MA2001-6 Cálculo en Varias Variables
Profesor: Marcelo Leseigneur P.
Auxiliares: Angelo Muñoz- Rodrigo Maulen
Obed Ulloa- Pablo Arratia.
Fecha: 21 de Junio de 2017.

Resumen C3

Gradiente:
$\nabla f(\vec{x}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)\right)$
$\nabla f(x,y,z) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$

Hessiano:

$$H_f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}$$

$$H_f(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \end{pmatrix}$$

Laplaciano: Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, entonces $\Delta f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$

Regla de la cadena: Si $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $F = (f_1, f_2, ... f_m)$ es de clase C^1 en $A \subset dom(F)$ y $G : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$, $G = (g_1, g_2, ..., g_p)$ es de clase C^1 en $F(A)$, entonces la función $H = G \circ F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$, $H = (h_1, h_2, ..., h_p)$ es de clase C^1 en A y $\forall x_0 \in A$, $\forall i = 1, .., p$ y $j = 1, ... n$, se cumple que:

$$\frac{\partial h_i}{x_j}(x_0) = \sum_{k=1}^m \frac{\partial g_i}{\partial y_k}(F(x_0)) \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(x_0)$$

Taylor de Orden 2: $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, D abierto convexo, $f \in \mathcal{C}^2$ y $x_0 \in D$. Entonces $\forall x \in D$:

$$f(x) = f(x_0) + \langle \nabla f(x_0), x - x_0 \rangle + \frac{1}{2}(x - x_0)^t H_f(x_0)(x - x_0) + R_2(x)$$

donde $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{R_2(x)}{\|x - x_0\|^2} = 0$
Si se ignora $R_2(x)$, se le llama aproximación de orden 2 en torno al punto x_0.

Un punto x_0 se dice **mínimo**:

local aislado si	$\exists B(x_0, \delta) : f(x_0) < f(x) \forall x \in B'(x_0, \delta)$
local no aislado si	$\exists B(x_0, \delta) : f(x_0) < f(x) \forall x \in B(x_0, \delta)$
global aislado si	$f(x_0) \leq f(x) \forall x \in B$
global no aislado si	$f(x_0) < f(x) \forall x \in B$

invirtiendo las desigualdades se obtienen las definiciones para **Máximos**.

Candidatos a mín/Max
$A_1 = \{x \in \mathring{D} : f$ es diferenciable y $\nabla f(x) = 0\}$
$A_2 = \{x \in \mathring{D} : f$ no es diferenciable $\}$
$A_3 = \{\partial D\}$

Matriz definida positiva:
$L(h) = h^t A h > 0 \implies A$ es definida positiva.
Si es $\geq$, A es semidefinida positiva.
A es def. positiva $\iff det(M_j) > 0 \;\; \forall j = 1, \ldots, n$
A es def. negativa $\iff (-1)^j det(M_j) > 0 \;\; \forall j = 1, \ldots, n$
donde M_j es el subdeterminante j-ésimo.

Mínimos y Máximos:
$H_f(x_0)$ definida positiva $\implies x_0$ es mínimo local aislado
$H_f(x_0)$ definida negativa $\implies x_0$ es máximo local aislado
$H_f(x_0)$ indefinida $\implies x_0$ es punto silla

Teorema de la Función Implícita:
Sean m ecuaciones tales que $\forall i = 1, \ldots, m$:
$F_i(x_1, \ldots, x_n) = 0$; se puede definir m funciones $\mathcal{C}^2$ de la forma: $x_i = f(x_m + 1, \ldots, x_n)$, es decir respecto de las $n - m$ otras variables en una vecindad de un punto x_0 si: $F_i(x_0) = 0$ $\forall i = 1, \ldots, m$ y

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial x_m} \end{vmatrix} (x_0) \neq 0$$

Teorema de la Función Inversa: Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tal que $f(x) = y$, y $Det(J_{f(x)}) \neq 0$.
Entonces existen $U, V \subset \mathbb{R}^n$ tal que $x \in U, y \in V$ donde $f : U \to V$ biyectiva con inversa de clase C^1 y su jacobiano es:

$$J_{f^{-1}}(y) = [J_f(x)]^{-1}$$

Inversa de una matriz de 2x2:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - cb} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Lagrange: Sea el problema: $\underset{\text{s.a } g_i(\vec{x})=0 \;\; \forall i=1,\ldots,k}{\text{Opt } f(\vec{x})}$, los óptimos se obtienen resolviendo el sistema de ecuaciones dado por $\nabla L(\vec{x}, \vec{\lambda}) = 0$, con $L = f(\vec{x}) - \sum_{i=1}^k \lambda_i g_i(\vec{x})$.