Universidad de Chile.
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas.
Departamento de Ingeniería Matemática.

Control 2 MA2002-01 Cálculo Avanzado y Aplicaciones
Profesor: Jaime González E.
Auxiliar: Carlos Duarte C.
Semestre Verano 2009
Fecha: Lunes 11 de Enero de 2010

Todas las respuestas deben ser justificadas. Entregar las preguntas en hojas separadas. Cada pregunta vale un tercio de la nota final.

P1.-
a) **(2.0 pts)** Obtenga la representación polar y cartesiana de $i^{log(1+i)}$.

b) **(2.0 pts)** Determine las condiciones para z de modo que:

$$\left|\frac{z-iw}{i-\overline{z}w}\right| = 1$$

c) **(2.0 pts)** Sea $z \in \mathbb{C}$ y $w = z^2 + 2 \cdot (Im(z))^2$. Determine y grafique los conjuntos:
A: todos los z tales que $w = 2 + i$.
B: todos los z tales que $|w| < 1$ y $Im(w) > 1$.

Solución:

a) Aplicando logaritmo:

$$\begin{aligned}
\log(z) &= \log(i) \cdot \log(1+i) \\
&= [\log|i| + i\arg(i)][\log|1+i| + i\arg(i+1)] \\
&= \frac{i\pi}{2}\left[\log\sqrt{2} + \frac{i\pi}{4}\right] \\
&= -\frac{\pi^2}{8} + \frac{i\pi\log\sqrt{2}}{2}
\end{aligned} \tag{1}$$

Luego

$$z = e^{-\frac{\pi^2}{8}} e^{\frac{i\pi\log\sqrt{2}}{2}}$$

Como la representación polar es de la forma $z = re^{i\theta}$ tenemos que

$$r = e^{-\frac{\pi^2}{8}} \quad \theta = \frac{\pi\log\sqrt{2}}{2}$$

Por otra parte de la fórmula de Euler $e^{ix} = \cos(x) + i\,\mathrm{sen}(x)$, se tiene la representación cartesiana:

$$z = e^{-\frac{\pi^2}{8}} \cos\left(\frac{\pi \log\sqrt{2}}{2}\right) + ie^{-\frac{\pi^2}{8}}\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi \log\sqrt{2}}{2}\right)$$

b) La expresión es equivalente a:

$$\frac{(z - iw)\overline{(z - iw)}}{(i - \overline{z}w)\overline{(i - \overline{z}w)}} = 1$$

Luego:

$$(z - iw)\overline{(z - iw)} = (i - \overline{z}w)\overline{(i - \overline{z}w)}$$
$$(z - iw)(\overline{z} + i\overline{w}) = (i - \overline{z}w)(-i - z\overline{w})$$
$$|z|^2 + iz\overline{w} - iw\overline{z} + |w|^2 = 1 - iz\overline{w} + iw\overline{z} + |z|^2|w|^2$$

Igualando parte real e imaginaria:

$$\begin{aligned} |z|^2 + |w|^2 &= 1 + |z|^2|w|^2 && (2) \\ z\overline{w} - w\overline{z} &= -z\overline{w} + w\overline{z} && (3) \\ & && (4) \end{aligned}$$

De (2) se tiene que $|z| = 1$ si $|w| \neq 1$
De (3) se tiene que $2(z\overline{w} - w\overline{z}) = Im(z\overline{w}) = 0$.

c) Sea $z = x + iy$, al reemplazar en la ecuación:

$$w = (x + iy)^2 + 2y^2$$

Para el conjunto A $w = 2 + i$ luego igualando parte real e imaginaria:

$$x^2 + y^2 = 2 \quad 2xy = 1$$

Igualando ambas ecuaciones:

$$\left(\frac{1}{2y}\right)^2 + y^2 = 2 \Rightarrow y^2 = 1 \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Lo que implica la existencia de cuatro puntos, dados por (ver figura):

$$\left(\frac{1}{\pm 2\sqrt{1 \pm \frac{\sqrt{3}}{2}}}, \sqrt{1 \pm \frac{\sqrt{3}}{2}}\right)$$

