Desarrollo Auxiliar 9

P1 $T, S : V \to V$ tales que $T \circ T = S \circ S = 0$ y $S \circ T + T \circ S = I$

Esto quiere decir, $\forall x \in V$ $T(T(x)) = S(S(x)) = 0$ (1)

y $S(T(x)) + T(S(x)) = x$ (2)

i) Para demostrarlo lo hacemos demostrando que
$Im(T) \subseteq Ker(T) \wedge Ker(T) \subseteq Im(T)$

Luego, si $x \in Im(T) \Rightarrow \exists y \in V$ tq $T(y) = x$

$\Rightarrow T(x) = T(T(y)) = 0$

$\hookrightarrow T \circ T = 0$

$\Rightarrow x \in Ker(T)$

si $x \in Ker(T) \Rightarrow T(x) = 0$, entonces, por la proposición (2) tenemos que $S(T(x)) + T(S(x)) = x$, pero $T(x) = 0$

$\Rightarrow S(0) + T(S(x)) = x$

$\Rightarrow x = T(S(x)) \Rightarrow x \in Im\,T$

Se concluye que $Ker(T) = Im(T)$

La demostración para S es exactamente igual

ii) Por teorema del núcleo imagen:

$$\dim(V) = \dim(Ker(T)) + \dim(Im(T)) = \dim(Ker(S)) + \dim(Im(S))$$

Luego, como $Ker(T) = Im(T) \Rightarrow \dim(Ker(T)) = \dim(Im(T))$
$Ker(S) = Im(S) \Rightarrow \dim(Ker(S)) = \dim(Im(S))$

$$\Rightarrow 2\dim(Im(T)) = 2\dim(Im(S)) \Rightarrow \dim(Im(T)) = \dim(Im(S))$$

iii) $V = Im(T) \oplus Im(S) \iff V = Im(T) + Im(S)$ (I)
$\wedge \quad Im(T) \cap Im(S) = \{0\}$ (II)

Demostraremos ambas por separado

(I) Sea $x \in V$ arbitrario, de la proposición (2)

$$x = T(S(x)) + S(T(x)) \quad \text{donde} \quad T(S(x)) \in Im(T)$$
$$S(T(x)) \in Im(S)$$

$$\Rightarrow x \in Im(T) + Im(S) \Rightarrow V \subseteq Im(T) + Im(S)$$

Como todos los conjuntos son subconjuntos del espacio entero, es decir $Im(T) + Im(S) \subseteq V$, concluimos que:

$$V = Im(T) + Im(S)$$

(II) Sea $x \in Im(T) \cap Im(S)$ pdq $x = 0$

En efecto, $x \in Im(T) \cap Im(S) \iff \exists y \in V$ tq $T(y) = x$
$\exists y' \in V$ tq $S(y') = x$

Entonces, $T(x) = T(T(y)) = 0$
$S(x) = S(S(y')) = 0$, luego por la proposición (2

$$x = S(T(x)) + T(S(x)) = S(0) + T(0) = 0 \Rightarrow Im(T) \cap Im(S) = \{0\}$$

Se concluye que $V = Im(T) \oplus Im(S)$

P2] PRIMERO, definamos bien el concepto de matriz representante

Una matriz representante M es aquella que satisface que si $\beta_A = \{a_1, a_2, \dots a_n\}$ y $\beta_B = \{b_1, b_2, \dots b_n\}$ son bases de A y B respectivamente y además $T: A \to B$

Entonces: $$T(x) = T\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i T(a_i) := M \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

definición de M

Notar que $$M \begin{pmatrix} \alpha_i \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot M_{\cdot i}$$ (por multiplicación de matrices)

$\Rightarrow M_{\cdot i} = T(a_i)$, es decir las columnas de M son la transformación evaluada en los elementos de la base de A

Es muy importante considerar que $T(a_i)$ lo escribimos como un vector columna (para que M sea efectivamente una matriz) de componentes β_j donde $T(a_i) = \sum_{j=1}^{m} \beta_j b_j$

Entonces, la matriz M depende tanto de β_A como β_B pues si cambiamos la base de A cambian los $T(a_i)$ y si cambiamos la base de B cambian los β_j

Ahora, apliquemos esto para el problema

a) Ya tenemos todos los valores de las bases $(T(a_i))$ por lo que solo debemos descomponer dichos valores en vectores de la base de llegada

En este caso la base de llegada es la canonica por lo que sera fácil

$$T(a_1) = L\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \underset{\beta_1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \underset{\beta_2}{5} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \underset{\beta_3}{1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$L\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \implies N_{\beta c \beta c} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 & -2 \\ 5 & 1 & 3 & -5 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$L\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = 5 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$L\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 5 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

b) Aquí también nos dan los vectores de la base y la de llegada sigue siendo la canónica por lo que la descomposición también será fácil

$$T\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\4\\1\end{pmatrix}=5\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+4\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+1\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$T\begin{pmatrix}1&2\\2&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\3\\1\end{pmatrix}=8\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+1\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$T\begin{pmatrix}2&0\\1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\3\\4\end{pmatrix}=5\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+4\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$T\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}=0\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+1\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+1\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow M_{\beta\gamma_c}=\begin{pmatrix}5&8&5&0\\4&3&3&1\\1&1&4&1\end{pmatrix}$$

c) Ahora, nos cambian la base del conjunto de llegada, por lo que deberemos calcular los coeficientes γ_i que expresan a los valores de las transformaciones de la base

Entonces: $T\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\4\\1\end{pmatrix}=\gamma_1\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}+\gamma_2\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}+\gamma_3\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\Rightarrow$ $\begin{array}{cccc}\gamma_1&\gamma_2&\gamma_3&\\ \end{array}$ $\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&0&5\\2&1&1&4\\1&2&1&1\end{array}\right)$

