Auxiliar 6: Espacios Vectoriales

Fecha: 13 de Septiembre 2017

Resumen:

- Sea (V,+) un grupo abeliano, $(\mathbb{K},+,\cdot)$ un cuerpo y una ley de composicion externa, diremos que V es un **espacio vectorial (e.v)** sobre $\mathbb{K}$ si se cumple que $\forall\alpha,\beta\in\mathbb{K}$, $x,y\in V$:
  1. $(\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x$
  2. $\alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y$
  3. $\alpha(\beta x)=(\alpha\beta)x$
  4. 1x=x , donde 1 es el neutro multiplicativo de K
- Si H es subconjunto de V no vacio, cerrado para las operaciones que tiene V y ademas es espacio vectorial, entonces diremos que H es un **sub espacio vectorial (s.e.v)** de V, lo cual podemos caracterizar como:
  1. H es no vacio
  2. $\forall u,v\in H\ ,\ u+v\in H$
  3. $\forall u\in H\ ,\forall\lambda\in\mathbb{K}\ ,\lambda u\in H$
- La definicion de s.e.v se escribe en forma equivalente como la siguiente proposicion:

$$\text{H es s.e.v}\iff(\forall\alpha,\beta\in\mathbb{K})(\forall u,v\in H),\ \alpha u+\beta v\in H$$

- Diremos que un conjunto de vectores $X=\{x_1,x_2\ldots x_n\}$ es linealmente independiente si:

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i=0\quad\Longrightarrow\quad\lambda_i=0\ \ \forall i\in\{1,\ldots n\}$$

P1. Una matriz $A\in\mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ se dice **semi-magica** de constante k si $(\forall i=1,\ldots,n)(\forall j=1,\ldots,n)$, $\sum_{i=1}^{n}a_{ij}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}=k$

Consideremos el siguiente conjunto:

$$E=\{A\in M_{nn}\mid\exists k\in R\text{ tal que A es una matriz semi-magica de constante k }\}$$

Demuestre que E es un e.v y que $E_0=\{A\in\mathcal{M}_{nn},\text{ tal que A es una matriz s-magica de constante 0 }\}$ es un s.e.v.

P2. Sean E, F e.v sobre un cuerpo $\mathbb{K}$. Sea $T:\ E\longrightarrow F$ una funcion que satisface:

i) $T(0_{\mathbb{E}})=0_{\mathbb{F}}$
ii) $\forall x\in E,\forall\alpha\in\mathbb{K},\quad\alpha T(x)=T(\alpha x)$
iii) $\forall x_1,x_2\in E,\quad T(x_1+x_2)=T(x_1)+T(x_2)$

Considere al conjunto imagen de T sobre E:

$$T(E)=\{y\in F\mid\exists x\in E,\quad T(x)=y\}$$

(a) Muestre que T(E) es un s.e.v de F
(b) Suponga ademas que T satisface que:

$$\forall x\in E,\ T(x)=0\ \Longrightarrow x=0$$

Muestre que si $\{x_1, x_2, \ldots x_n\} \subset E$ es l.i entonces $\{T(x_1), T(x_2), \ldots, T(x_n)\} \subset F$, tambien es l.i

P3. Justifique si es que los siguientes conjuntos son linealmente independientes o no.

(i) En el espacio de las matrices de $n \times n$, una matriz invertible y otra no invertible distinta de 0

(ii) En el espacio de los polinomios, una coleccion de polinomios de distinto grado.

(iii) Tres puntos colineales en R^3 en el espacio $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$.

(iv) Las columnas de una matriz $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ invertible en el espacio $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$

P4. [Varios de espacios vectoriales]

i) Sea E un espacio vectorial y $V, U \subset E$ subespacios de E. Demuestre que $V \cup U$ es un s.e.v de E si y solo si $V \subset U$ o U $\subset V$

ii) Muestre que $(\mathcal{P}(X), \Delta, \cdot)$ sobre $(\mathbb{Z}_2, +)$ es un espacio vectorial, donde X es un conjunto fijo y $\cdot$ esta definido de la siguiente manera:

$$\text{A} \subset X: \quad 1 \cdot A = A \quad \text{y} \quad 0 \cdot A = \phi$$