# Control 2

**P1.** a) (2,0 ptos.) Resuelva la ecuación $e^z = \cos(iz)$.

b) (2,0 ptos.) Determine el conjunto $A$ de todos los $z \in \mathbb{C}$ donde

$$f(z) = z - i|z|^2 + \mathbb{R}\mathrm{e}(z)(\mathbb{I}\mathrm{m}(z))^2$$

es holomorfa (derivable en $\mathbb{C}$).

c) (2,0 ptos.) Determinar las funciones de variable real $s(y)$, $t(y)$, diferenciables (en $\mathbb{R}$) tales que $s(0) = 1$, $t(0) = 0$ de modo que la función compleja

$$f(x+iy) = e^x \cdot (s(y) + it(y))$$

sea holomorfa.

**Indicación:** Recordar que $u''(r) + a^2u(r) = 0$ tiene como solución general $u(r) = \alpha \operatorname{sen}(ar) + \beta \cos(ar)$.

**P2.** a) (4,0 ptos.) Sea $p(z) = \sum_{k=0}^{N} c_k(z-z_0)^k$ un polinomio de grado $N$ para $z_0 \in \mathbb{C}$. Demuestre que se cumple

$$\oint_\gamma p(z)d\overline{z} = -2\pi i p'(z_0)a^2 = -a^2 \oint_\gamma \frac{p'(z)}{z-z_0}dz,$$

donde $\gamma : |z-z_0| = a$, con $a > 0$.

**Nota:** $\oint_\gamma f(z)d\overline{z} = \int_c^d f(g(t))\overline{g'(t)}dt$, donde $g : [c,d] \to \mathbb{C}$ es una parametrización de $\gamma$.

**Indicación:** Recuerde que $c_k = \frac{p^{(k)}(z_0)}{k!}$.

b) (2,0 ptos.) Calcule la integral

$$\oint_\gamma \frac{z^2+1-e^z}{z^2(z-2)^2}dz,$$

donde $\gamma$ es la circunferencia $|z| = a$. Separe los casos $0 < a < 2$ y $a > 2$.

**P3.** a) (2,0 ptos.) Determine los polos (con sus órdenes) y los correspondientes residuos de la función:

$$f(z) = \frac{1-\cos(z)}{z^2 \operatorname{sen}(z)}.$$

b) (2,0 ptos.) Encuentre la serie de Taylor de la función

$$f(z) = \frac{z+1}{z(z+5)}$$

en torno al punto $z_0 = i$ y determine el radio de convergencia.

**Indicación:** Puede ser útil usar una descomposición en fracciones parciales.

c) (2,0 ptos.) Sea $g$ holomorfa en 0 con $g(0) \neq 0$ y $f(z) = \frac{g(z)}{z^k}$, con $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Pruebe que $p = 0$ es un polo de $\frac{f'(z)}{f(z)}$. Determine su orden y calcule su residuo.

Tiempo: 3 horas.

## Pauta P1 ( (a) y (b) ) CONTROL 2 MA2002 Prim-2010

**P1**

**(a)** Resolver la ecuación: $e^z = \cos(iz)$.

**Solución**: Como $\cos(w) = ½ (e^{iw} + e^{-iw})$, se tiene que

$e^z = \cos(iz)$ ssi $e^z = ½ (e^{iiz} + e^{-iiz})$ ssi $e^z = ½ (e^{-z} + e^z)$ ssi $2e^z = e^{-z} + e^z$

ssi $e^z = e^{-z}$ ssi $e^{2z} = 1$ ssi $2z = 2k\pi i$, k entero ssi $z = k\pi i$, k entero.

**(b)** Determine A = { z : f es holomorfa (derivable en C) }, donde

$$f(z) = z - i|z|^2 + \mathrm{Re}(z)(\mathrm{Im}(z))^2.$$

**Solución:** Primero, se debe notar que no se puede aplicar algebra de funciones relativa a la holomorfia (las funciones modulo, Re e Im no son holomorfas), y por lo tanto, se debe aplicar condiciones de Cauchy-Riemann, para lo cual se determina la representación cartesiana de f. Si $z = x+iy$, entonces

$f(z) = x + iy - i(x^2 + y^2) + xy^2$, implicando que $u(x,y) = x + xy^2$, $v(x,y) = y - x^2 - y^2$.

