Auxiliar 12: Valores y vectores propios

Fecha: 8 de Noviembre de 2017

Resumen:

Sea una matriz $A \in \mathcal{M}_{nn}$

- Diremos que $v \in \mathbb{R}^n$ es **vector propio** de A si $v \neq 0$ y existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $Av = \lambda v$ y tambien diremos que $W_\lambda = Ker(A - \lambda I)$ es el **subespacio propio** asociado al valor propio λ.
- Diremos que A es **diagonalizable** si existe P,D con P invertible y D diagonal tal que $A = PDP^{-1}$ donde P es una matriz que tiene en sus columnas los vectores propios de A y D es una matriz que tiene en su diagonal los valores propios de A. Esto solo se puede hacer si es que los vectores propios de A son una base de $\mathbb{R}^n$
- Los vectores propios asociados a subespacios propios distintos, necesariamente son l.i.
- Para encontrar los valores propios, usamos el polinomio caracteristico de A, $P(\lambda) = |A - \lambda I|$, donde las raices del polinomio seran los vectores propios
- Sea λ un valor propio de A:
  - Se define la **multiplicidad geometrica** de λ como $\gamma_A(\lambda) = dim(W)$
  - Se define la **multiplicidad algebraica** de λ como $\alpha_A(\lambda)$ la maxima potencia de $(x - \lambda)$ que divide al polinomio caracteristico de A
- $\forall \lambda$ valor propio de A, $1 \leq \gamma_A(\lambda) \leq \alpha_A(\lambda) \leq n$
- A es diagonalizable si y solo si la suma de las multiplicidades geometricas de sus valores propios es igual a n.
- Si el polinomio caracteristico de A tiene n raices distintas, entonces A es diagonalizable.

P1 Considere $x, y \in \mathbb{R}^n$ y la matriz $A = xy^t$.

a) Considere $y^\perp = \{w \in \mathbb{R}^n \mid \langle y, w \rangle = 0\}$. Demuestre que $y^\perp$ es un sub espacio vectorial de dimension n-1

b) Muestre que todos los vectores no nulos en $y^\perp$ son vectores propios de A asociados al valor propio 0

c) Demuestre que:

$$\text{A es diagonalizable} \iff x \notin y^\perp$$

P2 Considere $T_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la transformacion lineal que toma un vector y lo rota en un angulo θ en sentido anti-horario. Considere $\theta \neq 0 \neq \pi$

a) Calcule la matriz representante A_θ de T_θ respecto de las bases canonicas de $\mathbb{R}^2$

b) Explique porque no es posible que esta transformacion lineal tenga valores propios.

c) Ahora considere $L_\theta : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ la transformacion definida por $L_\theta(v) = A_\theta v$. Calcule los valores y vectores propios de L_θ.

P3

a) Sean $A, B \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$, con A invertible. Muestre que AB y BA tienen el mismo polinomio caracteristico.

b) Sean $A, B \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ diagonalizables con igual base de vectores propios de A y B respectivamente, encuentre los valores propios de $A^3 + 2B$

c) Sean v_1, v_2 dos vectores propios de una matriz A asociados a valores propios distintos. Pruebe que $v_1 + v_2$ no puede ser vector propio de A

d) Demuestre que si $A = A^2$, entonces 0 y 1 son sus unicos valores propios.

P4 Considere que en $\mathbb{R}^n$ que existen dos s.e.v V_1, V_2 que satisfacen $\mathbb{R}^n = V_1 \oplus V_2$. Esto significa que para todo $v \in \mathbb{R}^n$ existe una unica descomposicion $v = v_1 + v_2$ con $v_1 \in V_1$, $v_2 \in V_2$, se definen las funciones lineales:

$$P_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \quad P_1(v) = v_1$$

$$P_2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \quad P_2(v) = v_2$$

que son las proyecciones de v sobre los s.e.v V_1, V_2 respectivamente.

Considere $A = \{a_1, a_2, \ldots a_n\}$ base de V_1 y $B = \{b_1, b_2, \ldots b_m\}$ base de V_2

a) Determine los valores propios de dichas funciones a traves de las matrices representantes de cada funcion.

b) Determine los vectores propios de P_1 y P_2