Desarrollo Auxiliar 8

P1)

a) D es lineal $\iff \forall \alpha,\beta \in \mathbb{R}, \forall p_1, p_2 \in P_3(\mathbb{R})\ D(\alpha p_1 + \beta p_2) = \alpha D(p_1) + \beta D$

En efecto, sean α, β y p_1, p_2 arbitrarior

$$D(\alpha p_1 + \beta p_2) = (\alpha p_1 + \beta p_2)' = \alpha p_1' + \beta p_2' = \alpha D(p_1) + \beta D(p_2)$$

b) $p(x) \in Ker(D) \iff D(p(x)) = 0 \Rightarrow p'(x) = 0$

$\Rightarrow p(x)$ es una constante $\Rightarrow p(x) = \alpha = \alpha \cdot 1$

Luego $\langle\{1\}\rangle = Ker(D) \Rightarrow \{1\}$ es base de $Ker(D)$

Ahora, como $D(2) = D(1) = D(\alpha) = 0$ tenemos un contraejemplo de que D no es inyectiva

c) $p(x) \in Im(D) \iff p(x) = T(g(x)) = g'(x)$ con $g(x) \in P_3(\mathbb{R})$

Pero $g(x) \in P_3(\mathbb{R}) \iff g(x) = \alpha_3 x^3 + \alpha_2 x^2 + \alpha_1 x_1 + \alpha_0$

$\Rightarrow p(x) = g'(x) \Rightarrow p(x) = 3\alpha_3 x^2 + 2\alpha_2 x + \alpha_1$

$\Rightarrow Im(D) = \langle\{x^2, x, 1\}\rangle \Rightarrow \{x^2, x, 1\}$ es base de $Im(D)$

Luego D es sobreyectiva $\iff Im(D) = P_3(\mathbb{R})$ pero $P_3(\mathbb{R}) = \langle\{x^3, x^2, x, 1\}\rangle \Rightarrow x^3 \in P_3(\mathbb{R})$ donde claramente $x^3 \notin Im(D)$.

P2 SEAN dos e.v E, V de dimensión finita

pdq $E \cong V \iff \dim(E) = \dim(V)$

a) Muestre que $\dim(\mathbb{R}^n) = n$

Basta con considerar la base canonica de $\mathbb{R}^n$, $\{e_i\}_{i=1}^n$
(donde $(e_i)_k = \begin{cases} 1 & si\ k=i \\ 0 & si\ k \neq i \end{cases}$)

Verificando que $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ es base

$x \in \mathbb{R}^n \Rightarrow x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots x_n e_n \Rightarrow x \in \langle \{e_i\}_{i=1}^n \rangle$

Además son claramente l.i pues $\sum_{i=1}^n \alpha_i e_i = 0 \iff \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \alpha_i = 0 \quad \forall i$

Luego, como son n vectores e_i, tenemos que $\dim(\mathbb{R}^n) = n$

b) Sea E un espacio vectorial tal que $\dim(E) = n$. Pruebe que $E \cong \mathbb{R}^n$

$\dim(E) = n \Rightarrow$ Toda base de E tiene cardinal n

Luego, sea $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ una base de E, si definimos una transformación lineal tal que T es biyectiva ganamos
Entonces, definiendo
$T(b_i) = e_i \Rightarrow$ Si $b \in E \Rightarrow b = \sum_{i=1}^n \alpha_i b_i$

Luego, $T(b) = T\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i b_i\right) = \sum_{i=1}^n \alpha_i T(b_i) = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i$

Entonces, $T(b_1) = T(b_2) \Rightarrow \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i = \sum_{i=1}^n \alpha_i' e_i \Rightarrow \sum_{i=1}^n (\alpha_i - \alpha_i') e_i = 0$

$\Rightarrow \alpha_i = \alpha_i' \Rightarrow b_1 = b_2 \Rightarrow T$ es inyectiva

