Auxiliar 7: Espacios Vectoriales

Fecha: 4 de Octubre 2017

Resumen:

- Un s.e.v debe satisfacer que:

$$\text{H es s.e.v} \iff (\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K})(\forall u, v \in H),\ \alpha u + \beta v \in H$$

- Diremos que un conjunto de vectores $X = \{x_1, x_2 \ldots x_n\}$ es linealmente independiente si:

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = 0 \implies \lambda_i = 0 \ \ \forall i \in \{1, \ldots n\}$$

- El conjunto generado por un conjunto de vectores $\{v_i\}_{i=1}^{n}$ corresponde al conjunto de las combinaciones lineales de estos. Es decir:

$$\langle \{v_1, \ldots, v_n\} \rangle = \{v \in V \ ,\ v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i \ ,\ \lambda_i \in \mathbb{R}\}$$

- Decimos que un conjunto de vectores $\{v_i\}_{i=1}^{n}$ es base de V si es que:
  - $V = \langle \{v_1, \ldots, v_n\} \rangle$
  - $\{v_i\}_{i=1}^{n}$ es un conjunto l.i
- Definimos la dimension de V como el cardinal de una de sus bases y escribimos dimV para abreviar.
- Sean U,W dos s.e.v de V. Definimos la suma de sub espacios vectoriales como el conjunto:

$$U + W = \{x \in V \ ,\ x = u + w \ ,\ u \in U \ ,\ w \in W\}$$

- Diremos que el subespacio Z=U+W es suma directa de U y W, notado $Z = U \oplus W$, si $\forall x \in V$, x se escribe de manera unica como:

$$x = u + w, u \in U, w \in W$$

- La proposicion anterior se puede caracterizar como:

$$Z = U \oplus W \iff Z = U + W \quad \wedge \quad U \cap W = \{0\}$$

P1 (Completacion de bases)

(i) Sea E un e.v y $I \subset E$ linealmente independiente. Pruebe que:

$$x \notin \langle I \rangle \iff I \cup \{x\} \text{ es l.i}$$

(ii) Considere los conjuntos de vectores

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} \right\} \quad B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

a) Elimine vectores del conjunto A para convertirlo en un conjunto l.i que genere el mismo subespacio que A

b) Encuentre una base del conjunto generado por B y luego expanda dicha base a una de $\mathbb{R}^4$

P2 Sea E un espacio vectorial tal que dim(E)=n

a) Diremos que B es l.i. maximal si B es linealmente independiente y para todo $x \in E$, $B \cup \{x\}$ es linealmente dependiente. Demuestre que:

$$\text{B es l.i maximal} \iff \text{B es base}$$

b) Diremos que B es un conjunto generador minimal si $\langle B \rangle$=E y para todo $x \in B$, $\langle B \setminus \{x\} \rangle \neq E$ Demuestre que:

$$\text{B es generador minimal} \iff \text{B es base}$$

Hint: Demuestre que si B es linealmente dependiente entonces existe x tal que $\langle B \setminus \{x\} \rangle = \langle B \rangle$

c) Sea $B = \{b_1, b_2 \dots b_n\}$ base de E. Demuestre que:

$$E = \langle b_1 \rangle \oplus \langle b_2 \rangle \oplus \dots \oplus \langle b_n \rangle$$

P3 Considere el e.v. $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ el conjunto de los polinomios de grado menor o igual a 3 y coeficientes en R. Considere el s.e.v $U = \{p(x) \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}),\ p(1) = p'(1) = 0\}$.

a) Encuentre una base de U y su dimension

b) Extienda la base anterior a una base de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$

c) Considere el s.e.v $W = \{p(x) \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}), p''(0) = 0\}$

  i) Determine una base de W y determine su dimension

  ii) Encuentre una base de $U \cap W$ y determine su dimension

  iii) Pruebe que $\mathcal{P}_3(\mathbb{R}) = U + W$