Claramente, u y v son funciones de clase $C^1(IR^2)$, por ser polinomios y, por lo tanto, f es derivable en $z = x+iy$ ssi $(x,y)$ es solución del sistema definido por las C.C-R:

(1) $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ ; (2) $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ ssi (1) $1 + y^2 = 1 - 2y$ ; (2) $2xy = -(-2x)$, i.e., $xy = x$

**(hasta aca: 1.0 punto)**

(1) implica $y = 0$ o $y = -2$, i.e., los puntos de las rectas $y = 0$ e $y = -2$ en $IR^2$ satisfacen (1)

(2) implica $x = 0$ o $y = 1$, i.e., los puntos de las rectas $x = 0$ e $y = 1$ en $IR^2$ satisfacen (2), y la intersección de ambos pares de rectas determinan las soluciones del sistema, las cuales son (0,0) y (0,-2), implicando que f es derivable en $z_1 = 0$ y $z_2 = -2i$.

**(resolucion del sistema: 0.7 puntos)**

Además, lo anterior implica que f no es holomorfa en ningún punto del plano complejo, ya que por definición, f es holomorfa en un punto si es derivable en una vecindad del punto (lo que no se cumple en este caso para f en $z_1$ ni en $z_2$).

**(conclusión sobre holomorfia: 0.3 puntos)**

PAUTA C2 P1 c) Y P2 P2 a)

P1 c) determinar $s(y)$ y $t(y)$ tal que la función compleja $f(x+iy) = e^x(s(y)+it(y))$ sea holomorfa con $s(0) = 1$ y $t(0) = 0$

Solución: $f$ debe satisfacer las condiciones de Cauchy-Riemann (0,5 puntos), luego si llamamos $u(x,y) = e^x s(y)$ a la parte real de $f$ y $v(x,y) = e^x t(y)$ a la parte imaginaria de $f$, debemos tener:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

reemplazando y simplificando por $e^x$ (función que nunca se anula) llegamos a

$$s(y) = t'(y) \quad s'(y) = -t(y)$$

De la primera ecuación deducimos que $t'$ es una función diferenciable, a su vez de la segunda ecuación deducimos que $s'$ es diferenciable. Además se obtiene que $t'' + t = 0$, por lo que $t(y) = a\cos y + b\sin y$ para ciertas constantes $a$ y $b$. Luego $s(y) = t'(y) = -a\sin y + b\cos y$. Reemplazando las condiciones iniciales en estas expresiones tenemos que $s(y) = \cos(y)$, $t(y) = \sin(y)$ es decir

$$f(x,y) = e^x(\cos y + i\sin y)$$

(todo este analisis 1 punto)

Como $u(x,y) = e^x \cos y$ y $v(x,y) = e^x \sin y$ son funciones cuyas derivadas parciales son continuas deducimos que son Fréchet diferenciable, esto junto con las condiciones de Cauchy-Riemann nos da la conclusión de que $f$ es holomorfa. (0,5 puntos)

P2 a)

Se deben demostrar 2 igualdades. La primera tiene un total de 3 puntos mientras que la segunda 1 punto.

La segunda igualdad es una consecuencia directa del Teorema Integral de Cauchy (teorema 10.1.1 de los apuntes) las hipótesis del teorema se cumplen trivialmente (1 punto).

La primera igualdad debemos parametrizar el círculo de centro $z_0$ y de radio $a$, lo estándar es tomar $\gamma(\theta) = z_0 + ae^{i\theta}$ con $\theta \in [0, 2\pi]$, luego $\gamma'(\theta) = aie^{i\theta}$ y siguiendo la Nota: $\overline{\gamma'(\theta)} = -aie^{-i\theta}$. Reemplazando tenemos

$$\begin{aligned}
\int_{|z-z_0|=a} p(z)\, d\bar{z} &= \int_0^{2\pi} \sum_{n=0}^{N} c_n (ae^{i\theta})^n (-aie^{-i\theta})\, d\theta \quad \text{(1 punto*)} \\
&= \sum_{n=0}^{N} \int_0^{2\pi} c_n (ae^{i\theta})^n (-aie^{-i\theta})\, d\theta \\
&= -ai \left[ \int_0^{2\pi} c_0 e^{-i\theta}\, d\theta + \int_0^{2\pi} c_1 a\, d\theta + \sum_{n=1}^{N-1} \int_0^{2\pi} a^n e^{in\theta}\, d\theta \right]
\end{aligned}$$

como $\int_0^{2\pi} e^{ik\theta}\, d\theta = 0$ para todo $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ (1 punto) se tiene que de la expresión anterior el único sumando que "sobrevive" es el segundo, por lo que

$$\int_{|z-z_0|=a} p(z)\, d\bar{z} = -a^2 ic_1 \int_0^{2\pi} = -2\pi i p'(z_0) a^2. \quad \text{(1 punto)}$$

donde hemos reemplazado $c_1$ por $p'(z_0)$, tal como dice la indicación.