Para el conjunto B dadas las condiciones, se tiene:

$$x^2 + y^2 < 1 \quad 2xy > 1$$

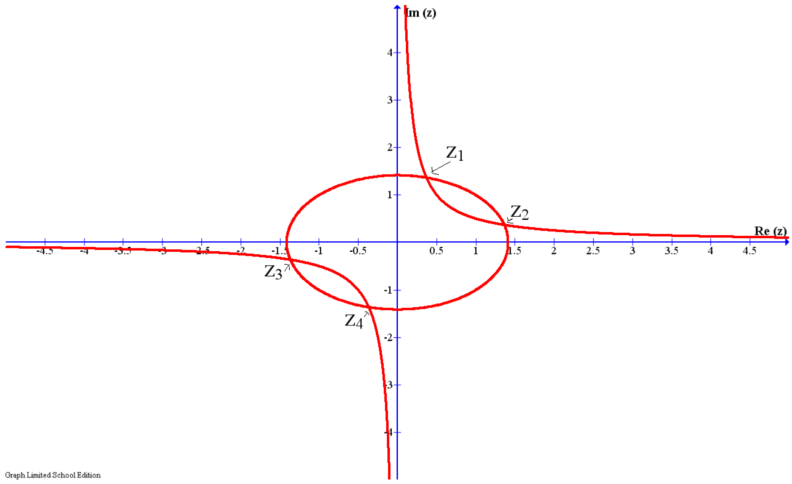

Figura 1: Problema 1 parte c. conjunto A

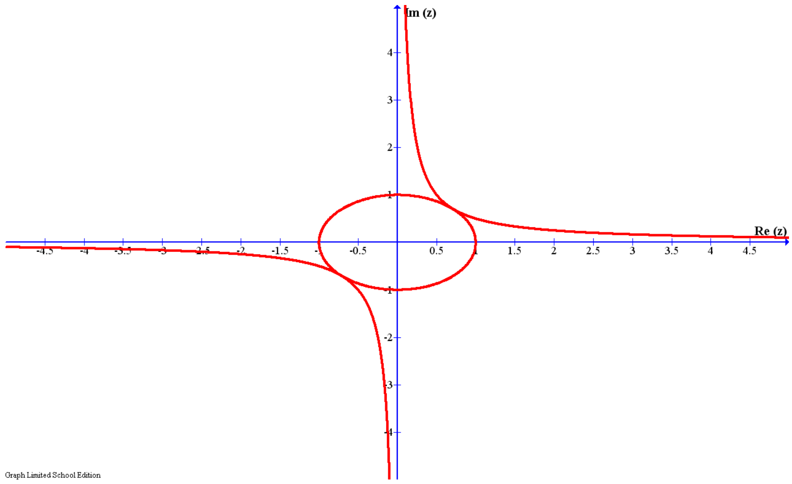

Figura 2: Problema 1 parte c. conjunto B

El conjunto es vacío ya que las curvas son tangentes entre si (se intersectan en $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ y $(-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$). Como las desigualdades son estrictas, no hay un conjunto de puntos que cumpla ambas desigualdades.(ver figura).

P2.-
a) **(3.0 pts)** Estudiar la derivabilidad y holomorfía de:

$$f(z) = 2Re(z)Im(z) + iMod(z)$$

Calculando $f'(z)$ cuando exista.

b) **(2.0 pts)** Sea f holomorfa en A abierto y sea g definida por:

$$g(z) = \overline{f(\overline{z})}$$

Determine si g es holomorfa en A. *Ind:* $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$.

c) **(1.0 pts)** Determine el radio y la región de convergencia de la serie.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{in}}{2n+1}(z-i)^{2n}$$

Solución:

a) Sea $z = x + iy$, luego la función en términos de x e y es:

$$f(z) = \underbrace{2xy}_{u(x,y)} + i \underbrace{\sqrt{x^2+y^2}}_{v(x,y)}$$

Debemos aplicar las condiciones de Cauchy-Riemann:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2y = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad (1)$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = 2x = -\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad (2)$$

$(1) \cdot x + (2) \cdot y$, llegamos a que $xy = 0$, para ello hay 3 posibilidades:
Si $x = 0$ e $y = 0$, esta opción no es válida ya que:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \nexists \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} -\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \nexists$$

