Pauta P1 Control 2 MA2002 Otoño - 2012

P1. (a) Determine todas las soluciones de: $\operatorname{sen}(z) = i\operatorname{senh}(z)$

(0.5) $\operatorname{sen}(z) = i\operatorname{senh}(z) \iff \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}) = \frac{i}{2}(e^{z} - e^{-z}) \iff e^{iz} - e^{-iz} = e^{-z} - e^{z} \iff e^{iz} - e^{-z} = e^{-iz} - e^{z} \iff$
$\frac{e^{(1+i)z} - 1}{e^{z}} = \frac{1 - e^{(1+i)z}}{e^{iz}} \iff \frac{u-1}{e^{z}} = \frac{1-u}{e^{iz}}$, con $u = e^{(1+i)z} = e^{z} e^{iz}$

(0.3) Si $u = 1$, entonces $e^{(1+i)z} = 1 \iff \boxed{z = \frac{2k\pi i}{1+i}, \ k \in \mathbb{Z}}$

(0.7) Si $u \neq 1$, entonces $e^{z} = -e^{iz} \Rightarrow u = -e^{2iz} = e^{i\pi} e^{2iz} = e^{i(\pi + 2z)}$, y como $u = e^{(1+i)z}$
resulta, $e^{(1+i)z} = e^{i(\pi + 2z)} \iff e^{(1+i)z - (\pi + 2z)i} = 1 \iff (1+i)z - (\pi + 2z)i = 2k\pi i \iff \boxed{u = \frac{(2k+1)\pi i}{1-i}, k \in \mathbb{Z}}$

(b) Sea $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ la serie de Taylor asociada a f holomorfa en $\mathbb{C}$.
Determine condiciones para los a_n de modo que $f(z) = f(-\bar{z})$.

(0.5) $f(z) = f(-\bar{z}) \iff \sum_{n\geq 0} a_n z^n = \sum_{n \geq 0} a_n (-\bar{z})^n = \sum_{n \geq 0} (-1)^n a_n \bar{z}^n$
Utilizando representación polar de $z^n = r^n e^{i\theta n}$ $(z = re^{i\theta})$, resulta
$\bar{z}^n = r^n e^{-in\theta}$ y la condición $f(z) = f(-\bar{z})$ implica
$a_n z^n = (-1)^n a_n \bar{z}^n \iff a_n r^n(\cos(n\theta) + i\operatorname{sen}(n\theta)) = (-1)^n a_n r^n(\cos(n\theta) - i\operatorname{sen}(n\theta))$

(0.5) $\underline{n \text{ par}}$: $a_n r^n(\cos(n\theta) + i\operatorname{sen}(n\theta)) = a_n r^n(\cos(n\theta) - i\operatorname{sen}(n\theta)) \Rightarrow a_n = 0$, n par, $\underline{n \neq 0}$

(0.5) $\underline{n \text{ impar}}$: $a_n r^n(\cos(n\theta) + i\operatorname{sen}(n\theta)) = -a_n r^n(\cos(n\theta) - i\operatorname{sen}(n\theta)) \Rightarrow a_n = 0$, n impar
Lo anterior implica $a_n = 0$, todo $n \neq 0$, i.e., f es una función constante.

(c) Demuestre que la función $g(z) = i^{z-3}$ es holomorfa en $\mathbb{C}$.

(0.5) $g(z) = i^{z-3} = e^{(z-3)\log(i)} = e^{(z-3)(\ln|i| + i\pi/2)} = e^{(z-3)\frac{\pi}{2}i}$

(1.0) i.e., $g = \exp \circ h$, donde $h(z) = (\frac{\pi}{2}i)z - \frac{3\pi}{2}i$, y como $\exp$ y los polinomios son holomorfas en $\mathbb{C}$, resulta que $g = \exp \circ h$ también es holomorfa en $\mathbb{C}$ (por álgebra de funciones).