Como lo debemos resolver la ecuación cuatro veces, lo resolveremos de forma genérica.

$$\begin{pmatrix}1&1&0&b_1\\2&1&1&b_2\\1&2&1&b_3\end{pmatrix}\rightsquigarrow\begin{pmatrix}1&1&0&b_1\\0&-1&1&b_2-2b_1\\0&1&1&b_3-b_1\end{pmatrix}\rightsquigarrow\begin{pmatrix}1&1&0&b_1\\0&-1&1&b_2-2b_1\\0&0&2&b_3+b_2-3b_1\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\quad \gamma_3=\frac{b_3+b_2-3b_1}{2}\ ;\ -\gamma_2+\gamma_3=b_2-2b_1\ ;\ \gamma_1+\gamma_2=b_1$$

Con estas tres expresiones encontramos que:

$$T\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\4\\1\end{pmatrix}=4\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}+1\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}-5\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$T\begin{pmatrix}1&2\\2&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\3\\1\end{pmatrix}=5\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}-10\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$T\begin{pmatrix}2&0\\1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\3\\4\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}-4\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$T\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}=0\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}+0\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}+1\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow N_{\beta\gamma}=\begin{pmatrix}4&5&2&0\\1&3&3&0\\-5&-10&-4&1\end{pmatrix}$$

d) PARA MOSTRAR QUE SON IGUALES, NECESITAMOS QUE UNA DE SUS MATRICES REPRESENTANTES SEA IGUAL (RESPECTO DE LAS MISMAS BASES)

PARA ESO CALCULAMOS $N_{\beta\gamma_c}$ LA MATRIZ REPRESENTANTE

$$L\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix} = L\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix} + L\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix} + L\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix} + L\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}2\\5\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}5\\3\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-2\\-5\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\4\\1\end{pmatrix}$$

$$L\begin{pmatrix}1&2\\2&2\end{pmatrix} = L\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix} + 2L\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix} + 2L\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix} + 2L\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}2\\5\\1\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}5\\3\\0\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}-2\\-5\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}8\\3\\1\end{pmatrix}$$

$$L\begin{pmatrix}2&0\\1&2\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}2\\5\\1\end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix}5\\3\\0\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}-2\\-5\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\3\\4\end{pmatrix}$$

$$L\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\5\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix}5\\3\\0\end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix}-2\\-5\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad N_{\beta\gamma_c} = \begin{pmatrix}5&8&5&0\\4&3&3&1\\1&1&4&1\end{pmatrix} = M_{\beta\gamma_c} \quad \Rightarrow \quad L = T$$

B) $T: V \to V \qquad \dim V = n$

a) i) $x \in \ker(T^k) \Leftrightarrow T^k(x) = 0 \Rightarrow T^{k+1}(x) = T(0) \underset{\substack{\text{propiedad de la funciones}\\\text{lineales}}}{=} 0$

$$\Rightarrow x \in \ker(T^{k+1})$$

ii) $x \in \operatorname{Im}(T^{k+1}) \Leftrightarrow \exists y \text{ tq } T^{k+1}(y) = x \Rightarrow T^k(T(y)) = x$

$$\Rightarrow x \in \operatorname{Im}(T^k)$$

b) SEA $k \geq k_0$ ARBITRARIO, SI $Im(T^{k_0+1}) = Im(T^{k_0})$

pdq $Im(T^{k+1}) = Im(T^k)$

EN EFECTO, YA TENEMOS QUE $Im(T^{k+1}) \subseteq Im(T^k)$ POR LO QUE SOLO NOS QUEDA DEMOSTRAR QUE $Im(T^k) \subseteq Im(T^{k+1})$

LUEGO, $x \in Im(T^k) \Leftrightarrow \exists y \in V$ tq $T^k(y) = x$

SE PUEDE HACER PUES $K \geq K_0$

$\Leftrightarrow \exists y \in V$ tq $T^{k-k_0}(T^{k_0}(y)) = x$

AHORA $T^{k_0}(y) \in Im(T^{k_0}) \Rightarrow T^{k_0}(y) \in Im(T^{k_0+1})$

$\Rightarrow \exists y'$ tq $T^{k_0+1}(y') = T^{k_0}(y)$

$\Rightarrow \exists y' \in V$ tq $T^{k-k_0}(T^{k_0+1}(y')) = T^{k+1}(y') = x$

$\Rightarrow x \in Im(T^{k+1}) \Rightarrow Im(T^k) \subseteq Im(T^{k+1})$

SE CONCLUYE $Im(T^k) = Im(T^{k+1})$

c) SI NO EXISTIERA DICHO K_0, ENTONCES TENDRÍAMOS QUE

$Im(T^k) \supset Im(T^{k+1}) \Rightarrow \dim(Im T^k) > \dim(Im T^{k+1}) \quad \forall k \in [1:n]$

$\Rightarrow \dim(V) \geq \dim(T) > \dim(T^2) > \dim(T^3) > \dots > \dim(T^n)$

$\Rightarrow n \geq \dim(T)+1 \geq \dim(T^2)+2 \geq \dim(T^3)+3 \geq \dots \geq \dim(T^n)+n$

$\Rightarrow 0 \geq \dim(Im T^n) \geq 0 \Rightarrow T^n \equiv 0$

$\Rightarrow \dim(Im(T^{n+1})) = 0 = \dim(Im(T^n)) \Rightarrow \Leftarrow$

n SI SATISFACE LA PROPIEDAD $\Rightarrow \exists K_0$

d) LA PARTE (d) QUEDA COMO PROPUESTA PARA NO GASTAR OTRA HOJA :)