Auxiliar 9: Transformaciones Lineales

Fecha: 18 de Octubre 2017

Resumen:

- Decimos que $T : U \to V$ es un **isomorfismo** de U en V si es que, T es una transformacion lineal y ademas T es **biyectiva**. Tambien decimos que U y V son isomorfos si es que existe un isomorfismo entre U y V y lo escribimos como $U \cong V$.
- Sea $T : U \to V$, entonces T es inyectiva $\iff Ker(T) = \{0\}$
- **Teorema del nucleo imagen (TNI):** Sea $T : U \to V$ una transformacion lineal donde la dimension de U es finita, entonces:

$$\text{dim(U)=dim(Ker(T))+dim(Im(T))}$$

- Si dim(U)=dim(V), entonces T es inyectiva $\iff$ T es sobreyectiva $\iff$ T es biyectiva

P1 [Control 2 2010-2] Sea V un e.v de dimension finita y sean $T, S : V \to V$ funciones lineales tales que: $T \circ T = S \circ S = 0$ y $S \circ T + T \circ S = I$. Demuestre que:

i) Pruebe que Im(T)=Ker(T) y que Ker(S)=Im(S)

ii) Pruebe que dim(Im(T))=dim(Im(S))

iii) Pruebe que $V = Im(T) \oplus Im(S)$

P2 Sean $E = \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ y F=R^3

a) Sea $L : E \to F$ una transformacion lineal definida por:

$$L\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\5\\1\end{pmatrix} \ ; \ L\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} \ ; \ L\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\3\\0\end{pmatrix} \ ; \ L\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\-5\\1\end{pmatrix}$$

Encuentre $N_{\beta_c\gamma_c}$ la matriz representante de L respecto de las bases canonicas, es decir:

$$\beta_c = \left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right\} \qquad \gamma_c = \left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

b) Sea $T : E \to F$ lineal definida por:

$$T\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\4\\1\end{pmatrix} \ ; \ T\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}8\\3\\1\end{pmatrix} \ ; \ T\begin{pmatrix}2 & 0\\ 1 & 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\3\\4\end{pmatrix} \ ; \ T\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$$

Luego calcule la $M_{\beta\gamma_c}$ la matriz representante de T, donde:

$$\beta = \left\{\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2 & 0\\ 1 & 2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right\}$$

c) Considere ahora la base $\gamma = \left\{\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$. Encuentre, entonces, $M_{\beta\gamma}$, matriz representante de T.

d) Muestre que L=T

P3 Sea $T : V \to V$ una transformacion lineal donde V es un espacio vectorial de dimension n.

a) Sea $T^k = \underbrace{T \circ T \ldots \circ T}_{k \ veces}$ para $k \in \{1, 2 \ldots, n\}$

   i) Demuestre que $Ker(T^k) \subset Ker(T^{k+1})$

   ii) Demuestre que $Im(T^{k+1}) \subset Im(T^k)$

b) Suponga que existe k_0 tal que $Im(T^{k_0+1}) = Im(T^{k_0})$, Pruebe que $\forall k \geq k_0,\ Im(T^{k+1}) = Im(T^k)$

c) Demuestre que existe tal k_0

d) Sea $U = Im(T^n)$, pruebe que $S : U \to U$, definida por S(x)=T(x) es un isomorfismo