PAUTA CONTROL 2
MA2002: CÁLCULO AVANZADO Y APLICACIONES
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS, UNIVERSIDAD DE CHILE

P1).

a) Encuentre el dominio $\Omega \subset \mathbb{C}$ donde la función

$$f(z) = \frac{1}{2i}\log\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)$$

es holomorfa. Donde la rama del logaritmo que se considera es $\{z \in \mathbb{C} \mid Re(z) \leq 0,\ Im(z) = 0\}$.

b) Demuestre que $f(z)$ esta en el dominio de tan para todo $z \in \Omega$ y

$$\tan(f(z)) = z,$$

es decir $f(z) = \arctan(z)$.

c) Calcule f' y determine su desarrollo en serie de potencias en torno a $z = 0$, explicitando el radio de convergencia. Deduzca el desarrollo en serie para f en torno a $z = 0$.

Respuesta:

a) Como sabemos el dominio donde el logaritmo es holomorfo es en todo el plano complejo menos en la rama que se considera, luego debemos excluir los valores del plano complejo, donde $w = \frac{1+iz}{1-iz}$ pertenece a la rama del logaritmo.

Sea $z \in \Omega$:

- Claramente $z \neq -i$, dado que el denominador de la fracción se anula.
- También tenemos que $z \neq i$, pues si $z = i$ $w = 0$, lo que esta en la rama del logaritmo.
- Veamos la parte real e imaginaria de w

$$\begin{aligned} w &= \frac{(1+iz)}{(1-iz)} \cdot \frac{\overline{(1-iz)}}{\overline{(1-iz)}} \\ &= \frac{(1+iz)}{(1-iz)} \cdot \frac{(1+i\bar{z})}{(1+i\bar{z})} \\ &= \frac{1+i(z+\bar{z})-|z|^2}{1+i(\bar{z}-z)+|z|^2}, \end{aligned}$$

si consideramos $z = x + iy$, obtenemos

$$w = \frac{1+2ix-|z|^2}{1+2y+x^2+y^2} = \frac{1+2ix-|z|^2}{(1+y)^2+x^2},$$

de esta forma obtenemos

$$(1,0) \quad Real(w) = \frac{1-x^2-y^2}{(1+y)^2+x^2}, \quad Im(w) = \frac{2x}{(1+y)^2+x^2}, \tag{0.1}$$

Por lo tanto si w pertenece a la rama del logaritmo, tenemos que $Im(w) = 0$ y $Real(w) \leq 0$, remplazando obtenemos

$$x = 0, \quad \wedge \quad y^2 \geq 1.$$

Por lo tanto,

$$\Omega = \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} \mid Real(z) = 0,\ |Im(z)| \geq 1\}. \quad (1,0)$$

2,0 b) El dominio de tan, son los complejos donde cos no se anule, es decir

$$Dom(\tan) = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid z \neq z_k = \frac{\pi}{2} + k\pi, \ \ \forall k \in \mathbb{Z} \right\},$$

Consideremos $z \in \Omega$, el dominio de f y supongamos que $f(z) \notin Dom(\tan)$, es decir $f(z) = z_k$ un cero de cos, es decir

$$\cos(f(z)) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{e^{if(z)} + e^{-if(z)}}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad e^{2if(z)} + 1 = 0,$$

remplazando $f(z)$, obtenemos

$$\exp\left(\log\left(\tfrac{1+iz}{1-iz}\right)\right) = -1 \quad \Leftrightarrow \quad w = \tfrac{1+iz}{1-iz} = -1.$$

Utilizando (0.1) obtenemos que

$$x = 0, \quad \wedge \quad \frac{1-y^2}{(1+y)^2} = -1,$$

es decir $x = 0$ y $y = -1$, donde $z = x + iy$, es decir $z = -i$ pero $-i$ no esta en Ω, por lo tanto

$$\forall z \in \Omega, \ \ f(z) \in Dom(\tan).$$ (1,0)

Veamos $\tan(f(z)) = z$, sea $z \in \Omega$,

$$\begin{aligned}
\tan(f(z)) &= \frac{1}{i}\frac{e^{if(z)} - e^{-if(z)}}{e^{if(z)} + e^{-if(z)}} \\
&= \frac{1}{i}\frac{e^{2if(z)} - 1}{e^{2if(z)} + 1} \\
&= \frac{1}{i}\frac{\left(\frac{1+iz}{1-iz} - 1\right)}{\left(\frac{1+iz}{1-iz} + 1\right)} \\
&= \frac{1}{i}\frac{2iz}{2} \\
&= z.
\end{aligned}$$ (1,0)

c)

$$\begin{aligned}
f'(z) &= \frac{1}{2i}\frac{1-iz}{1+iz}\left(\frac{i(1-iz) - (-i)(1+iz)}{(1-iz)^2}\right) \\
&= \frac{1}{1+z^2}.
\end{aligned}$$

