

Clase Auxiliar # 11: Matrices Representantes y de Cambio de Base

Profesor: Daniel Remenik

Profesor Auxiliar: Nicolás Zalduendo

P1. Considere la transformación lineal $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por:

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y + z + w \\ 2x + y - z \\ x - y + z - w \end{pmatrix}$$

Y además considere las siguientes bases:

$$\beta_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ en } \mathbb{R}^4, \beta_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ en } \mathbb{R}^3$$

- (a) Encuentre una matriz M tal que $T(x) = Mx$, $\forall x \in \mathbb{R}^4$
- (b) Encuentre la matriz representante de T con respecto a β_1 y β_2 usando matrices de cambio de base apropiadas.

P2. Sea $\beta = \{1, x, x^2\}$ la base canónica del espacio $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$. Considere:

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- (a) Encuentre la base β' tal que Q sea representante de la identidad de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ con las bases β' en la partida y β en la llegada.
- (b) Sea $T : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^3$ la transformación lineal cuya matriz representante con respecto a las bases canónicas es:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Calcule la matriz representante de T con respecto a las bases β' en $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ y la canónica en \mathbb{R}^3

- (c) Encuentre T explícitamente.

P3. (a) Considere el conjunto $\mathcal{A} = \{1 + 3x + 2x^2, 1 + x - x^2, x + x^2\}$ y verifique que es una base de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, el espacio de los polinomios de grado a lo más 2.

- (b) Ahora considere $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ y justifique por qué \mathcal{B} es una base de \mathbb{R}^3 .

- (c) Sea $T : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^3$ y sea

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

la matriz representante de T con respecto a \mathcal{A} y \mathcal{B} en el espacio que corresponda. Encuentre T explícitamente.

- (d) Determine si T puede ser invertible.