(d) Sea h holomorfa en $D(0,r)$, $r > 1$, $\gamma = \{z : |z| = 1\}$ (+). Calcule $\int_\gamma (2 + (z + z^{-1}) h(z)) z^{-1} dz$

(0.5)
$$\int_\gamma (2 + (z+z^{-1})h(z))z^{-1} dz = \int_\gamma \left(\frac{2h(z)}{z^{-1}} + 2h(z)z^{-1} + z^{-1}h(z)z^{-1}\right) dz$$
$$= \int_\gamma \left(\frac{2h(z)}{z} + h(z) + \frac{h(z)}{z^2}\right) dz$$

(0.2)
$$= 2\int_\gamma \frac{h(z)}{z} dz + \int_\gamma h(z) dz + \int_\gamma \frac{h(z)}{z^2} dz$$

(0.8) (T. Cauchy + fórmulas de la integral de Cauchy)
$$= 2(2\pi i h(0)) + 0 + 2\pi i (h'(0))$$
$$= 4\pi i h(0) + 2\pi i h'(0) = 2\pi i (2h(0) + h'(0))$$

Pauta P2 Control 2 MA2002 Otoño 2012

P2. (I) $A = \{z : |z| \leq 1\}$, $f : A \to A$ definida por $f(z) = \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$, $a \in \mathbb{C}$, $|a| < 1$.

(a) Justifique: f está bien definida en A; $|f(z)| \leq 1$, $z \in A$, f es holomorfa en A.

(1) f está bien definida en $A \Leftrightarrow f(z) \in \mathbb{C}$, todo $z \in A$

Como $|a| < 1$, para todo $z \in A$, $|z| \leq 1$ se tiene $|\bar{a}z| = |\bar{a}||z| < 1$ ssi $|1 - \bar{a}z| > 0$

i.e., $1 - \bar{a}z \neq 0$, todo $z \in A$ y, por lo tanto, $f(z) \in \mathbb{C}$, todo $z \in A$.

(2) $|f(z)| \leq 1$, todo $z \in A$

$$|f(z)| = \left|\frac{z-a}{1-\bar{a}z}\right| = \left|\frac{z(1-\frac{a}{z})}{1-\bar{a}z}\right| \ (z \neq 0) = \frac{|z(1-a\cdot\frac{1}{z})|}{|1-\bar{a}z|} \ (z\bar{z}=1) = \frac{|z(1-a\bar{z})|}{|1-\bar{a}z|} = |z|$$

(3) f es holomorfa en A ya que por (a), f está bien definida en A, como $f(z) = \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$ es el cuociente de dos polinomios (grado 1) cuyo denominador es no-nulo en A, el álgebra de funciones asegura que f es holomorfa en A.

(b) f es biyectiva, holomorfa en A

(1) f es inyectiva:

$f(z) = f(w) \Rightarrow \frac{z-a}{1-\bar{a}z} = \frac{w-a}{1-\bar{a}w} \Rightarrow z - \bar{a}zw + a\bar{a}w = w - \bar{a}zw$?

y como $a \neq 0$, resulta $z = w$, i.e., f es inyectiva

(2) f es epiyectiva:

Sea $w \in A$, entonces $f(z) = w$ ssi $\frac{z-a}{1-\bar{a}z} = w$ ssi $z - a = w - \bar{a}zw$ ssi $z = \frac{w+a}{1+\bar{a}w}$

y como $|w| \leq 1$, y la expresión de z es análoga a la de $f(z)$, cambiando a por $-a$ se sigue que $|z| \leq 1$, i.e., f es epiyectiva.

(3) f es holomorfa en A.

El resultado anterior implica que f^{-1} existe (f biyectiva), $f^{-1}(w) = \frac{w+a}{1+\bar{a}w}$

y como la expresión que define a f^{-1} es del mismo tipo que f, resulta que f^{-1} es holomorfa en A.

(II) Las hipótesis implican que $f(w) = \frac{h(w)}{w - g(a)}$, y que $\lim_{w \to a} (w-a) f(z) = R$

$$(f \circ g)(z) = f(g(z)) = \frac{h(g(z))}{g(z) - g(a)} \quad y \quad \lim_{z \to a} \left[(z-a)(f\circ g)(z)\right] = \lim_{z \to a} \frac{h(g(z))}{\left(\frac{g(z)-g(a)}{z-a}\right)} = \frac{R}{g'(a)} \quad //$$

(III) $f(z) = x(x+iy) + e^{iy}$, $(z = x+iy) \Rightarrow f(z) = x^2 + \cos(y) + i(xy + \operatorname{sen}(y)) = u(x,y) + iv(x,y)$

$u(x,y) = x^2 + \cos(y)$; $v(x,y) = xy + \operatorname{sen}(y)$ son de clase $C^1(\mathbb{R}^2)$