Veamos el calculo de la serie de potencias, utilizando la serie geométrica

$$\begin{aligned}
f'(z) &= \frac{1}{1+z^2} \\
&= \frac{1}{1-(-z^2)} \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty}(-z^2)^k \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k z^{2k},
\end{aligned}$$ (0,5) (0,5)

Lo anterior es valido siempre que el argumento usado en la serie geométrica sea menor que uno, es decir $|-z^2| < 1$, con lo cual el radio de convergencia es 1.

Finalmente, igualando primitivas, obtenemos

$$f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} z^{2k+1} + C^{te},$$ (0,5)

y como $f(0) = 0$, obtenemos $C^{te} = 0$

$$f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} z^{2k+1}, \quad \forall z \in D(0,1).$$ (0,5)

P2).

a) Estudie en qué puntos del plano complejo son derivables las siguientes funciones

$$i)\ f(z) = e^{\overline{z}} - \overline{z}, \qquad ii)\ f(z) = z|1 - z^2|^2.$$

b) Calcule explícitamente

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)z^n$$

e indique el radio de convergencia.

c) Sea $p(z) = \sum_{k=0}^{N} c_k(z - z_0)^k$ un polinomio de grado $N \geq 1$, para $z_0 \in \mathbb{C}$, y sea $a > 0$. Demuestre que se cumple

$$\int_{|z-z_0|=a} p(z)d\overline{z} = -2\pi i p'(z_0)a^2,$$

donde la curva esta recorrida en sentido anti horario. Nota: $\int_\Gamma f(z)d\overline{z} = \int_{t_0}^{t_1} f(z(t))\overline{z'(t)}dt$, donde $z : [t_0, t_1] \to \mathbb{C}$ es una parametrización de Γ.

Respuesta:

a) I) Estudiemos $f(z) = e^{\overline{z}} - \overline{z}$, consideremos $z = x + iy$, y obtengamos la parte real e imaginaria de f, es decir

$$f(z) = u + iv = e^{\overline{z}} - \overline{z} = e^x(\cos(y) - i\text{sen}(y)) - x + iy,$$

es decir,

$$u = e^x \cos(y) - x \quad \text{y} \quad v = -e^x\text{sen}(y) + y,$$

claramente u, v son de clase $C^1(\mathbb{R}^2)$, por lo tanto, serán diferenciables en los puntos donde cumplan Cauchy-Riemann.

$$\frac{\partial}{\partial x}u = e^x \cos(y) - 1 \quad = \quad \frac{\partial}{\partial y}v = -e^x \cos(y) + 1$$

$$\frac{\partial}{\partial y}u = -e^x\text{sen}(y) \quad = \quad -\frac{\partial}{\partial x}v = e^x\text{sen}(y)$$

de la segunda igualdad obtenemos

$$2e^x\text{sen}(y) = 0$$ (0,5)

por lo tanto $y = k\pi$ para $k \in \mathbb{Z}$. Remplazando en la otra ecuación, obtenemos

$$2e^x \cos(k\pi) = 2,$$

Con lo cual obtenemos que $x = 0$ y k es par. Por lo tanto f es diferenciable en los puntos $z_n = 2in\pi$, con $n \in \mathbb{Z}$. (0,1)

II) Veamos $f(z) = z|1 - z^2|^2$,

$$f(z) = u + iv = z|1 - z^2|^2 = (x + iy)|1 - x^2 + y^2 - 2xyi|^2 = (x + iy)((1 - x^2 + y^2)^2 + 4x^2y^2),$$

con lo que obtenemos

$$u = x((1 - x^2 + y^2)^2 + 4x^2y^2), \quad v = y((1 - x^2 + y^2)^2 + 4x^2y^2),$$

claramente u, v son de clase $C^1(\mathbb{R}^2)$, por lo tanto, serán diferenciables en los puntos donde cumplan Riemann.