*Me parece que todo lo hecho hasta aquí es más o menos rutinario, no creo que se deba asignar mas puntaje por lo hecho hasta ahora, lo más importante es lo que viene a continuación.

## Pauta P2 (b) CONTROL 2 MA2002 Prim-2010

**P2.**

**(b)** Calcule la integral

$$I = \int_\gamma f(z)dz = \int_\gamma \frac{z^2+1-e^z}{z^2(z-2)^2}dz, \text{ donde } \gamma : |z| = a$$

**Solución**: Se consideran los casos $0 < a < 2$ y $a > 2$.

**Caso 0<a<2.**

**( 0.2 puntos)** Claramente, la función f es holomorfa en $\gamma \cup Int(\gamma)$ - {0} ( $Int(\gamma)$ es la región encerrada por $\gamma$), y por el T. de los residuos se tiene que $I = 2\pi i$ Res(f, 0).

**( 0.4 puntos)** Para el calculo del Res(f,0) se debe determinar el tipo de singularidad de z = 0:

$\lim_{z\to 0} f(z) = \lim_{z\to 0} (z^2 + 1 - e^z)/(z^2(z-2)^2)$ = (L'H)

$= \lim_{z\to 0} (2z - e^z)/(2z(z-2)^2 + 2z^2(z-2)) = -1/0$,

lo que implica que z=0 es singularidad no-reparable, i.e., es un posible polo.

**( 0.4 puntos)** Se determina si es polo simple:

$\lim_{z\to 0} zf(z) = \lim_{z\to 0} (z^2 + 1 - e^z)/(z(z-2)^2)$ = (LH) $\lim_{z\to 0} (2z - e^z)/((z-2)^2 + 2z^2(z-2))$

$= \lim_{z\to 0} (2z - e^z)/((z-2)^2 + 2z^2(z-2)) = -1/4$,

i.e., z=0 es polo simple y su residuo es $\lim_{z\to 0} zf(z) = -1/4$. Por lo tanto, $I = -\tfrac{1}{2}\pi i$.

**Caso a>0.**

**( 0.5 puntos)** En este caso $\gamma$ encierra a $z_1 = 0$ y $z_2 = 2$. Por el caso anterior, f no es holomorfa en $z_1 = 0$. Además, como $f(z) = g(z)/(z-2)^2$, con $g(z) = (z^2 + 1 - e^z)/z^2$, resulta que z = 2 es polo de orden 2 de f, ya que g es holomorfa en z = 2 y $g(2) = (5 - e^2)/4 \neq 0$.

**( 0.5 puntos)** Por el T. de los residuos resulta que $I = 2\pi i$ [Res(f, 0) + Res(f, 2)], y por el caso anterior basta calcular el Res(f, 2).

El residuo de f en z = 2 es

Res(f,2) = $\lim_{z\to 2} d[(z-2)^2 f(z)]/dz = \lim_{z\to 2} [(z^2 + 1 - e^z)/z^2]'$ =

$= \lim_{z\to 2} \{(2z - e^z)z^2 - (z^2 + 1 - e^z)2z\}/z^4 = \{(4 - e^2) - (5 - e^2)\}/4 = -1/4$

y este resultado junto con el del caso anterior implica que

$I = 2\pi i$ [Res(f, 0) + Res(f, 2)] = $2\pi i(-1/4 + (-1/4)) = -\pi i$.

## Pauta P3 (a) CONTROL 2 MA2002 Prim-2010

**P3**

**(a)** Determine los polos (y sus órdenes) y los correspondientes residuos de la función:

$$f(z) = \frac{1-\cos(z)}{z^2 sen(z)}$$

**Solución:**

w es polo de f ssi $\lim_{z \to w} f(z)$ no existe y su orden p es el primer entero positivo tal que

$\lim_{z \to w} (z-w)^p f(z)$ existe y es no-nulo.

Para la función dada, z = 0 y z = k$\pi$ , k entero, son los únicos puntos candidatos a polos de f (para cualquier otro entero z, la función del denominador es holomorfa y no-nula en z).

