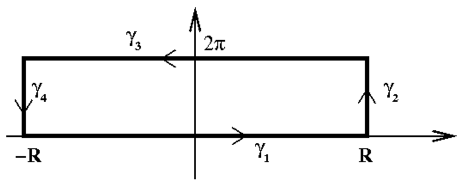
(c) (1 pto.) Pruebe que si $R \to \infty$, entonces $\int_{\gamma_3} f(z)dz \to -e^{2a\pi i} I$

(d) (1.5 ptos.) Pruebe que si $R \to \infty$, entonces $\int_{\gamma_2} f(z)dz \to 0$.

(e) (1 pto.) Pruebe que si $R \to \infty$, entonces $\int_{\gamma_4} f(z)dz \to 0$.

(*El razonamiento no es idéntico al de la parte (d) previa*).

(f) (0.5 ptos.) Utilizando los resultados anteriores, obtenga el valor de $I$.




Nota: Las distintas **partes** del control deben ser entregadas en hojas separadas.

# Pauta problema 1

(a) Polos de $f(z) = \dfrac{1}{1+z+z^2}$

Buscar ceros de $1+z+z^2$

1.5p

$$z_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm i\sqrt{3} \quad \left(= e^{2\pi/3\, i},\ e^{4\pi/3\, i}\right)$$

$|z_{1,2}| = 1$ luego $z_{1,2} \in \partial D(0,1)$

o bien

Polos de $f(z) = \dfrac{1}{1-z+z^2}$

1.5p

$$z_{12} = \frac{1}{2} \pm i\sqrt{3} \quad \left(= e^{-\pi/3\, i},\ e^{\pi/3\, i}\right)$$

$|z_{1,2}| = 1$ luego $z_{1,2} \in \partial D(0,1)$

---

(b) $\boxed{\text{Caso } \dfrac{1}{1+z+z^2}}$, $1+z+z^2 = (z-e^{2i\pi/3})\cdot(z-e^{4i\pi/3})$

descomponer en fracciones parciales

$$\frac{A}{z-e^{2i\pi/3}} + \frac{B}{z-e^{4i\pi/3}} = \frac{1}{1+z+z^2}$$

$$(A+B)z - Ae^{4i\pi/3} - Be^{2i\pi/3} = 1$$

$$A+B = 0 \qquad B = -A$$

$$-A\left(e^{4i\pi/3} - e^{2i\pi/3}\right) = 1$$

$$-A\left(-i\sqrt{3}\right) = 1$$

Con lo cual $\dfrac{1}{1+z+z^2} = \dfrac{1}{i\sqrt{3}}\left(\dfrac{1}{z-e^{2i\pi/3}} - \dfrac{1}{z-e^{4i\pi/3}}\right)$

Obs: $e^{2i\pi/3} = -e^{-i\pi/3}$ ; $e^{4i\pi/3} = -e^{i\pi/3}$

$\boxed{\underline{\text{Caso}} \quad \frac{1}{1-z+z^2}}$

descomponer en fracciones parciales

$$\frac{A}{z-e^{-i\pi/3}} + \frac{B}{z-e^{i\pi/3}} = \frac{1}{1+z+z^2}$$

$$(A+B)z - Ae^{+i\pi/3} - Be^{-i\pi/3} = 1$$

$$A+B=0 \qquad B=-A$$

$$-A\,(\underbrace{e^{i\pi/3} - e^{-i\pi/3}}_{\sqrt{3}\,i}) = 1$$

con lo cual

$$\frac{1}{1-z+z^2} = \frac{1}{\sqrt{3}\,i}\left(\frac{1}{z-e^{i\pi/3}} - \frac{1}{z-e^{-i\pi/3}}\right)$$

$\boxed{\underline{\text{Otra alternativa sumar}}}$

$$\frac{1}{i\sqrt{3}}\left(\frac{1}{z-e^{i\pi/3}} - \frac{1}{z-e^{-i\pi/3}}\right)$$

$$= \frac{1}{i\sqrt{3}}\;\frac{z-e^{-i\pi/3}-(z-e^{i\pi/3})}{(z-e^{i\pi/3})(z-e^{-i\pi/3})}$$

$$= \frac{1}{i\sqrt{3}}\;\frac{e^{i\pi/3}-e^{-i\pi/3}}{z^2-z+1} = \frac{1}{i\sqrt{3}}\cdot\frac{2i\,\mathrm{sen}\,\pi/3}{z^2-z+1}$$

$$= \frac{1}{z^2-z+1}$$

dato útil

$$\boxed{\begin{aligned}
e^{2i\pi/3} &= \cos\frac{2\pi}{3} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\\
e^{4i\pi/3} &= \cos\frac{4\pi}{3} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\\
e^{-i\pi/3} &= \cos\frac{\pi}{3} - i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} - i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\\
e^{+i\pi/3} &= \cos\frac{\pi}{3} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2}
\end{aligned}}$$