Definamos $g(x,y) = (1-x^2+y^2)^2 + 4x^2y^2$, con lo cual $u(x,y) = xg(x,y)$ y $v(x,y) = yg(x,y)$, de esta form las ecuaciones de Cauchy-Riemann son:

$$\frac{\partial}{\partial x}u = g + x\frac{\partial}{\partial x}g = \frac{\partial}{\partial y}v = g + y\frac{\partial}{\partial y}g$$

$$\frac{\partial}{\partial y}u = x\frac{\partial}{\partial y}g = -\frac{\partial}{\partial x}v = -y\frac{\partial}{\partial x}g,$$

tenemos

$$\frac{\partial g}{\partial x} = 2(1-x^2+y^2)(-2x) + 8xy^2 = 4x(-1+x^2+y^2)$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = 2(1-x^2+y^2)2y + 8x^2y = 4y(1+x^2+y^2)$$

Remplazando, obtenemos:

$$4x^2(-1+x^2+y^2) = 4y^2(1+x^2+y^2)$$

$$4yx(1+x^2+y^2) = -4yx(-1+x^2+y^2)$$

(0,5)

De la segunda ecuación obtenemos

$$xy(x^2+y^2) = 0,$$

Observamos que si $x = y = 0$, es decir $z = 0$, se cumple C-R, pero si $z \neq 0$, obtenemos $xy = 0$, remplazando esto en la primera ecuación, obtenemos

$$x^2(-1+x^2) = y^2(1+y^2),$$

de esta forma si $x = 0$, entonces $y^2(1+y^2) = 0$, lo que implica que $y = 0$, es decir $z = 0$. Pero si $y = 0$, entonces $x^2(x^2-1) = 0$, lo que implica que $x = 0$ o $x = \pm 1$. De esta manera los puntos donde f es diferenciable son

$$z = 0, \quad z = 1, \quad z = -1.$$

(0,5)

b) Consideremos $f(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} n(n+1)z^n$, el radio de convergencia esta dado por

$$R = \frac{1}{\limsup_n n^{\frac{1}{n}}(n+1)^{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{\lim_n n^{\frac{1}{n}}(n+1)^{\frac{1}{n}}} = 1,$$

(0,5)

Sea $z \in D(0,1)$ y consideremos $g(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} nz^{n+1}$, claramente $g'(z) = f(z)$, y

$$g(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} nz^{n+1} = z^2 \sum_{n=1}^{+\infty} nz^{n-1}.$$

Definamos $h(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} z^n$, la cual cumple

$$h'(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} nz^{n-1},$$

de esta forma tenemos

$$f(z) = (z^2h'(z))' = 2zh'(z) + z^2h''(z).$$

(1,0)

Por otro lado, usando la serie geométrica, obtenemos

$$h(z) = \frac{z}{1-z} \Leftrightarrow h'(z) = \frac{1}{(z-1)^2}, \wedge\ h''(z) = \frac{-2}{(z-1)^3},$$

remplazando

$$f(z) = \frac{2z}{(z-1)^2} - \frac{2z^2}{(z-1)^3} = \frac{2z(z-2)}{(z-1)^3} \quad \forall z \in D(0,1).$$

(0,5)

c) Tomando $z = z_0 + ae^{i\theta}$, para $\theta \in [0, 2\pi)$, tenemos

$$\begin{aligned}
\int\limits_{|z-z_0|=a} p(z)d\overline{z} &= \int_0^{2\pi} p(z_0 + ae^{i\theta})\overline{aie^{i\theta}}d\theta \\
&= -ai\int_0^{2\pi} p(z_0 + ae^{i\theta})e^{-i\theta}d\theta \\
&= -ai\sum_{k=0}^{N} c_k \int_0^{2\pi} \left(ae^{i\theta}\right)^k e^{-i\theta}d\theta \\
&= -ai\sum_{k=0}^{N} c_k a^k \int_0^{2\pi} e^{i(k-1)\theta}d\theta
\end{aligned}$$ (1,0)

pero, para $k \neq 1$,

$$\int_0^{2\pi} e^{i(k-1)\theta}d\theta = \int_0^{2\pi} (\cos((k-1)\theta) + i\mathrm{sen}((k-1)\theta))\, d\theta = 0$$

y $\int_0^{2\pi} e^{i0\theta}d\theta = 2\pi$. Remplazando obtenemos (0,5)

$$\int\limits_{|z-z_0|=a} p(z)d\overline{z} = -aic_1 a2\pi = -2ia^2\pi p'(z_0),$$ (0,5)

pues $c_1 = p'(z_0)$, lo cual prueba lo pedido.