**Caso z = 0.**

**( 0.6 puntos)** Se determina si es reparable o no.

$$\lim_{z \to 0} f(z) = \lim_{z \to 0} \frac{1-\cos(z)}{z^2 sen(z)} = \text{(L'H)} \lim_{z \to 0} \frac{sen(z)}{2z sen(z) + z^2 \cos(z)} =$$

$$= \text{(L'H)} \lim_{z \to 0} \frac{\cos(z)}{2sen(z) + 2z\cos(z) + 2z\cos(z) - z^2 sen(z)} = \frac{1}{0},$$

y esto implica que z=0, no es reparable.

**( 0.6 puntos)** Se determina si existe p que cumple la definición de orden para z=0.
Para p=1, se tiene

$$\lim_{z \to 0} z\, f(z) = \lim_{z \to 0} \frac{1-\cos(z)}{z sen(z)} = \text{(L'H)} \lim_{z \to 0} \frac{sen(z)}{sen(z) + z\cos(z)} = \text{(L'H)}$$

$$= \text{(L'H)} \lim_{z \to 0} \frac{\cos(z)}{\cos(z) + \cos(z) - z sen(z)} = \frac{1}{2},$$

con lo cual se concluye que z=0 es un polo de orden 1 de f.

**Un argumento alternativo para z=0**: (puntaje asignado = 1.2 puntos)
Como cos(z) = 1 – $z^2/2! + z^4/4! + \cdots$, (en torno a z=0), se cumple que
1-cos(z) = $z^2/2! - z^4/4! + \cdots = z^2( ½ - z^2/4! + z^4/6! + \cdots = z^2$g(z), donde g es holomorfa en z=0 y g(0) = ½ . ( 0.4 puntos)
Ademas, sen(z) = $z - z^3/3! + z^5/5! + \cdots = z(1 – z^2/3! + z^4/5! - \cdots )$ = zh(z), donde h es holomorfa en z=0 y h(0) = 1. ( 0.4 puntos)

Lo anterior implica que f(z) = $\frac{g(z)}{zh(z)} = \frac{F(z)}{z}$, donde F(z) = $\frac{g(z)}{h(z)}$ es holomorfa en z=0 y F(0)= $\frac{1}{2}$
concluyendo que z=0 es un polo de orden 1 de f. ( 0.4 puntos)

**Caso z = k$\pi$ .**

**( 0.4 puntos)** Si k es impar, cos(k$\pi$ ) = -1, implica f(k$\pi$ ) = 2/0, i.e., $z_k$ = k$\pi$ no es reparable.
Se determina el orden de $z_k$.

$$\lim_{z \to k\pi} (z-k\pi) f(z) = \lim_{z \to k\pi} \frac{(z-k\pi)(1-\cos(z))}{z^2 sen(z)} = \text{(L'H} \lim_{z \to k\pi} \frac{1-\cos(z) + (z-k\pi)sen(z)}{2z sen(z) + z^2\cos(z)} = \frac{-2}{(k\pi)^2}$$

lo que implica que $z_k$ = k$\pi$ es un polo de orden 1 de f si k es impar.

**( 0.4 puntos)** Si k es par, f(k$\pi$ ) = 0/0. Se determina si z = k$\pi$ es reparable.

$$\lim_{z \to k\pi} f(z) = \lim_{z \to k\pi} \frac{1-\cos(z)}{z^2 sen(z)} = \text{(L'H)} \lim_{z \to k\pi} \frac{sen(z)}{2z sen(z) + z^2\cos(z)} = 0,$$

implicando que z = k$\pi$ es reparable (para la función reparada z = k$\pi$ es un cero), si k es par.

## Pauta P3(b) CONTROL 2 MA2002 Prim – 2010

**P3.**

**(b)** Encuentre la serie de Taylor de la función $f(z) = \dfrac{z+1}{z(z+5)}$ en torno a $z_0 = i$,

y determine el radio de convergencia.

**Solución:**

**( 0.2 puntos)** Claramente, f tiene polos en $z_1 = 0$ y $z_2 = -5$, ambos de orden 1, ya que $f = g(z)/z(z+5)$, donde $g(z) = z+1$ es holomorfa (es un polinomio) y $g(0) = 1$ y $g(5) = 6$.

**( 0.3 puntos)** Como el desarrollo es en torno a $z_0 = i$, el radio de convergencia de la serie es $r = \min \{ |z_0 - z_1|, |z_0 - z_2| = \min \{ | i |, | |i - (-5)| \} = \min \{ 1, \sqrt{26} \} = 1$, (i.e., la region de convergencia de la serie pedida es el disco D(i, 1)).

Serie de Taylor de f en torno a $z_0 = i$.