· (c) Usar serie geométrica, es decir, formar términos del tipo $\frac{1}{1-x}$ y reemplazar por la serie $\frac{1}{1-x} = 1+x+x^2+\cdots = \sum_{n\geq 0} x^n$

<u>Caso 1</u> usando $\frac{1}{1-z+z^2}$

$$f(z) = \frac{1}{i\sqrt{3}}\Big(\underbrace{\frac{1}{z-e^{i\pi/3}}}_{S_1} - \underbrace{\frac{1}{z-e^{-i\pi/3}}}_{S_2}\Big)$$

Para $S_1$

$$\frac{1}{z-e^{i\pi/3}} = \frac{1}{e^{i\pi/3}(e^{-i\pi/3}z-1)}$$
$$= \frac{-e^{-i\pi/3}}{1-e^{-i\pi/3}z} = (-e^{-i\pi/3})\sum_{n\geq 0}(e^{-i\pi/3}\cdot z)^n$$
$$= -e^{-i\pi/3}\sum e^{-in\pi/3} z^n$$
$$= -\sum e^{-i(n+1)\pi/3} z^n$$

Para puntuar la parte (c)

0.5p llevar a formar términos $\frac{1}{1-Az}$

0.5p escribir, con la forma anterior una serie tipo $\sum A^n z^n$

Para $S_2$

$$\frac{1}{z-e^{-i\pi/3}} = \frac{1}{e^{-i\pi/3}(e^{i\pi/3}z-1)}$$
$$= \frac{-e^{i\pi/3}}{1-e^{i\pi/3}z} = (-e^{i\pi/3})\sum_{n\geq 0}(e^{i\pi/3}z)^n$$
$$= -\sum_{n\geq 0} e^{i(n+1)\pi/3} z^n$$

0.5p trabajar los coeficientes de la serie hasta llegar a coeficientes del tipo $\operatorname{sen}(n\pi/3)$ o $\operatorname{sen}(2n\pi/3)$

luego

$$f(z) = \frac{1}{i\sqrt{3}}\Big(\sum_{n\geq 0} e^{i(n+1)\pi/3} z^n - \sum e^{-i(n+1)\pi/3} z^n\Big)$$
$$= \frac{1}{i\sqrt{3}}\sum \big(\underbrace{e^{i(n+1)\pi/3} - e^{-i(n+1)\pi/3}}_{2i\,\operatorname{sen}(n+1)\pi/3}\big) z^n$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \sum_{n\geq 0} \operatorname{sen}(n+1)\pi/3 \cdot z^n$$

$$\left( = \frac{2}{\sqrt{3}} \left( \operatorname{sen}\frac{\pi}{3} + \operatorname{sen}\frac{2\pi}{3} \cdot z + \operatorname{sen}\frac{3\pi}{3} \cdot z^2 + \cdots \right) \right)$$

Caso 2 se podrían usar 2 expresiones equivalentes

$$\frac{1}{1+z+z^2} = \frac{1}{i\sqrt{3}} \left( \frac{1}{z - e^{2i\pi/3}} - \frac{1}{z - e^{4i\pi/3}} \right) \quad (*)$$

$$= \frac{1}{i\sqrt{3}} \left( \frac{1}{z + e^{-i\pi/3}} - \frac{1}{z + e^{+i\pi/3}} \right) \quad (**)$$

Para $(*)$, como en el caso anterior

$$f(z) = \frac{1}{i\sqrt{3}} \left\{ -e^{-2i\pi/3} \left( \frac{1}{1 - e^{-2i\pi/3} z} \right) + e^{-4i\pi/3} \frac{1}{1 - e^{-4i\pi/3} z} \right\}$$

$$= \frac{-1}{i\sqrt{3}} \left\{ \sum \left( e^{-2(n+1)i\pi/3} - e^{-4(n+1)i\pi/3} \right) z^n \right\}$$