Si $x \neq 0$ e $y = 0$ implica que $2\sqrt{x^2+y^2} = -1$ cosa que no puede ser ya que $\sqrt{x^2+y^2} \geq 0$.
Si $y \neq 0$ e $x = 0$ implica $2\sqrt{x^2+y^2} = 1$ lo que lleva a $x = 0$ e $y = \pm\frac{1}{2}$. Luego es derivable en $z = \pm\frac{i}{2}$:

Luego:

$$f'\left(\frac{i}{2}\right) = \lim_{h\to 0} \frac{f\left(h+\frac{i}{2}\right) - f\left(\frac{i}{2}\right)}{h} = 1$$
$$f'\left(-\frac{i}{2}\right) = \lim_{h\to 0} \frac{f\left(h-\frac{i}{2}\right) - f\left(-\frac{i}{2}\right)}{h} = -1$$

b) f es holomorfa en A ssi $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ con u, v C^1, además u y v satisfacen las condiciones de Cauchy-Riemann. Por otra parte $g(z)$ está bien definida en $z \in A \to \overline{z} \in A$ implica que $f(z) \in \mathbb{C}$ $g(z) \in \mathbb{C}$, existen U y V tales que:

$$g(z) = U(x,y) + iV(x,y) \Rightarrow g(z) = u(x,-y) - iv(x,-y)$$

Aplicando las condiciones de Cauchy-Riemann para g:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial y}$$
$$\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

Luego U y V cumple $C-R$ lo que implica que g es holomorfa en A.

c) Sea $k = 2n$ luego la serie se define por: $c_k = \frac{e^{\frac{ik}{2}}}{k+1}$ si k es par. $c_k = 0$ si k es impar.
$R^{-1} = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\sup|c_k|} = 1$ ya que $|e^{\frac{ik}{2}}| = 1$, luego la serie posee $R = 1$ con centro i, que es equivalente a que converge en el disco $D(i, 1)$.

P3.-
a) **(1.5 pts)** Sea f holomorfa en A abierto, que contiene a $z = 0$. Sea γ una curva contenida en A y que encierra a $z = 0$. Calcule:

$$\oint_\gamma \left(\frac{f(z)}{z^3} + iz^3 + \frac{2}{z}\right) f(z)dz$$

En términos de $f(0)$ y $f'(0)$.

b) **(1.5 pts)** Determine los ceros y polos (con sus órdenes) de la función:

$$f(z) = \frac{e^{2z}\operatorname{sen}(z)}{z^3(z+i)}$$

c) **(3.0 pts)** Calcule usando fórmulas de Cauchy y residuos:

$$\oint_\gamma f(z)dz$$

donde f es la función de la parte b) y $\gamma : |z-1-i| = r > 0$.

Solución:

a) Como $\frac{(f(z))^2}{z^3}$, $iz^3 f(z)$ y $\frac{2f(z)}{z}$ son holomorfas por álgebra de funciones holomorfas, podemos aplicar las fórmulas de Cauchy, y dividiendo la integral en tres:

$$I_1 = \oint_\gamma \frac{[f(z)]^2 dz}{z^3} = \frac{2\pi i}{2!}\left(f^2(0)\right)''$$

$$I_1 = \pi i[2f(0)f'(0)]' = 2\pi i[[f'(0)]^2 + f(0)f''(0)]$$

Por teorema de Cauchy-Goursat:

$$I_2 = \oint_\gamma iz^3 f(z)dz = 0$$

Finalmente calculamos:

$$I_3 = \oint_\gamma \frac{2f(z)dz}{z} = 2\frac{2\pi i}{0!}f(0) = 4\pi i f(0)$$

Luego:

$$\oint_\gamma \left(\frac{f(z)}{z^3} + iz^3 + \frac{2}{z}\right) f(z)dz = I_1 + I_2 + I_3 = 2\pi i[[f'(0)]^2 + f(0)f''(0) + 2f(0)]$$

b) Los ceros son tales que $\operatorname{sen}(z) = 0$ y $z^3(z+i) \neq 0$, esto nos lleva a que los ceros son $z_0 = k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$ y $k \neq 0$. Para ver el orden derivamos:

