

Auxiliar 3: Cálculo de inversa

Fecha: 30 de Agosto 2017

Problemas:

P1. Calcule la matriz inversa de:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

P2. Sean $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ y $b \in \mathbb{R}^n$.

- (a) Demuestre que si $Ax=b$ tiene solución única si y solo si A es invertible.
- (b) Demuestre que si existen $i, j \in \mathbb{N}$ tales que, $i \neq j$ y $A_i = A_j$, entonces A no es invertible
- (c) Demuestre que una matriz triangular superior es invertible si y solo si los elementos de su diagonal son todos no nulos, y que de ser invertible, su inversa también es triangular superior.

P3. Sea $A \in \mathcal{M}_{nn}$ una matriz que se puede pivotar sin intercambiar filas, obteniéndose una matriz sin ceros en su diagonal.

- (a) Demuestre que A admite una única descomposición LDU, es decir $A=LDU$, donde L es triangular inferior con diagonal de unos, D es diagonal con todos sus coeficientes distintos de 0 y U es triangular superior con diagonal de unos.
- (b) Demuestre que si A es simétrica entonces $L = U^t$

P4. Sea $D = \begin{pmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ diagonal, con d_1, \dots, d_n distintos y $A, B, M, S \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$.

- (a) Pruebe que si $MD = DM$, entonces M es diagonal.
- (b) Sea S invertible, tal que $S^{-1}AS$ y $S^{-1}BS$ son diagonales. Pruebe que $AB = BA$.
- (c) Sea S invertible, tal que $S^{-1}AS = D$. Suponiendo que $AB = BA$, verifique que $S^{-1}AS$ y $S^{-1}BS$ conmutan y concluya que $S^{-1}BS$ es diagonal.

Propuestos:

P5. (C1 2016-2) Sea la matriz cuadrada de 3×3 :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Pruebe que A es invertible si y solo si $a^2 \neq 1$ y calcule su inversa.

P6. (C1 2014-1)

- (a) Sean $A, B \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ dos matrices que conmutan, es decir $AB = BA$. Demuestre que:
 - (i) $\forall n \in \mathbb{N}, A^n B = B A^n$
 - (ii) $A^t B^t = B^t A^t$
 - (iii) Si A, B son invertibles, entonces $(AB)^{-1} = A^{-1} B^{-1}$
- (b) Considere la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

Calcule mediante el método de Gauss la matriz inversa de A .