Para $(**)$, que es equiv.

$$f(z) = \frac{1}{i\sqrt{3}} \left\{ \frac{e^{+i\pi/3}}{1 + e^{+i\pi/3} z} - \frac{e^{-i\pi/3}}{1 + e^{-i\pi/3} z} \right\}$$

$$= \frac{1}{i\sqrt{3}} \sum (-1)(-1)^{n+1} \left( e^{i(n+1)\pi/3} - e^{-i(n+1)\pi/3} \right) z^n$$

$$= \frac{-1}{i\sqrt{3}} \sum (-1)^{n+1} \cdot 2i \cdot \operatorname{sen}\left( (n+1)\pi/3 \right) z^n$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \sum \operatorname{sen}\left( (n+1) 2\pi/3 \right) z^n$$

(usando que $(-1)^{n+1} \operatorname{sen}\alpha = \operatorname{sen}(\alpha - (n+1)\pi)$)

**PAUTA Parte 1 (Problema 2) MA2002** Prim-2011

**Problema 2** (1.5 puntos)
Si $z = 2e^{i\theta}$, para todo $\theta \in \mathbb{R}$, demuestre que $\frac{1}{|z^2-1|} \leq \frac{1}{3}$. Interprete geométricamente este resultado.
(Indicación: Recuerde que $|a-b| \geq |a| - |b|$ )

**Solución**.
(a) Demostración de la desigualdad.
Si $z = 2e^{i\theta}$, entonces $z^2 = 4e^{i2\theta}$ (**0.2)** y por la indicación, se tiene que
$|z^2-1| \geq |z^2| - 1 = \left|4e^{i2\theta}\right| - 1$ $(\mathbf{0.2})$
$= 4\left|e^{i2\theta}\right| - 1 = 4 - 1 = 3$ ($\left|e^{i\alpha}\right| = 1,$ todo $\alpha \in \mathbb{R}$), implicando $\frac{1}{|z^2-1|} \leq \frac{1}{3}$ **(0.2)**

(b) Interpretación geométrica.
Por definición de la representación polar en $\mathbb{C}$,
$z = 2e^{i\theta}$ $ssi$ el punto asociado a $z$ en el plano complejo es un punto de $C(0,2)$, (circulo centrado en 0 y radio 2), **(0.2)**
similarmente,
$z^2 = 4e^{i2\theta}$ $ssi$ el punto asociado a $z^2$ en el plano complejo es un punto de $C(0,4)$, **(0.2)**
y como el numero $|a-b|$ representa a la distancia entre los complejos $a$ y $b$, se tiene que $|z^2-1|$ representa a la distancia entre puntos del $C(0,4)$ y el punto $1 + i0 = 1$, **(0.2)**
y como el punto de $C(0,4)$ que esta a menor distancia del punto 1 es $4 + i0 \equiv 4$, sigue que la distancia de cualquier otro punto de $C(0,4)$ al punto 1 es mayor que $|4-1| = 3$, i.e., $|z^2-1| > 3$, lo que implica la desigualdad. **(0.3)**

Puntaje: (a) 0.6; (b) 0.9

P3] (a) $f(z) = f(x+iy)$

$\underset{(i)}{=} f(x)f(iy) \underset{(ii)}{=} e^x f(iy)$ ] 1,5 pts.

(b) Sean:

$u_0(y) = u(0,y) \quad ; \quad v_0(y) = v(0,y)$

Así $f(z) = e^x f(iy) = e^x u_0(y) + i e^x v_0(y) \Rightarrow \begin{cases} u(x,y) = e^x u_0(y) \\ v(x,y) = e^x v_0(y) \end{cases}$ ] 0,5 pts

Dado que $f$ es holomorfa, $u$ y $v$ satisfacen las condiciones de Cauchy-Riemann:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad ,$$ ] 0.5 pts.

que en términos de $u_0$ y $v_0$ nos dicen:

$$\begin{cases} \cancel{e^x} u_0(y) = \cancel{e^x} \dfrac{dv_0(y)}{dy} \\ \cancel{e^x} \dfrac{du_0(y)}{dy} = -\cancel{e^x} v_0(y) \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} u_0(y) = \dfrac{dv_0(y)}{dy} \\ \dfrac{du_0(y)}{dy} = -v_0(y) \end{bmatrix}$$ 0.5 pts.