$$f'(z) = \frac{e^{2z}(\cos(z) + 2\operatorname{sen}(z))z^3(z+i) - e^{2z}\operatorname{sen}(z)(4z^3 + 3z^2 i)}{z^6(z+i)^2}$$

$$f'(z_0) = \frac{(-1)^k e^{2\pi k}}{(k\pi)^3(k\pi + i)} \neq 0$$

Luego el cero es de orden 1. Por otra parte los polos son $z_1 = 0$ y $z_2 = -i$:

$$\lim_{z\to 0} z^2 f(z) = \lim_{z\to 0}\frac{e^{2z}}{z+i}\cdot\frac{\operatorname{sen}(z)}{z} = \frac{1}{i} = -i \neq 0$$

$$\lim_{z\to -i}(z+i)f(z) = \lim_{z\to 0}\frac{e^{2z}\operatorname{sen}(z)}{z^3} = ie^{2i}\operatorname{sen}(i) \neq 0$$

Luego $z_1 = 0$ es un polo de orden 2 y $z_2 = -i$ es un polo de orden 1.
c) Sea $z_0 = 1 + i$, $z_1 = 0$ y $z_2 = -i$, con esto podemos determinar los límites de $r > 0$, así $|z_0 - z_1| = \sqrt{2}$ y $|z_0 - z_2| = \sqrt{5}$. Luego: Si $0 < r < \sqrt{2}$, por teorema de Cauchy-Goursat (ya que no encerramos ningún polo):

$$\oint_\gamma f(z)dz = 0$$

Si $\sqrt{2} < r < \sqrt{5}$, utilizamos la fórmula de Cauchy ya que encerramos un solo polo z_1:

$$\oint_\gamma \frac{g(z)}{z^2} dz = \frac{2\pi i}{1!} g'(0)$$

Con $g(z) = z^2 f(z) = \frac{e^{2z}\operatorname{sen}(z)}{z(z+i)}$. Ahora debo calcular $g'(z)$ y evaluar en $z = 0$:

$$g'(z) = \left(\frac{e^{2z}}{(z+i)} \cdot \frac{\operatorname{sen}(z)}{z} \right)'$$

$$g'(z) = \frac{\operatorname{sen}(z)}{z} \cdot \frac{2e^{2z}(z+i) - e^{2z}}{(z+i)^2} + \frac{e^{2z}}{(z+i)} \cdot \frac{z\cos(z) - \operatorname{sen}(z)}{z^2}$$

Aplicando límite cuando z tiende a 0 ($g'(0) = \lim_{z\to 0} g'(z)$), además:

$$\lim_{z\to 0} \frac{\operatorname{sen}(z)}{z} = 1 \quad \lim_{z\to 0} \frac{2e^{2z}(z+i) - e^{2z}}{(z+i)^2} = 1 - 2i \quad \lim_{z\to 0} \frac{e^{2z}}{(z+i)} = -i$$

Para el último límite usamos $L'Hopital$:

$$\lim_{z\to 0} \frac{z\cos(z) - \operatorname{sen}(z)}{z^2} = \lim_{z\to 0} \frac{-z\operatorname{sen}(z) + \cos(z) - \cos(z)}{2z} = 0$$

Por álgebra de límites:

$$\lim_{z\to 0} g'(z) = 1 - 2i$$

$$\oint_\gamma \frac{g(z)}{z^2} dz = \oint_\gamma f(z) dz = 2\pi i(1 - 2i)$$

Si $r > \sqrt{5}$, usamos el teorema del residuo:

$$\oint_\gamma f(z) dz = 2\pi i(Res(f, z_1) + Res(f, z_2))$$

Calculando los residuos (son resultados conseguidos anteriormente):

$$Res(f, z_1) = \lim_{z\to -i} (z+i) f(z) = \lim_{z\to 0} \frac{e^{2z}\operatorname{sen}(z)}{z^3} = ie^{2i}\operatorname{sen}(i)$$

$$Res(f, z_2) = \lim_{z\to 0} \frac{d}{dz}(z^2 f(z)) = \lim_{z\to 0} g'(z) = 1 - 2i$$

Así:

$$\oint_\gamma f(z) dz = 2\pi i(Res(f, z_1) + Res(f, z_2)) = 2\pi i(1 - 2i + ie^{2i}\operatorname{sen}(i))$$