Auxiliar 10: Matriz representante y C2

Fecha: 25 de Octubre 2017

P1 Sea $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ la transformacion lineal dada por:

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y+z+w \\ 2x+y-z \\ x-y+z-w \end{pmatrix}$$

a) Calcule la matriz representante de T respecto de las bases canonicas.

b) Calcule la matriz representante de T con respecto a las bases β_1, β_2 usando matrices de paso, donde:

$$\beta_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \qquad \beta_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

P2 [P2 C2 2017-1] Sea V un e.v y U un s.e.v de V tal que $V \setminus U \neq \emptyset$. Considere una base $\{u_1, u_2 \dots u_n\}$ de U con $n \geq 1$ y tome v en $V \setminus U \neq \emptyset$

a) Explique por que $v \neq 0$ y muestre que $\{v, v+u_1, v+u_2 \dots v+u_n\} \subseteq V \setminus U$

b) Suponga que dim(V)=dim(U)+1. Muestre que $\{v, v+u_1, v+u_2 \dots v+u_n\}$ es base de V

c) Sea W un s.e.v de V tal que $W \nsubseteq U$ y suponga ademas que $dim(W) = k \leq n$. Explique por que $k \neq 0$ y $U \nsubseteq W$. Muestre ademas que $dim(U \cap W) \leq k-1$

P3 [P3 C2 2014-2] Sea $T : \mathcal{M}_{2\times 2} \to \mathcal{M}_{2\times 2}$ la transformacion lineal definida como:

$$\text{T(A)=MA+AM, donde } M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Pruebe que T es lineal

b) Encuentre la matriz representante de T con respecto a la base canonica.
$\beta_c = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ de $\mathcal{M}_{2\times 2}$

c) Calcule base y dimension de Ker(T) e Im(T). Analice inyectividad y sobreyectividad de T.

d) Pruebe que $Ker(T) \oplus Im(T) = \mathcal{M}_{2\times 2}$

P4 [P1 C2 2013-1] Sea

$$U = \{(x,y,z,w) \mid 3x - 2y - z - 4w = 0,\ x + y - 2z - 3w = 0\}$$

a) Demuestre que U es un sev de $\mathbb{R}^4$

b) Encuentre una base de U

c) Encuentre un sev de W de R^4 tal que $U \oplus W = \mathbb{R}^4$

P5 [P1 C2 2016-2]

a) Sea $L : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ una transformacion lineal definida por:

$$L\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-y+z-w \\ x+y-z-w \\ x+y+z-3w \end{pmatrix}$$

1. De una base del nucleo de L y calcule su dimension
2. De una base de la imagen de L y calcule su dimension

b) Sea $W = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \right\}$

1. Demuestre que $\langle W \rangle \oplus Ker(L) = \mathbb{R}^4$
2. Sea $T : \langle W \rangle \to R^3$ la restriccion de L al generado por W, es decir la transformacion lineal de $\langle W \rangle$ en R^3 tal que T(w)=L(w). Demuestre que T es un isomorfismo

P6 [P3 C2 2016-2] Sea $\{u_1, u_2 \ldots u_n\}$ una base de R^n

a) Pruebe que existe $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ transformacion lineal tal que:

$$L(u_i) = u_{i+1} \quad \forall i = 1, \ldots n-1 \qquad L(u_n) = 0$$

b) Demuestre que $L^{n-1} \neq 0$, es decir L^{n-1} no es la funcion identicamente nula, donde $L^1 = L$ y $L^{k+1} = L \circ L^k$

c) Demuestre que $L^n = 0$, es decir L^n es la aplicacion nula

d) Para cada $k = 1, \ldots n-1$, construya una transformacion lineal $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tal que $T^k \neq 0$ y $T^{k+1} = 0$