(c) $f(x+i0) = e^x(u_0(0) + i v_0(0)) \underset{(ii)}{=} e^x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Así $u_0(0) = 1$ y $v_0(0) = 0$ // ] 0.5 pts.

De la parte (b) deducimos que

$$u_0(y) = v_0'(y) = -u_0''(y)$$

$$\Rightarrow \quad u_0(y) = A\cos y + B\,\mathrm{sen}\, y$$ para ciertas constantes $A, B$

0.5 pts.

Como $u_0(0) = 1 \Rightarrow A = 1$

$$u_0'(0) = -v_0(0) = 0 \Rightarrow B = 0$$

Así $u_0(y) = \cos y \Rightarrow v_0(y) = \mathrm{sen}\, y$

0.5 pts.

$$\Rightarrow \quad f(z) = e^x\big(u_0(y) + i v(y)\big)$$

$$= e^x(\cos y + i\,\mathrm{sen}\, y)$$

$$= e^x \cdot e^{iy} = e^{x+iy} = e^z$$

//

Problema 4) Pauta

f debe satisfacer las condiciones de CR:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \cos x \cosh y = \frac{\partial v}{\partial y} \Rightarrow v = \cos x \sinh y + v_1(x) + c_1$$

0,4

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \sin x \sinh y = -\frac{\partial v}{\partial x} \Rightarrow v = \cos x \sinh y + v_2(y) + c_2$$

0,4

donde $v_1(x)$ $v_2(y)$ son funciones de $x$ e $y$ respectivamente y $c_1, c_2$ constantes reales

luego $v_1(x) + c_1 = v_2(y) + c_2$

$$\Rightarrow v_1(x) = v_2(y) = 0$$

0,3

$$\therefore v(x,y) = \cos x \sinh y + c_0 \quad , \text{donde } c_0 \in \mathbb{R}$$

Definidas de esta forma tanto $u$ como $v$ son funciones son diferenciables en $\mathbb{R}^2$ derivada continua en $\mathbb{R}^2$ y satisfacen C-R en $\mathbb{R}^2$, por lo tanto $f \in H(\mathbb{C})$.

0,4

Control 2 - CAA - Prim. 2011

Parte Problemas.

(a) $1+e^z=0 \iff e^z=-1$ ~~[illegible]~~

$$z=\pi i+2k\pi i \qquad k\in\mathbb{Z}$$

0.3p Solo $z=\pi i$ está en el interior del rectángulo

Polo simple pues

$$(z-\pi i)\frac{e^{az}}{1+e^z}=\frac{e^{az}}{\frac{e^z-e^{\pi i}}{z-\pi i}}\xrightarrow[z\to\pi i]{}\frac{e^{a(\pi i)}}{(e^z)'_{z=\pi i}}$$

$\boxed{\text{Calculo del residuo + polo simple } 0.3p}$

$$=\frac{e^{a\pi i}}{e^{\pi i}}=-e^{a\pi i}$$

Entonces (Residuo)

$$\oint_{\Gamma} f(z)\,dz=2\pi i\cdot(-e^{a\pi i})$$

$$=2\pi i(-\cos a\pi-i\,\text{sen}\,a\pi)$$

0.4p Aplicación Residuos

$$=2\pi\,\text{sen}\,a\pi-2\pi i\cos a\pi$$

(b) Param. de $\gamma_1$ 0.3p

$$c:[-R,R]\longrightarrow\mathbb{C}$$
$$t\longmapsto c(t)=t$$
$$c'(t)=1$$

0.7p Calculo

$$\int_{\gamma_1} f(z)\,dz=\int_{-R}^{R}\frac{e^{at}}{1+e^t}\cdot dt\xrightarrow[R\to\infty]{}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{at}}{1+e^t}dt=I$$

(c) Param. de $\gamma_3$ 0.3p

$$c:[R,-R]\longrightarrow\mathbb{C}$$
$$t\longmapsto c(t)=t+2\pi i$$
$$c'(t)=1$$

0.7p Calculo

$$\int_{\gamma_3} f(z)\,dz=\int_{R}^{-R}\frac{e^{a(t+2\pi i)}}{1+e^{t+2\pi i}}\cdot dt=-\int_{-R}^{R}\frac{e^{at}\cdot e^{2a\pi i}}{1+e^te^{2\pi i}}dt$$

$$(e^{2\pi i}=1)\qquad =-e^{2a\pi i}\int_{-R}^{R}\frac{e^{at}}{1+e^t}dt\longrightarrow -e^{2a\pi i}\cdot I$$

