Auxiliar 11: Vectores y valores propios

Fecha: 8 de Noviembre de 2017

Resumen:

Sea una matriz $A \in \mathcal{M}_{nn}$

- Diremos que $v \in \mathbb{R}^n$ es **vector propio** de A si $v \neq 0$ y existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $Av = \lambda v$ y tambien diremos que $W_\lambda = Ker(A - \lambda I)$ es el **subespacio propio** asociado al valor propio λ.
- Diremos que A es **diagonalizable** si existe P,D con P invertible y D diagonal tal que $A = PDP^{-1}$ donde P es una matriz que tiene en sus columnas los vectores propios de A y D es una matriz que tiene en su diagonal los valores propios de A. Esto solo se puede hacer si es que los vectores propios de A son una base de $\mathbb{R}^n$
- Los vectores propios asociados a subespacios propios distintos, necesariamente son l.i.
- Para encontrar los valores propios, usamos el polinomio caracteristico de A, $P(\lambda) = |A - \lambda I|$, donde las raices del polinomio seran los vectores propios
- Sea λ un valor propio de A:
  - Se define la **multiplicidad geometrica** de λ como $\gamma_A(\lambda) = dim(W)$
  - Se define la **multiplicidad algebraica** de λ como $\alpha_A(\lambda)$ la maxima potencia de $(x - \lambda)$ que divide al polinomio caracteristico de A
- $\forall \lambda$ valor propio de A, $1 \leq \gamma_A(\lambda) \leq \alpha_A(\lambda) \leq n$
- A es diagonalizable si y solo si la suma de las multiplicidades geometricas de sus valores propios es igual a n.
- Si el polinomio caracteristico de A tiene n raices distintas, entonces A es diagonalizable.

P1 Determine si las siguientes matrices son diagonalizables:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

P2 Cosidere la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

(a) Calcule el polinomio caracterisitico de A, los valores propios y sus multiplicidades algebraicas.

(b) Determine los espacios propios asociados a cada valor propio y sus multiplicidades geometricas.

(c) Concluya que A es diagonalizable y explicite P y D.

P3 a) Encuentre los elementos faltantes a,b de la matriz $A \in \mathcal{M}_{22}$ dada por:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ a & b \end{pmatrix}$$

de modo que admita a $v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ y a $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ como vectores propios.

b) Encuentre una matriz B de 2 por 2 con los mismos vectores propios v_1 y v_2 del punto a) de valores propios $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0$ respectivamente. Calcule ademas B^{10}.