P3).

a) Calcule

$$\oint_\Gamma \frac{e^z}{\mathrm{sen}(z) - 2}dz,$$

recorrida en sentido antihorario, para la curva $\Gamma = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = a\}$, para los casos $a = 1$ y $a = 2$.
Ind.: $1{,}31 < -\ln(2-\sqrt{3}) = \ln(2+\sqrt{3})$.

b) Sea $a > 1$ y consideremos el polinomio a coeficientes reales $p(z) = z^2 + 1 - 2az$, donde $r_1 < r_2$ son las raíces de p. Pruebe que

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1}\left(\frac{z^n}{z-r_1} - \frac{z^n}{z-r_2}\right)dz = r_1^n, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

y deduzca que $\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1}\frac{z^n}{p(z)}dz = 2\pi i\frac{r_1^n}{r_1 - r_2}$, donde las curvas están recorridas en sentido anti horario.

Respuesta:

a) Para poder calcular la integral, debemos determinar donde $\mathrm{sen}(z) - 2$ es cero, es decir

$$\mathrm{sen}(z) - 2 = 0 \;\Leftrightarrow\; e^{iz} - e^{-iz} = 4i \;\Leftrightarrow\; e^{2iz} - 4ie^{iz} - 1 = 0,$$

definamos $w = e^{iz}$, de esta forma $w^2 - 4iw - 1 = 0$, resolviendo esta ecuación de segundo grado, obtenemos las raíces

$$w_{1,2} = \frac{4i \pm \sqrt{-16+4}}{2} = 2i \pm \sqrt{3}i,$$ (1,0)

definamos $w_1 = 2i + \sqrt{3}i = e^{iz_1}$ y $w_2 = 2i - \sqrt{3}i = e^{iz_2}$, de esta manera como estos números no tienen parte real, el ángulo es $\pi/2$, pero como la función EXP es periódica, obtenemos

$$iz_{1,2} = \ln(2 \pm \sqrt{3}) + i\frac{\pi}{2} + 2k\pi i, \quad \forall k \in \mathbb{Z},$$ (1,0)

de esta forma, utilizando la indicación tenemos que

$$|z_{1,2}|^2 = \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)^2 + \left(\ln(2 \pm \sqrt{3})\right)^2 \geq \frac{\pi^2}{4} + \left(\ln(2 \pm \sqrt{3})\right)^2 > 2.$$

Es decir, la función $\operatorname{sen}(z)-2$ no tiene ceros en el interior del circulo de centro cero y radio 2, por lo tanto utilizando Cauchy-Goursat obtenemos

$$\oint_{\Gamma} \frac{e^z}{\operatorname{sen}(z)-2}\,dz = 0,$$

(1,0)

para $a = 1$ y $a = 2$.

b) Obtengamos las raíces de $p(z) = z^2 + 1 - 2az$,

$$p(z) = (z-a)^2 + 1 - a^2 = 0, \quad \Leftrightarrow \quad z = a \pm \sqrt{a^2-1}.$$

(1,0)

por lo tanto $r_1 = a - \sqrt{a^2-1}$ el cual resulta ser menor que uno, es decir $0 < r_1 < 1$ y $r_2 = a + \sqrt{a^2-1} > 1$, de esta forma r_1 es el único que esta en el interior del circulo unitario, luego utilizando Cauchy-Goursat obtenemos

$$\int_{|z|=1} \frac{z^n}{z-r_2}\,dz = 0.$$

(1,0)

Por otro lado, dado que r_1 esta en el interior del circulo unitario, usando la formula de Cauchy, tenemos

$$r_1^n = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1} \frac{z^n}{z-r_1}\,dz,$$

lo que prueba

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1}\left(\frac{z^n}{z-r_1} - \frac{z^n}{z-r_2}\right)dz = r_1^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

De la ecuación anterior, tenemos

$$\begin{aligned} r_1^n &= \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1}\left(\frac{z^n}{z-r_1} - \frac{z^n}{z-r_2}\right)dz \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1} z^n\left(\frac{r_1-r_2}{(z-r_1)(z-r_2)}\right)dz, \end{aligned}$$

pero $p(z) = (z-r_1)(z-r_2)$, remplazando obtenemos

$$r_1^n = \frac{(r_1-r_2)}{2\pi i}\int_{|z|=1} \frac{z^n}{p(z)}\,dz,$$

(1,0)

lo que prueba lo solicitado.