Además, $x \in \mathbb{R}^n \Rightarrow x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \Rightarrow x = T\left(\sum_{i=1}^n x_i b_i\right)$

$\Rightarrow \exists b \in E$, $b = \sum_{i=1}^n x_i b_i$ tal que $T(b) = x$

$\Rightarrow T$ es sobreyectiva

$\Rightarrow T$ es biyectiva $\Rightarrow E \cong \mathbb{R}^n$

c) Pruebe que si $T: E \to V$ es un isomorfismo y $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ es base de E, entonces $T(B)$ es una base de V (Es decir $\{T(b_1), T(b_2), \dots, T(b_n)\}$ es base de V.

T es un isomorfismo $\Leftrightarrow$ T es biyectiva y T es lineal

Luego, T es biyectiva $\Leftrightarrow$ T es sobreyectiva y inyectiva

T sobreyectiva $\Leftrightarrow \forall v \in V, \exists x \in E$ tq $T(x) = v$, pero

$$x \in E \Rightarrow x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i b_i \Rightarrow T\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i b_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i T(b_i) = v$$

Con lo que tenemos que:

$$\forall v \in V, \exists \alpha_i, i \in [1:n] \text{ tales que } \sum_{i=1}^{n} \alpha_i T(b_i) = v$$

$$\Rightarrow \langle \{T(b_1), T(b_2), \dots, T(b_n)\} \rangle = V \Rightarrow \langle T(B) \rangle = V$$

Por otro lado, T inyectiva $\Rightarrow T(x_1) = T(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2 \quad x_1, x_2 \in \mathbb{R}$

Entonces si $x_1 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i b_i$; $x_2 = \sum_{i=1}^{n} \beta_i b_i$, tenemos que

$$T\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i b_i\right) = T\left(\sum_{i=1}^{n} \beta_i b_i\right) \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \alpha_i b_i = \sum_{i=1}^{n} \beta_i b_i \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i - \beta_i) b_i = 0$$

$\Rightarrow \alpha_i = \beta_i \quad \forall i \in [1:n]$ debido a que B es l.i

Con esto tenemos que $T\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i b_i\right) = T\left(\sum_{i=1}^{n} \beta_i b_i\right) \Rightarrow \alpha_i = \beta_i$, es decir

$$\left(\sum_{i=1}^{n} (\alpha_i - \beta_i) T(b_i) = 0 \Rightarrow \alpha_i - \beta_i = 0 \quad \forall i \right) \Leftrightarrow T(B) \text{ es l.i}$$

Se concluye que $T(B)$ es l.i y $\langle T(B) \rangle = V$

$\Rightarrow$ $T(B)$ es base de V

d) Demostraremos el teorema por doble implicancia

$\Rightarrow$) Si E, V son isomorfos, entonces existe $T: E \to V$ biyectiva

Luego, por (c) si B es base de $E \Rightarrow T(B)$ es base de V

Como $|B| = |T(B)|$ tenemos que $\dim(E) = \dim(V)$

$\Leftarrow$) Si $\dim(E) = \dim(V) = n$, entonces podemos decir por (b) que

$E \cong \mathbb{R}^n$ y $V \cong \mathbb{R}^n \Rightarrow \exists T_1 : E \to \mathbb{R}^n, T_2 : \mathbb{R}^n \to V$, trasformaciones lineales biyectivas

$\Rightarrow T_1 \circ T_2$ es una transformación lineal biyectiva de E en V

$\Rightarrow E \cong V$

P3) a)

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} (1) & (2) & & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \rightarrow \langle S \rangle = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ es base de } \langle S \rangle$$

b) i) Para determinar explícitamente a T, lo que haremos será buscar cuanto valen las imágenes de los elementos de una base de $\mathbb{R}^4$, por ejemplo, cuanto valen los siguientes términos,

$$T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \; T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \; T\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \; y \; T\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Luego, diremos que $T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = x\,T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y\,T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + z\,T\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + w\,T\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

debido a que T es lineal, y con eso encontramos a T

LUEGO, POR ENUNCIADO, $T\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}$ y $T\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}$

