Auxiliar 8: Transformaciones Lineales

Fecha: 11 de Octubre 2017

Resumen:

- Sean U,V dos espacios vectoriales sobre el cuerpo $\mathbb{K}$ y $T : U \to V$ una funcion, diremos que T es una **transformacion lineal** si y solo si satisface que:

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K},\ \forall u_1, u_2 \in U,\ T(\alpha u_1 + \beta u_2) = \alpha T(u_1) + \beta T(u_2)$$

- Sea $T : U \to V$ una transformacion lineal, se definen los espacios vectoriales:
  - El **nucleo** de T como $Ker(T) = T^{-1}(0) = \{x \in U \mid T(x) = 0\}$ y su dimension se denomina la nulidad de la transformacion.
  - La **imagen** de T como $Im(T) = T(U) = \{T(x) \mid x \in U\}$ y su dimension se denomina rango de la transformacion.
- Decimos que $T : U \to V$ es un **isomorfismo** de U en V si es que, T es una transformacion lineal y ademas T es **biyectiva**. Tambien decimos que U y V son isomorfos si es que existe un isomorfismo entre U y V y lo escribimos como $U \cong V$.
- **Teorema del nucleo imagen (TNI):** Sea $T : U \to V$ una transformacion lineal donde la dimension de U es finita, entonces:

$$\text{dim(U)=dim(Ker(T))+dim(Im(T))}$$

P1 Sea D: $\mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ la funcion definida por $D(p) = p'$

a) Muestre que D es lineal
b) Encuentre base y dimension de Ker(D). ¿Es D inyectiva?
c) Encuentre base y dimension de Im(D). ¿Es de sobreyectiva?

P2 [Caracterizacion de Isomorfismo]
La idea es probar el siguiente teorema:

Teorema: Dos espacios E,V de dimension finita son isomorfos $\iff$ dim(E)=dim(V)

Para ello proceda como sigue:

a) Muestre que $dim(\mathbb{R}^n) = n$
b) Sea E un espacio vectorial tal que dim(E)=n. Pruebe que $E \cong \mathbb{R}^n$
c) Pruebe que si $T : E \to V$ es un isomorfismo y $B = \{b_1, b_2 \dots b_n\}$ es una base de E, entonces T(B) es una base de V.
d) Concluya

P3 [P1 Examen 2012]
Sea:

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

a) Encuentre una base de $\langle S \rangle$

b) Sea $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ una aplicacion lineal tal que $Ker(T) = \langle S \rangle$ y:

$$T\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad T\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

i) Determine explicitamente T.

ii) Determine la imagen T y el rango de T.

P4 [Propiedades del nucleo y de la imagen]

i) Sea $f : U \to U$ lineal. Demuestre que:

a) $f \circ f = 0 \iff Im(f) \subset Ker(f)$

b) $f \circ f = f \Longrightarrow U = Im(f) \oplus Ker(f)$

ii) Sea $T_A : R^n \to R^m$ una transformacion lineal, donde $T_A = Ax$, con A una matriz dada de mxn. Demuestre que:

a) $Ker(T_A)$ es el conjunto de la soluciones del sistema Ax=0 y su dimension es igual al numero de variables libres.

b) $Im(T_A)$ es el generado por las columnas de A y que su dimension es entonces el maximo numero de vectores l.i que se pueden extraer de las columnas de A