C-R: $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \Rightarrow 2x = x + \cos(y)$ ssi $x = \cos(y)$; $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ ssi $-\operatorname{sen}(y) = -y \Rightarrow \left.\begin{matrix} x = \cos(y) \\ y = \operatorname{sen}(y) \end{matrix}\right\} \Rightarrow x^2 + y^2 = 1$

por lo tanto, f es derivable en $\{z : |z| = 1\}$, $f'(z) = 2x + iy = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right)$

Pauta P3 Control 2 MA2002 Otoño-2012

P3. $f(z) = \dfrac{z}{\operatorname{sen}^2(z)(1-2\cos(z))}$

a) Determine polos (y sus órdenes) de f

(0,4) Claramente, f tiene singularidades en $z=0$ y $z_k = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

<u>Caso $z=0$</u>

(1.3) $\lim\limits_{z\to 0} f(z) \overset{L'H}{=} \lim\limits_{z\to 0} \dfrac{1}{2\operatorname{sen}(z)\cos(z)(1-2\cos(z)) + 2\operatorname{sen}^3(z)} = \dfrac{1}{0}$, i.e, $z=0$ es no reparable

Se determina si es polo y su orden

$\lim\limits_{z\to 0} z\cdot f(z) \overset{L'H}{=} \lim\limits_{z\to 0} \dfrac{2z}{2\operatorname{sen}(z)\cos(z)(1-2\cos(z)) + 2\operatorname{sen}^3(z)} \overset{L'H}{=} \lim\limits_{z\to 0} \dfrac{1}{\cos^2(z)(1-2\cos(z)) + \operatorname{sen}^2(z)(\text{algo})} = 1$ //

por lo tanto, $z=0$ es polo de orden 1.

<u>Otra forma</u>: $f(z) = \dfrac{z}{\operatorname{sen}^2(z)} \cdot g(z)$, con $g(z) = \dfrac{1}{1-2\cos(z)}$, g es holomorfa en $z=0$, $g(0) \neq 0$

Además $\dfrac{z}{\operatorname{sen}(z)} \to 1$ si $z \to 0$, implicando $f(z) = \dfrac{1}{\operatorname{sen}(z)} \cdot h(z)$, $h(z) = \dfrac{z\cdot g(z)}{\operatorname{sen}(z)}$

y $\tilde{h}$ es holomorfa en $z=0$ con $\tilde{h}(0) \neq 0$, $\tilde{h}$ es la fn. reparada de h en $z=0$

y como $\dfrac{1}{\operatorname{sen}(z)}$ tiene polo de orden 1 en $z=0$, sigue que f tiene polo simple en 0

<u>Caso $z_k = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$</u>

(1.3) La funcion $g(z) = \dfrac{z}{\operatorname{sen}^2(z)}$ es holomorfa en z_k y $g(z_k) \neq 0$, por lo tanto

$f(z) = \dfrac{g(z)}{1-2\cos(z)}$ y $\lim\limits_{z\to z_k} (z-z_k) f(z) = \lim\limits_{z\to z_k} \dfrac{(z-z_k)g(z)}{1-2\cos(z)} \overset{L'H}{=} \lim\limits_{z\to z_k} \dfrac{g(z)+(z-z_k)g'(z)}{2\operatorname{sen}(z)}$

implicando que $\lim\limits_{z\to z_k} (z-z_k) f(z) = \dfrac{g(z_k)}{2\operatorname{sen}(z_k)} = \dfrac{z_k}{2\operatorname{sen}^3(z_k)} = \dfrac{\pi/3 + 2k\pi}{2\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3} = \dfrac{4}{3\sqrt{3}}\left(\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi\right)$

i.e, $z_k = \pi/3 + 2k\pi$ es polo simple de f.

(b) Calcular $\int_\gamma f(z)dz$, $\gamma : |z| = 4$

(1.0) El resultado de (a) implica que γ encierra los polos $z=0$, $z_0 = \pi/3$

para los z_k con $k \geq 1$, $|z_k| > 4$.

Por el T. de residuos, resulta:

(2.0) $\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i\,(\operatorname{Res}(f,0) + \operatorname{Res}(f,\pi/3))$

pero los calculos en (a) implican que $\operatorname{Res}(f,0) = 1$ y $\operatorname{Res}(f,\pi/3) = \dfrac{4}{3\sqrt{3}}\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$

y, por lo tanto,

$\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i \left(1 + \dfrac{4\sqrt{3}}{27}\pi\right)$ //