(d) Param. de $\gamma_2'$ $\quad c: [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{C}$

(0.3 p) $\quad t \longmapsto R + it$

$c'(t) = i$

$$\int_{\gamma_2} f(z)\, dz = \int_0^{2\pi} \frac{e^{a(R+it)}}{1+e^{R+it}}\, i\, dt$$

$$\left| \int_{\gamma_2} f(z)\, dz \right| \leq \int_0^{2\pi} \left| \frac{e^{aR} \cdot e^{ait} \cdot i}{1+e^R e^{it}} \right| dt$$

$$\leq \int_0^{2\pi} \frac{e^{aR}}{|e^R e^{it} + 1|}\, dt$$

0.3p Cota para numerador

0.3p Cota para denominador

$$|e^R e^{it} + 1| \geq e^R - 1$$

$(|a-b| \geq |a| - |b|)$ tomando $e^R e^{it}$, $(-1)$

Si $R$ grande $e^R - 1 > 0$ y se tiene para los inversos

$$\frac{1}{|e^R e^{it} + 1|} \leq \frac{1}{e^R - 1}, \quad \text{con lo cual}$$

$$\left| \int_{\gamma_2} f(z)\, dz \right| \leq \int_0^{2\pi} \frac{e^{aR}}{e^R - 1}\, dt = \frac{e^{aR} \cdot 2\pi}{e^R - 1}$$

0.3p Cota de la integral

$$\text{Y} \quad \frac{2\pi \cdot e^{aR}}{e^R - 1} \longrightarrow 0 \quad \text{pues}$$

Forma 1, $\quad \dfrac{2\pi\, e^{aR}\, e^{-R}}{1 - e^{-R}} = \dfrac{2\pi \cdot e^{-(1-a)R}}{1 - e^{-R}} \longrightarrow \dfrac{0}{1} = 0$

Forma 2, (L'hopital) $\quad \lim_{R\to\infty} \dfrac{2\pi\, e^{aR}}{e^R - 1} = \lim \dfrac{2\pi a\, e^{aR}}{e^R}$

$$= 2\pi a \lim e^{aR} e^{-R}$$

$$= 2\pi a \lim e^{R(a-1)} = 2\pi a \cdot 0$$

0.3 p Convergencia de la cota a cero con R

pues $R(a-1) = -(1-a)R \to -\infty$

e) Param de $\gamma_4$ $\quad c : [2\pi, 0] \longrightarrow \mathbb{C}$

$\quad t \longmapsto -R + t \cdot i$

0.3p $\longrightarrow$ $c'(t) = i$

$$\left| \int_{\gamma_4} f(z)\, dz \right| \leq \int_0^{2\pi} \frac{|e^{-aR} e^{ait} i|}{|1 + e^{-R} e^{it}|} dt$$

Cota del integrando 0.4p

$$\leq \int_0^{2\pi} \frac{e^{-aR}}{1 - e^{-R}} dt \qquad (\forall R > 0)$$

0.3p límite es cero

$$\leq \frac{e^{-aR}}{1 - e^{-R}} \cdot 2\pi \xrightarrow[R \to \infty]{} \frac{0}{1} = 0$$

(f) Como $\displaystyle\int_\Gamma f(z)\, dz = \sum_{j=1}^{4} \int_{\gamma_j} f(z)\, dz$

Y tomando límite cuando $R \to \infty$

$$2\pi \operatorname{sen} a\pi - 2\pi i \cos a\pi = I - e^{2a\pi i} I + 0$$

0.3p escribir la ec. para I

$$= (1 - e^{2a\pi i})\, I$$

$$= [1 - \cos(2a\pi) - i \operatorname{sen}(2a\pi)]\, I$$

Comparando las partes reales

Separar y resolver 0.2p

$$2\pi \operatorname{sen} a\pi = (1 - \cos(2a\pi))\, I$$

$$= 2 \operatorname{sen}^2(a\pi) \cdot I$$

despejo

$$I = \frac{2\pi \operatorname{sen} a\pi}{2 \operatorname{sen}^2(a\pi)} = \frac{\pi}{\operatorname{sen}(a\pi)}$$