**( 0.5 puntos)** Primero, se obtiene la descomposición de f en fracciones parciales:

$\dfrac{z+1}{z(z+5)} = \dfrac{A}{z} + \dfrac{B}{z+5}$, implicando $A(z+5) + Bz = z+1$ ssi $A = 1/5$ y $B = 4/5$.

Se determinan las series de potencias (Taylor) de $1/z$ y $1/(z+5)$, en torno a $z_0 = i$, mediante el calculo de los coeficientes de la serie en términos de las derivadas de orden superior en $z_0=i$,

$$f(z) = \sum_{n\geq 0} c_n (z-i)^n, \text{ donde } c_n = f^{(n)}(i)/n!$$

**( 0.5 puntos)** Para la función $1/z$,

$$g(z) = \frac{1}{z} = \sum_{n\geq 0} a_n (z-i)^n, \text{ donde } a_n = g^{(n)}(i)/n!$$

$g'(z) = -z^{-2}$ ; $g''(z) = 2z^{-3}$ ; $g'''(z) = -2 \cdot 3\, z^{-4}$ ; $g^{(iv)}(z) = 2 \cdot 3 \cdot 4\, z^{-5}$ ; . . . $g^{(n)}(z) = (-1)^n n! z^{-(n+1)}$,

y, por lo tanto,

$$a_n = (-1)^n n! i^{-(n+1)}/n! = (-1)^n i^{-(n+1)}$$

**( 0.2 puntos)** Para la función $1/(z+5)$,

$$h(z) = \frac{1}{z+5} = \sum_{n\geq 0} b_n (z-i)^n, \text{ donde } b_n = h^{(n)}(i)/n!$$

Como la función h es del mismo tipo que la función g, el desarrollo del caso anterior implica que

$$h^{(n)}(z) = (-1)^n n!(z+5)^{-(n+1)}/n! \text{ , y } b_n = (-1)^n (5+i)^{-(n+1)} .$$

**( 0.3 puntos)** Además, como ambas series convergen en D(i,1), la suma ponderada de tales series también converge en D(i,1), y se cumple que

$$(1/5) \sum_{n\geq 0} a_n (z-i)^n + (4/5) \sum_{n\geq 0} b_n (z-i)^n = (1/5)g(z) + (4/5)h(z) = f(z)$$

y por la unicidad de la serie de Taylor, se concluye que

$$c_n = (1/5)a_n + (4/5)b_n = (-1)^n( i^{-n-1} + 4(5+i)^{-n-1})/5$$

## Pauta P3 (c) CONTROL 2 MA2002 Prim-2010

**P3**

**(c)** Sea g holomorfa en z=0 con $g(0)\neq 0$, y sea f(z) = g(z)/$z^k$ para k entero positivo. Pruebe que p = 0 es un polo de f '/f. determine su orden y calcule su residuo.

**Solución:**

p=0 es polo de f '/f ssi $\lim_{z\to 0} \frac{f'(z)}{f(z)}$ no existe y su orden m es el primer entero positivo tal que

$$\lim_{z\to 0} z^m \frac{f'(z)}{f(z)},$$ existe y es no-nulo.

**( 1.2 puntos)** Se demuestra que p=0 es una singularidad no reparable de f ' /f.
La definición de f implica

$$f'(z) = (g(z)/z^k)' = \frac{g'(z)z^k - g(z)kz^{k-1}}{z^{2k}} = \frac{zg'(z) - kg(z)}{z^{k+1}}$$

y, por lo tanto,

$$\lim_{z\to 0} \frac{f'(z)}{f(z)} = \lim_{z\to 0} \frac{zg'(z)-kg(z)}{z^{k+1}} . \frac{z^k}{g(z)} = \text{(L'H)} \lim_{z\to 0} \frac{zg'(z)-kg(z)}{zg(z)} = \frac{-kg(0)}{0},$$

lo que prueba que p=0 es una singularidad no reparable de f '/f (posible polo).

**( 0.6 puntos)** Se determina si existe m que cumple la definición de orden para p=0.
Para m = 1

$$\lim_{z\to 0} z\frac{f'(z)}{f(z)} = \lim_{z\to 0} \frac{zg'(z)-kg(z)}{g(z)} = -k$$

y esto implica que p=0 es un polo de orden 1.

**( 0.2 puntos)** Como p=0 es un polo de orden 1 de la función f '/f, el residuo de f '/f es

$$\text{Res}(f'/f, 0) = \lim_{z\to 0} z\frac{f'(z)}{f(z)}$$

y el calculo anterior implica que Res(f '/f) = -k