CON lo QUE solo FALTA $T\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$ y $T\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}$

AHORA, $\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}\in \langle S\rangle \Rightarrow \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}\in KER(T) \Rightarrow T\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$

y $\begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix}\in \langle S\rangle \Rightarrow \begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix}\in KER(T) \Rightarrow T\begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$

PERO $T\begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix}=T\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}+T\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}+T\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}=T\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}$

$\Rightarrow T\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\1\\-2\\1\end{pmatrix}$

CON lo QUE CONCLUIMOS QUE:

$$T\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix}=x\,T\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}+y\,T\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}+z\,T\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}+w\,T\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$=x\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}-1\\1\\-2\\1\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}+w\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}w-y\\y-w\\w+z-2y\\y-w\end{pmatrix}$$

ii) $v\in Im(T) \Leftrightarrow v=T(x),\ x\in\mathbb{R}^4 \Leftrightarrow v=x_2\begin{pmatrix}-1\\1\\-2\\1\end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}+x_4\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}$

donde $\begin{pmatrix}-1\\1\\-2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix} \Rightarrow v=(x_3-x_2)\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}+(x_4-x_2)\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}$

$\Rightarrow \left\{\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}\right\}$ ES l.i y GENERA A $Im(T)$

$\Rightarrow \left\{\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}\right\}$ ES BASE DE $Im(T) \Rightarrow$ El RANGO DE T ES 2

P4

i) a) Por doble implicancia:

=>) $f \circ f = 0 \iff f(f(x)) = 0$

Luego, $y \in Im(f) \Rightarrow \exists x$ tq $f(x) = y \Rightarrow f(f(x)) = f(y) \Rightarrow f(y) = 0$

$\Rightarrow y \in KER(f)$

$\Rightarrow Im(f) \subseteq KER(f)$

<=) $Im(f) \subseteq KER(f) \iff \underbrace{x \in Im(f)}_{\exists y \text{ tq } f(y)=x} \Rightarrow \underbrace{x \in KER(f)}_{f(x)=0}$

$f(y) = x \Rightarrow f(f(y)) = f(x) = 0 \Rightarrow f \circ f = 0$

b) $f \circ f = f$, pdq $U = Im(f) \oplus KER(f) \iff U = Im(f) + KER(f)$
$\wedge$ $Im(f) \cap KER(f) = \{0\}$

Si $x \in U \Rightarrow x = x - f(x) + f(x)$, donde por hipotesis $(f \circ f = f)$

$f(x) \in Im(f) \quad \wedge \quad f(x - f(x)) = f(x) - f(f(x)) = f(x) - f(x) = 0$
$\Rightarrow x - f(x) \in KER(f)$

$\Rightarrow x \in Im(f) + KER(f)$, pues x es la suma de elementos de dichos conjuntos

Además, si $x \in Im(f) \cap KER(f) \Rightarrow f(x) = 0 \wedge \exists y$ tq $f(y) = x$

$\Rightarrow \underbrace{f(f(y))}_{f \circ f = f} = \underbrace{f(x)}_{0} \Rightarrow f(y) = 0 \Rightarrow x = 0$

ii) a) $T_A(x) = Ax \Rightarrow x \in KER(T_A) \iff T_A(x) = 0 \iff Ax = 0$
con lo cual se tiene de forma directa

b) $y \in Im(T_A) \iff \exists x$ tq $T_A(x) = Ax = y$
Luego, $x \in \mathbb{R}^n \iff x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$ donde e_i son los vectores canonicos

$\iff y = A \cdot \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \underbrace{A e_i}_{\text{se vio en el primer auxiliar}} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i A_{\cdot i}$ columnas de A

$\iff y$ pertenece al generado por las columnas de A