Auxiliar 13: Ortogonalidad

Fecha: 15 de Noviembre 2017

Resumen:

- Un subconjunto $\{v_1, \dots v_k\}$ de $\mathbb{R}^n$ se dice **ortogonal** si $\forall i, j \quad i \neq j \Longrightarrow \langle v_i, v_j \rangle = 0$. Si ademas se tiene que $\forall i \quad \|v_i\| = 1$ el conjunto se dice **ortonormal**.
- Sea W un s.e.v de $\mathbb{R}^n$ definimos el ortogonal de W como:

$$W^{\perp} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \forall w \in W \ \langle w, x \rangle\}$$

- Algunas propiedades de $W^{\perp}$
  - $W^{\perp}$ es s.e.v de $\mathbb{R}^n$
  - $dim(W^{\perp}) = n - dim(W)$
  - $W \oplus W^{\perp} = \mathbb{R}^n$
- Sea W un s.e.v de $\mathbb{R}^n$ y $\{w_1, \dots w_k\}$ una base ortonormal de W. Definimos la **proyeccion ortogonal** sobre W, como la funcion $P_W : \mathbb{R}^n \to W \quad P_W(x) = \sum_{i=1}^{k} \langle x, w_i \rangle w_i$

P1 Sean U,V subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^n$. Demuestre que:

a) $(U + V)^{\perp} = U^{\perp} \cap V^{\perp}$
b) $(U^{\perp})^{\perp} = U$
c) $(U \cap V)^{\perp} = U^{\perp} + V^{\perp}$
d) $U \oplus V = \mathbb{R}^n \Longleftrightarrow U^{\perp} \oplus V^{\perp} = \mathbb{R}^n$

P2 Sean U,V dos s.e.v de $\mathbb{R}^n$ y $P_U : \mathbb{R}^n \to U$ la proyeccion ortogonal sobre U.

a) Muestre que $P_U(V) = \{P_U(x) \mid x \in V\}$ es un s.e.v de U y que si $\{v_1, \dots v_n\}$ es un generador de V, entonces $\{P_U(v_1), \dots P_U(v_k)\}$ es generador de $P_U(V)$
b) Si $U = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle$ y $V = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle$
   i) Encuentre una base ortonormal de U y explicite su dimension.
   ii) Encuentre una base para $P_U(V)$ y explicite su dimension.

P3 Una matriz P se dira ortogonal si $PP^t = I$

a) Demuestre que si P es ortogonal entonces $det(P) \in \{-1, 1\}$
b) Demuestre que una matriz es ortogonal si y solo si sus columnas son ortonormales
c) Escriba la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

de la forma $A = PDP^t$, donde P es invertible y D es diagonal.