Pauta Auxiliar 7

P1 Como f y $\bar{f}$ son funciones holomorfas, en particular cumplen las condiciones de Cauchy-Riemann:

Para f $\rightarrow$ $\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} & ① \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x} & ② \end{cases}$ Para $\bar{f}$ $\rightarrow$ $\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = -\dfrac{\partial v}{\partial y} & ③ \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{\partial v}{\partial x} & ④ \end{cases}$

Pero ①+③ $\rightarrow$ $2\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0 \Rightarrow u = u(y)$

②+④ $\rightarrow$ $2\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0 \Rightarrow u \approx$ constante

④-② $\rightarrow$ $2\dfrac{\partial v}{\partial x} = 0 \Rightarrow v = v(y)$

①-③ $\rightarrow$ $2\dfrac{\partial v}{\partial y} = 0 \Rightarrow v \approx$ constante

$\Rightarrow f = u + iv \approx$ constante //

P2) Como $g(z)$ es una función holomorfa

Por (C-R)

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2x}{x^2+y^2} + 1 = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\Rightarrow v(x,y) = \int \frac{2x}{x^2+y^2} + 1 \, dy$$

$$\Rightarrow v(x,y) = y + 2\int \frac{\frac{1}{x}}{1+(y/x)^2} \, dy$$

$$\Rightarrow v(x,y) = y + 2\arctan(y/x) + C(x)$$

Por (C-R)

$$\Rightarrow \frac{\partial v}{\partial x} = C'(x) - \cancel{\frac{2y}{x^2+y^2}} \cdot \frac{x^2}{x^2} = -\frac{\partial u}{\partial y} = 2 - \cancel{\frac{2y}{x^2+y^2}}$$

$$\Rightarrow C'(x) = 2 \Rightarrow C(x) = 2x + K.$$

$$\Rightarrow v(x,y) = 2\arctan(y/x) + y + 2x + K$$

Pero $g(1) = 1 - i \Rightarrow x = 1 \wedge y = 0$ (Así $z = 1$)

$$\Rightarrow g(1) = 1 + i(2+K) = 1 - i$$

$$\Rightarrow 2 + K = -1 \Rightarrow \boxed{K = -3}$$

$$\therefore \; v(x,y) = 2\arctan(y/x) + y + 2x - 3 \; //$$

P3) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(n+a^n)z^n = \sum_{n=0}^{\infty} n z^n + \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^n$

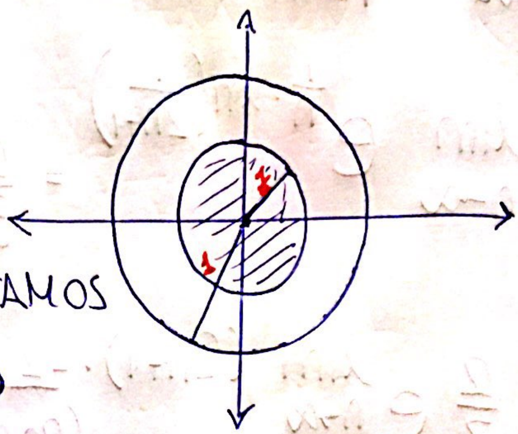
a)

① ②

PARA ① $\displaystyle\frac{1}{R_①} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = \lim_{n\to\infty} 1+\frac{1}{n} = 1 \Rightarrow R_① = 1$

PARA ② $\displaystyle\frac{1}{R_②} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a|^n} = \lim_{n\to\infty} a = a \Rightarrow R_② = \frac{1}{a}$

EN UN DIBUJO:



LUEGO PARA QUE AMBAS SERIES CONVERJAN NECESITAMOS QUE EL RADIO SEA MÍNIMO

$$\Rightarrow R = \min\{R_①, R_②\} = \frac{1}{a}$$

$$D = \{ z \in \mathbb{C} : |z| < \frac{1}{a} \}$$

b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{in}}{2n+1} \left(\frac{2}{3i}\right)^n (z+4i)^n \Rightarrow \begin{cases} a_n = \frac{e^{in}}{2n+1}\left(\frac{2}{3i}\right)^n \\ z_0 = -4i \end{cases}$

$$\Rightarrow \frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{e^{in}}{2n+1}\right| \left|\frac{2}{3i}\right|^n}$$

$$= \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{2n+1} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n} = \limsup_{n\to\infty} \frac{2}{3} \sqrt[n]{\frac{1}{2n+1}}$$

$$= \frac{2}{3} \lim_{n\to\infty} e^{\frac{1}{n} \cdot \ln\left(\frac{1}{2n+1}\right)} = \frac{2}{3} e^{\lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(\frac{1}{2n+1}\right)}{n}}$$

$$\overset{L'H}{=} \frac{2}{3} e^{\lim_{n\to\infty} (2n+1) \cdot \frac{-2}{(2n+1)^2}} = \frac{2}{3} e^0 = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow R = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow D = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z+4i| < \tfrac{3}{2} \}$$

Scanned by CamScanner

c) $\sum_{n=1}^{\infty} n!(z-i)^{n!} \xrightarrow{\text{ESTO ES}} (z-i)+2(z-i)^2+6(z-i)^6+\dots$

$\Rightarrow$ NO TOMA TODAS LAS POTENCIAS !!!

LO REPARAMOS REDEFINIENDO $\sum_{n=1}^{\infty} n!(z-i)^{n!}$ COMO $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k$

DONDE $z_0=i$ y $a_k=\begin{cases} k & \text{si } k=n! \text{ PARA ALGÚN } n\in\mathbb{N} \\ 0 & \text{si NO} \end{cases}$

ASÍ $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k \xrightarrow{\text{SE VE}} 0(z-i)^0+1\cdot(z-i)^1+2(z-i)^2+0\cdot(z-i)^3$
$+0\cdot(z-i)^4+\dots$ y ASÍ TOMAMOS TODAS LAS POTENCIAS

$\rightarrow$ COMO limsup ES EL MAYOR DE LOS PUNTOS DE ACUMULACIÓN DE a_k, SALDRÁN DE LA PARTE NO NULA:

$$\Rightarrow \frac{1}{R}=\limsup_{k\to\infty}\sqrt[k]{|k|}=\limsup_{k\to\infty} k^{1/k}=1$$

$$\Rightarrow R=1$$

$$\Rightarrow D=\{z\in\mathbb{C}: |z|<1\}$$

P4 Notemos que $\left(\frac{\log(1+z^2)}{2}\right)' = \frac{z}{1+z^2}$

Luego $\frac{1}{1-(-z^2)} = \sum_{n\geq 0} (-z^2)^n \quad | \quad |z|<1$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+z^2} = \sum_{n\geq 0} (-1)^n (z)^{2n} \quad | \quad |z|<1$$

$$\Rightarrow \frac{z}{1+z^2} = \sum_{n\geq 0} (-1)^n \cdot (z)^{2n+1} \quad | \quad |z|<1$$

$$\Rightarrow \frac{\log(1+z^2)}{2} = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n \cdot z^{2n+2}}{2n+2} + C$$

y como $\frac{\log(1+0^2)}{2} = 0 \Rightarrow \boxed{0 = C}$

$$\Rightarrow \frac{\log(1+z^2)}{2} = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n \cdot z^{2n+2}}{2n+2}.$$

P5 • Para $z \neq 0$ es holomorfa por álgebra de funciones holomorfas

• Para $z = 0$, por definición:

$$\lim_{z \to 0} \frac{f(z) - f(0)}{z} = \lim_{z \to 0} \frac{e^{iz} - 1}{2iz^2} - \frac{1}{2z}$$

$$= \lim_{z \to 0} \frac{e^{iz} - 1 - iz}{2iz^2} \overset{L'H}{=} \lim_{z \to 0} \frac{ie^{iz} - i}{4iz}$$

$$\overset{L'H}{=} \lim_{z \to 0} \frac{-e^{iz}}{4i} = -\frac{1}{4i} = \boxed{\frac{i}{4}}$$

$\therefore$ Es holomorfa en $\mathbb{C}$.